



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |  |                               |                               |                               |                               |                               |                               |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1<br><input checked="" type="checkbox"/> | 2<br><input type="checkbox"/> | 3<br><input type="checkbox"/> | 4<br><input type="checkbox"/> | 5<br><input type="checkbox"/> | 6<br><input type="checkbox"/> | 7<br><input type="checkbox"/> |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$a_9 - a_3 = 6d = 3x^2 - 3x - 3 \Rightarrow 2d = x^2 - x - 1 \Rightarrow 4d = 2x^2 - 2x - 2$$

$$a_9 - a_5 = 4d = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^4 - 4x^3 - x^2$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Замечаем, что  $x = -1$  уравнению  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2)$$

У биномий скобки есть корень  $x = -1 \Rightarrow (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = (x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2)$ . У ост. скобки корни

$x_1 = -1 + \sqrt{3}$ ,  $x_2 = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow$  у уравнение 3 корня.

Проверка:

$$x = -1$$

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

$$a_3 = -3 + 3 = 0$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_3 = -3\sqrt{3}$$

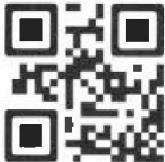
$$a_5 = (1-2)^2 = 1$$

$$a_5 = 4$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 3 \Rightarrow d = 0,5 \vee a_9 = 12 + 6\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{4 + \sqrt{3} \cdot 3}{2} \vee a_9 = 12 + 6\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{4 + 6\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:  $-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [\frac{x}{3} - 1; \frac{x}{3} + 1] \\ y \in [3x - 1; 3x + 1] \end{cases}$$

у найдется, если у этих отрезков есть пересечение  $\Rightarrow$  либо левый конец первого отрезка лежит во втором, либо левый конец второго лежит в первом, или наоборот правое концы

$$1) \begin{cases} 3x - 1 \leq \frac{x}{3} - 1 \leq 3x + 1 \\ \frac{x}{3} - 1 \leq 3x - 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \leq 3x + 1 \\ \frac{x}{3} - 1 \leq 3x + 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \end{cases}$$

Решим эти системы неравенства и получим:

$$1) \begin{cases} x \in [-\frac{3}{4}; 0] \\ x \in [0; \frac{3}{4}] \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \in [0; \frac{3}{4}] \\ x \in [-\frac{3}{4}; 0] \end{cases}$$

Заметим, что в макси для  $y$ , где больше  $x$ , чем больше  $y_{\max}$ , так  $\frac{x}{3} + 1$  и  $3x + 1$  линейны с  $k > 0$ ,  $\Rightarrow 4y + 8x \rightarrow \max$  при  $x \rightarrow \max \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 8x = 11$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$\text{I. } A = 13p^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 > 0$$

$$m+n > 0, \text{ т.к. } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n > 9$$

Ит.к.  $A : 13$ , то один из множителей : 13

$$\text{I. } (m+n) : 13. \quad \text{II. } m+n$$

Поэтому  $A = 13p^2$  является доказательством, что максимум  $A$  имеет место при

$$m+n$$

$$\text{I. } m+n \neq 1, \text{ т.к. } m, n \geq 1$$

$$\text{II. } \begin{matrix} m \\ m+1 \\ m+n \end{matrix} = 13$$

$$m+n=4 \Rightarrow p=2.$$

$$\text{III. } B = mn \cdot 10 = 75p^2 \Rightarrow 15p^2 = 2mn. \quad \text{Предположим}$$

все ~~многие~~  $m < 13$  могут решения  $(3; 10)$  и  $(10; 3)$

$$\text{III. } m+n=13p \Rightarrow m+n-9=p \Rightarrow g=12p \Rightarrow \text{крайне}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{IV. } m+n=13p^2 \Rightarrow m+n-9=1 \Rightarrow m+n=10 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$\text{V. } m+n=p \Rightarrow m+n-9=13p \Rightarrow m+n-9 > m+n \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$\text{VI. } m+n=p^2 \Rightarrow m+n-9=13 \Rightarrow p^2=22 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$2) \beta = 13p^2 = mn(m+n-3)$$

Переберём все множители  $m$ , а потом  $n$

$$\text{I. } m=1$$

$$1. n=13$$

$$m+n-3=11 \neq p^2 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$2. n \neq 1, m \cdot n \cdot m+n > 3$$

$$3. n=p \Rightarrow m+n-3=13p=p-2 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$4. n=13p \Rightarrow m+n-3=p \Rightarrow 13p-2=p \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$5. n=p^2 \Rightarrow m+n-3=13 \Rightarrow m+n=16 \Rightarrow A=16 \cdot 7 \neq 759^2$$

$$6. n=13p^2 \Rightarrow m+n=4 \Rightarrow A=4 \cdot (-5) < 0$$

$$\text{II. } m=13$$

$$1. n \neq 1, m \cdot n. \text{ Выражение симметрично} \Rightarrow \begin{cases} \text{если } m \neq 1, \\ \text{то } n \neq 1 \end{cases}$$

$$2. n=p \Rightarrow m+n-3=p=n \Rightarrow \text{противоречие, корней нет}$$

$$3. n=p^2 \Rightarrow m+n-3=1 \Rightarrow n=-3 \text{ противоречие}$$

$$\text{III. } m=13p$$

$$1. n=p \Rightarrow 13p+p-3=1 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$2. n \neq 1 \text{ сразу симметрично}$$

$$\text{IV. } m=p$$

$$1. n \neq 6 \text{ сразу симметрично}; 2. n=p \Rightarrow 2p-3=13 \Rightarrow p=8 \text{ - корень}$$

$$3. n=13 \Rightarrow m+10=p^2=p+10 \Rightarrow \text{корней нет.}$$

$$4. n=13p \Rightarrow 14p-3=1 \Rightarrow \text{корней нет.}$$

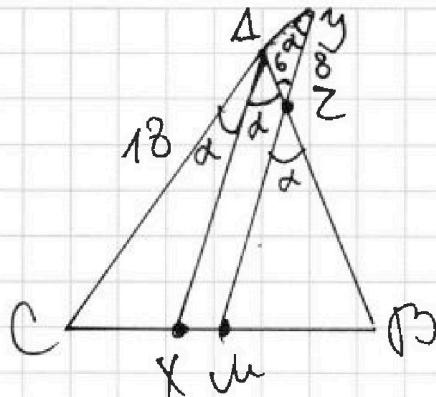


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle YAZ$ -внешний для  $\triangle A$   $\Rightarrow \angle YAZ = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle AZY = 180 - (180 - 2\alpha) - \alpha = \alpha$  ( $\angle AYZ = \angle CAZ$ ,  
 п.к. образовано пересечением паралл. прямых)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AY = AZ = 6$ .

П.к.  $AX$ -биссектриса  $\Rightarrow \frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CX = BC \cdot \frac{AC}{AC+AB}$

П.к.  $\angle CAZ = \angle CYM$  и  $\angle C$ -общий, то  $\triangle CAZ \sim \triangle CYM$   
 $\Rightarrow k = \frac{18}{18+6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CX}{CY} = k = \frac{BC \cdot \frac{AC}{AC+AB}}{\frac{1}{2} \cdot BC} = \frac{2 \cdot AC}{AC+AB} = \frac{36}{18+AB} \Rightarrow AB =$

$= 30$ . Заметим, что  $\triangle BZA \sim \triangle BAX$  по 2 углам  
 $\Rightarrow k = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{CY}{AX} = \frac{4}{5}$ . ВНП  $x = 24, y = 15$ .

П.к.  $\triangle CAZ \sim \triangle CYM$ , то  $\frac{YU}{AZ} = \frac{3+x}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \\ \frac{3+x}{y} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{y} = \frac{8}{15} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = 12$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

β △ABC по Т. косинусов

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{3}$$

β △ZBM

$$\begin{aligned} BM^2 &= 12^2 + 24^2 - 2 \cdot 12 \cdot 24 \cdot \cos \alpha = \\ &= 144 + 24^2 \cdot \frac{1}{3} = 12^2 \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{12 \cdot 12 \cdot 7}{3} = \\ &= 12 \cdot 4 \cdot 7 \Rightarrow BM = 4\sqrt{21} \Rightarrow BC = 8\sqrt{21} \end{aligned}$$

Ответ:  $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Замечаем, что  $x, y \geq 0$ , т.к.  $\sqrt{x}$  и  $\sqrt{y}$  определены.

Рассмотрим на второе уравнение и преобразуем его

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - 2\sqrt{xy} + 5y^2$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1) = 0$$

Есть решение  $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$ .

Рассмотрим на вторую скобку

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

Замечаем, что т.к.  $x, y \geq 0$ , то оба произведения

нестрелательны  $\Rightarrow$  выражение всегда больше 0  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = y$  - единственное решение. Теперь решим

1) первое уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5-y^2}$$

$$\sqrt{6+5-y^2} = \sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = -(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 + (x+1) + (6-x)$$

$$\text{Пусть } t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$$

$$t+5 = -t^2 + 7 \quad t_1 = 1 \quad t_2 = -2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$x+1 = 1+6-x + 2\sqrt{6-x}$$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$x-3 = \sqrt{6-x}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 6-x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\mathcal{D} = 25 - 12 = 13$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{решение } \left( \frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right) \quad \left( \frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right)$$

Ответ:  $\left( \frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right);$

$$\left( \frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего 31 узел, значит будущий поворот  
имеет  $C_{31}^2$  раскраски. Посчитали, каких раскрасок  
мы имеем сейчас раз.

$n=1$ , т.е. при любом повороте картина не  
изменяется, таких нет.

$n=2$ , ситуация, когда погра 1 пересекает в пункту  
2 при повороте гравюры  $\Rightarrow$  особая симметрия  
Относительно ~~одн параллельной стороны~~ центра,  
таких  $C_{31}^1$

$n=3$ , такой ситуации не бывает, т.к. 6  
таких случаев мы это пересекли к симметрии,  
а значит  $n=2$ , это пересекло не бывает  $\Rightarrow$  таких  
нет

$n=4$ , все остальные, т.к. существует 3 поворота.  
таких  $C_{31}^2 = 2 C_{31}^1 + 4x$ , т.к. надо вычесть  $C_{31}^1 + x$ ,  
то ответ  $\frac{C_{31}^2 - C_{31}^1}{4}$

Ответ:  $\frac{C_{31}^2 + 4 \cdot 2 C_{31}^1}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 3x + 3 &= a_3 & a_1 + 2d &= 3x + 3 & 3\sqrt{3} \Rightarrow 4 \Rightarrow 12 - 6\sqrt{3} \\
 (x^2 + 2x)^2 &= a_5 & a_1 + 4d &= x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) \\
 3x^2 &= a_9 & a_1 + 8d &= 3x^2 & x^2(x+2)^2 \\
 3(-1+\sqrt{3}) + 3 &= \\ 
 -3 + 3\sqrt{3} + 3 &= 3\sqrt{3} & 2d &= 1 & 4d = 8 - 6\sqrt{3} \\
 a_3 + a_9 &= a_6 & d = 0,5 & 4d = 3x^2 - x^2(x^2 + 4x + 4) - \\
 a_5 &= (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 0 = a_3 & = x^2(3 - x^2 - 4x - 1) \\
 (1+\sqrt{3})^2 &= a_9 - a_3 = 6d & 1 = a_5 & = x^2(-x^2 - 4x - 1) \\
 = 4 - 2\sqrt{3} & 3x^2 - 3x - 3 = 6d & 3 = a_9 & 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = \\
 x^2 - x - 1 &= 0 & x_1 = -1 & -x^4 - 4x^3 - x^2 \\
 2x^2 - 2x - 2 &= 0 & x_2 = -1 + \sqrt{3} & x^3 + 3x^2 - 2|x+1| \\
 2x^2 - 2x - 2 &= 9d & x_3 = -1 - \sqrt{3} & x^3 + x^2 \quad x^4 + x \\
 3x^2 &= 3 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) & x = -1 & \frac{a_9 - a_5}{0,5} = 4 - 6\sqrt{3} \\
 2x^2 - 2x - 2 &= x^2(-x^2 - 4x - 1) & \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x+1} & -2 \\
 2x^2 - 2x - 2 &= -x^4 - 4x^3 - x^2 & 2x^2 + 2x & -2x - 2 \\
 x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 &= 0 & x^2 + 2x - 2 & a_9 = 12 + 6\sqrt{3} \\
 D = 9 + 8 = 12 & 1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0 & x^3 + 3x^2 - 2 & \\
 x_1 = -2 + 2\sqrt{3} & x_2 = -2 - \sqrt{3} & -8 + 12 - 2 & \frac{4 + 2\sqrt{3}}{\alpha} \\
 x_1 = -1 + \sqrt{3} & x_2 = -1 - \sqrt{3} & -1 + 3 - 2 & \\
 x_1 = -1 + \sqrt{3} & x_2 = -1 - \sqrt{3} & 4 + 2\sqrt{3} & \\
 x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 &= 0 & x^3 + 3x^2 - 2 & \\
 -3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 &= 0 & (4 + 2\sqrt{3} + -2 - 2\sqrt{3})^2 & \\
 3x^3 + 3x^2 &= 0 & = (4) &
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m+n)(m+n-3)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$\text{I) } A = 13p^2.$$

$$B = 75q^2$$

$$A = 13p^2 : 13 \Rightarrow (m+n) : 13 \text{ км } (m+n-3) : 13$$

$$\text{I. } m \equiv -n \underset{13}{\Rightarrow} (m+n-3) \equiv 4 \quad mn(m+n-3) = 13p^2$$

$$13k+4 \equiv p \quad m = 13$$

$$k=1$$

$$(m+n)(m+n-3) = 13p^2$$

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ m-2 &= p^2 = 11x \\ n &= p \\ m+n-3 &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I) } m+n &= 13 \\ m+n-3 &= p^2 = 4 \end{aligned}$$

$$10mn = 75q^2 =$$

$$= 3 \cdot 5^2 \cdot q^2 \quad m$$

$$2mn = 15q^2 \quad n = m+n-3$$

$$\begin{aligned} \cancel{m} \\ 2mn = 15q^2 \\ \cancel{n} \end{aligned}$$

$$m+n = 13 \quad x$$

$$m+n = 13$$

$$m=3$$

$$n=10$$

$$(3, 10)$$

$$\begin{aligned} \text{V) } m+n &= p \\ m+n-3 &= p^2 \end{aligned}$$

$$m+n-3 = 13p - \text{противоречие}$$

$$\begin{aligned} \text{VI) } m+n &= p^2 \\ m+n-3 &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \cdot 4 \\ 3 \cdot 10 \cdot 10 = 300 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\checkmark. m = p^2$$

$$1. n=1 \Rightarrow m+n-3=13=p^2-2 \Rightarrow p^2=15 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

$$2. n=13 \Rightarrow m+n-3=1 \Rightarrow p^2+10=1 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

$$\text{VI}. m=13 p^2 \Rightarrow n=1 \Rightarrow \text{Корней нет.}$$

Учебное задание решения  $(3; 10); (10; 3)$

Ответ:  $(3; 10); (10; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{4}{3} = \frac{8+x}{18}$   $\frac{4}{3} = \frac{8+x}{18}$   $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$

$4x = 24 + 3x$   $6 + 2B = 2AB$   $\frac{6+2B}{2B} = \frac{2AB}{AC+AB}$

$\frac{24}{18} = \frac{1}{\frac{4C}{4C+AB}}$   $6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha$

$= \frac{4}{3} = \frac{AC+AB}{2AC}$   $\frac{AB \cdot 6}{AB} = \frac{\sqrt{AC+AB}}{\sqrt{AC+AB}}$

$\Delta ACX \sim \Delta YCM$   $\cos \alpha = \frac{64-96}{2AC}$

$\frac{4}{3} = \frac{18+AB}{18}$   $\frac{18+x}{18} = \frac{CX}{CM}$   $P = \frac{6+6+6}{2} = 10$

$\alpha \beta = 6$   $CX = BC \cdot \frac{AC}{AC+AB}$   $\cos \alpha = \frac{64}{96}$

$\frac{4}{3} = \frac{18+AB}{36}$   $\Rightarrow AB = 30$   $\frac{21}{18} = \frac{1}{2} \frac{4}{5} = \frac{x}{y}$

$AC+x = AB-3$   $\frac{AC+x}{AC} = \frac{AC+AB}{2AC}$   $\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$

$18 + \frac{AB-18}{2} = AB-3$   $2AC + 2x = AC+AB$   $\sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} =$

$AB = 12$   $\cancel{AC} x = \frac{AB-AC}{2}$   $= \frac{9}{3} - \frac{4}{5} - \frac{8}{15}$

$AB = 24$   $2AC + 2x = AC+AB$   $\frac{8}{15} = \frac{8}{y} \Rightarrow$

$\frac{CX}{AB} = \frac{AC}{AC+AB}$   $2AB - 6 = AC+AB$

$MN^2 = 144 + 576 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24 \Rightarrow y = 15$

$= 720 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 24 = 720 - 384 = 336$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(xy) \\ + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left( (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$> 0 \Rightarrow x = y \text{ - единственное решение}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{-x^2+5x+6} = \sqrt{(6-x)(x+1)} \quad (\sqrt{6-x} + \sqrt{x+1})^2 = (6-x) + (x+1)$$

$$x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) \quad (\sqrt{6-x} + \sqrt{x+1})^2 = 6 + x + 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} - (\sqrt{6-x})$$

$$\sqrt{(6-x)(x+2)} + \sqrt{(5-x)(x+1)} - 5 = 0$$

$$(6-x)(x+2) = 25 + (5-x)(x+1) - 10\sqrt{(5-x)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = -(\sqrt{6-x} - \sqrt{5-x})^2 + x+1+6-x$$

$$t+5 = -t^2 + 7 \quad t^2 + t - 2 = 0 \quad t = -1, t = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$[3x-1; 3x+1]$$

$$\left[ \frac{x}{3}-1; \frac{x}{3}+1 \right]$$

$$\sqrt{x+1} \sqrt{6-y} = \sqrt{x}$$

$$\frac{x}{3}-1 \leq 3x-1 < \frac{x}{3}+1$$

$$x-3 \leq 9x-3 \leq x+3$$

$$x-3 \leq 9x-3$$

$$x \leq 9x \Rightarrow x \geq 0$$

$$(x^2-y^2)(x+y) + 5(x-y)(x+y) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \leq 6$$

$$x \in [0; 3 \frac{3}{4}]$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$[-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$$

$$9x-3 \leq x+3$$

$$9x \leq x+6$$

81 узел

$$4(\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{5}{4}) = 6 + 5 = 11$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}-1 \leq 3x+1 \quad A = (m+n)^2 - g(m+n) =$$

$$9x-3 \leq x-3 \leq 9x+3 \quad = (m+n)(m+n-g)$$

$$8x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

$$x-3 \leq 9x+3 \quad B = \frac{mn}{m+n} (m+n-3)$$

$$-6 \leq 8x$$

Всего

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) \geq -\frac{3}{4}$$

$$x \in [-\frac{3}{4}; 0]$$

C2

$$x, y \geq 0$$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}+1 \leq 3x+1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}+1 / \cdot 3$$

$$\frac{x}{3}+1 \leq 3x+1 \quad x-3 = \sqrt{6-x}$$

$$9x-3 \leq x+3$$

$$x \neq 0 \quad x \leq 9x \quad x \geq 0$$

$$8x \leq 6$$

$$x^2 - 6x + 9 = 6 - x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \quad x+1 = 1+6-x+2\sqrt{6-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \in [-1, 1] \quad |3x| \geq 1 \quad |3x| \geq 3|x|$$

$$4(2x + \frac{y}{3}) \geq y + 2x \rightarrow \max = y + 2x \geq \max \quad y \leq 3 \quad 3|x| \geq 3|x|$$

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases} \quad -4+3 \leq 3x - x = 2x + 3y \leq -2 \text{ верно}$$

$$|3x| \geq |x| \quad 3x - y \leq 3 \quad 1 - 3y \leq 3$$

$$-4 \leq 4x - 4y \leq 4 \quad 3x - 3y \leq 3 \quad y \geq 3y - x \geq 3y \geq -\frac{2}{3}$$

$$-1 \leq x - y \leq 1 \quad y \leq 1 \geq 3 \quad |x+y| \leq 2$$

$$y=3 \quad |x-y| \leq 1 \quad 3 \geq 3y - x > -3 \quad x \in [-1, 1] \quad |x+y| \leq 2$$

$$y=1 \quad |3x-y| \leq 1 \quad 1 \geq x-y > -1 \quad \Downarrow \quad |2x+y| \leq 3$$

$$1 \geq y - 3x \geq -1 \quad \begin{cases} y \in [-2; 2] \\ y \in \end{cases}$$

$$3x - y \geq 1 \quad 1 \geq x - y \geq -1 \quad y \in [-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}]$$

$$3x + y \geq 1 \quad 2 \geq -2x \geq -2 \quad 1 \geq x \geq -1 \quad y \geq -3y \geq -3$$

$$y=1 \quad 1 \geq y - 3x \geq -1 \quad -4 \leq 2x + 2y \leq 4 \quad y=2$$

$$y=\frac{4}{3} \quad (1-2) \leq 3 \quad x \leq \frac{4}{3} \quad -3y \geq -2$$

$$3x - 1 \leq \frac{4}{3} + 1 \quad 3x + \frac{4}{3} \quad y \geq -\frac{4}{3} \quad x - 3y \leq 3$$

$$x(3 - \frac{1}{3}) \leq 2 \quad \frac{5}{3} \leq 1 \quad y \leq 4 \quad 2 \leq y \quad x - 3y \leq 3y$$

$$\frac{8}{3}x \leq 2 \quad -\frac{8}{3} \leq 3y - x \leq 0 \quad 3 - y \geq 0 \quad \frac{x}{3} - 1 \leq y \quad x - 3y \geq -3$$

$$\frac{8}{3}x \leq 2 \quad -\frac{8}{3} \leq 3x - y \leq 1 \quad 3 - y \leq 0 \quad \frac{8}{3} \geq 3y \quad \frac{8}{3} + 3y \geq 3y$$

$$4(2x + [3x - 1; 3x + 1])$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

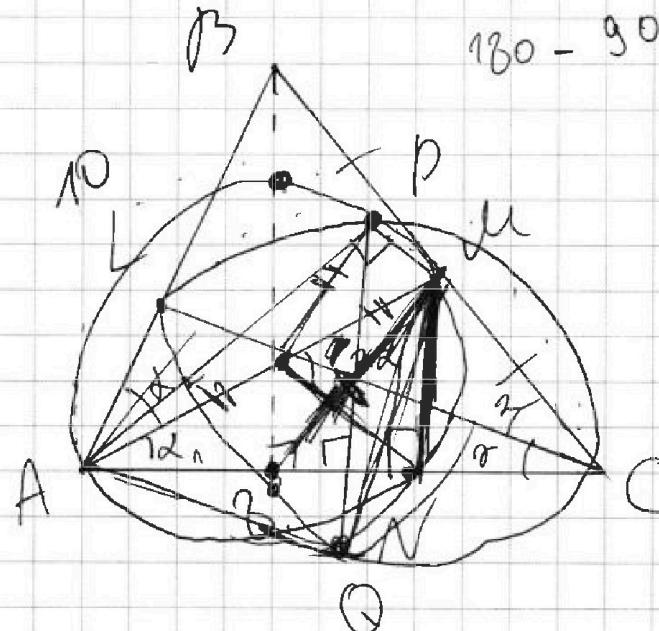
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 180 - \beta + \alpha_1 - \gamma + \delta_1 &= \\ &= \alpha_1 + \delta_2 + \beta + \alpha_2 + \end{aligned}$$

$$\frac{\mu C - \beta M}{\beta C} = \frac{MN}{MN} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

