



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \quad 8x+3=a_3, \quad (x^2+2x)^2=x^2(x+2)^2=a_5, \quad 3x^2=a_9$$

т.к. a_3, a_5 и a_9 члены арифм. прогр. $\Rightarrow a_3 = a_1 + 2b$
 $a_5 = a_1 + 4b \Rightarrow$

$a_9 = a_1 + 8b$
 $a_5 - a_3 = 2b$
 $a_9 - a_5 = 4b \Rightarrow 2(a_5 - a_3) = (a_9 - a_5) \Rightarrow$ Запишем это

$$2(x^2(x+2)^2 - 8(x+1)) = 3x^2 - x^2(x+2)^2$$

$$3x^2(x+2)^2 - 6(x+1) - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x+2)^2 - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2+4x+4) - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 2 - x^2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Запишем в скобках это выражение

$$(x^2+2x+1)(x^2+2x-2) = 0$$

1) $x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow a_3=0, a_5=1, a_9=3$

2) $x^2+2x-2=0 \Rightarrow D=4+4 \cdot 2=12 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

a) $x = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow a_3 = -3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 12 + 6\sqrt{3}$

b) $x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 12 - 6\sqrt{3}$

Ответ: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 3 \end{cases}$$

1) Заметим, что $|x-3y| = |3y-x|$ и $|3x-y| = |y-3x| \Rightarrow$

$$2) \cancel{8+8} \leq \cancel{|x-3y|} + \cancel{|3x-y|} = \cancel{|3y-x|} + \cancel{|y-3x|}$$

$$8+1 \geq |x-3y| + |3x-y| = |3y-x| + |3x-y| \geq |2y+2x| \Rightarrow$$

↑
по пер. бу *

$$\Rightarrow 4 \geq |2y+2x| \Rightarrow 2 \geq |x+y| \Rightarrow 8 \geq 4|x+y| = |4x+4y| (*)$$

2) Сделаем еще раз аналогично:

$$2+3 \geq |x+y| + |3x-y| \geq |x+y+3x-y| = |4x|$$

↓
3 ≥ |4x| (**)

3) Сейчас смотрим на * и **:

$$11 = 8+3 \geq |4x+4y| + |4x| \geq |8x+4y| \geq 8x+4y$$

↓

Максимальное зн. $8x+4y$ это 11
при $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{5}{4}$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N3 \quad A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

1) Заметим, что A обязательно четное, т.к. либо $m+n$, либо $m+n-9$ одет. четное $\Rightarrow$ и само A четное

① пусть $A = 13p^2$, $B = 75q^2$

т.к. A чет., а p - простое $\Rightarrow p = 2 \Rightarrow A = 13 \cdot 2^2 = 52$

$$(m+n)(m+n-9) = 52, \quad m+n = t \Rightarrow t(t-9) = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 9t - 52 = 0 \Rightarrow (t-13)(t+4) = 0. \quad \text{Если } t = -4, \text{ то}$$

противоречие, т.к. $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in \mathbb{N} \Rightarrow t = 13 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m+n = 13 \Rightarrow m+n-3 = 10$$

т.к. $m+n = 13 \Rightarrow$ они разной четности (m и n) $\Rightarrow mn$ - четное $\Rightarrow$

$\Rightarrow B$ - четное $\Rightarrow$ т.к. q простое $q = 2 \Rightarrow B = 75 \cdot 4 = 300 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mn(m+n-3) = 300, \quad \text{т.к. } m+n-3 = 10 \Rightarrow mn = 30 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m=10 \\ n=3 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} m=3 \\ n=10 \end{matrix} \quad \text{т.к. все симметрично}$$

② пусть $A = 75q^2$, $B = 13p^2$

Аналогично, т.к. A - чет. $\Rightarrow q = 2 \Rightarrow A = 75 \cdot 4 = 300 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 300, \quad t = m+n \Rightarrow t(t-9) = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 9t - 300 = 0 \Rightarrow D = 81 + 1200 = 1281, \quad \text{но } 35^2 = 1225, \text{ а}$$

$$36^2 = 1296 \Rightarrow 1281 \text{ не квадрат} \Rightarrow \text{решения в } \mathbb{N} \text{ числах нет}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Известно, что макс. всего 2 решения: $(m, n) = (10, 3) = (3, 10)$

Ответ: $(m, n) = (10, 3)$
 $(m, n) = (3, 10)$



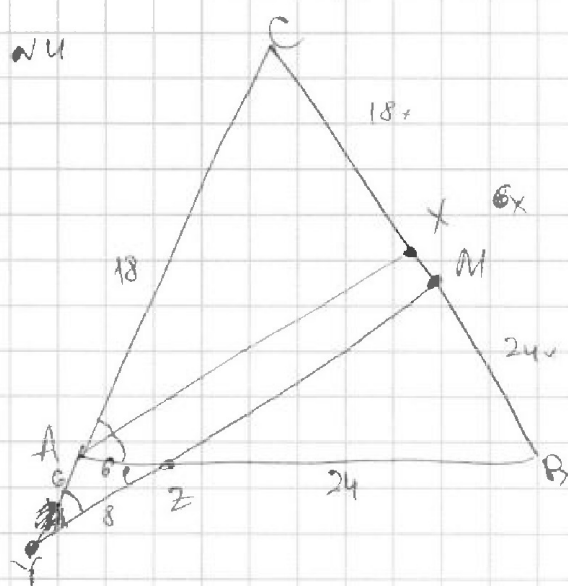
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $CM = MB$, $AX \parallel YM$
 $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$

1) Т.к. $AX \parallel YM \Rightarrow \angle CAH = \angle CMH$
 (соотв. углы)
 $\angle AZY = \angle ZAX$ (накрест. лежащие)

$$\angle CYM = \angle AZY$$

ΔAYZ - равнобедрен

$$AY = AZ = 6$$

2) Т.к. $AX \parallel YM$ по т. Фалеса: $\frac{AC}{YA} = \frac{CX}{YM} \Rightarrow \frac{CX}{YM} = \frac{18}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $CX = 18x$, $YM = 6x$.

3) Т.к. $CM = MB \Rightarrow MB = 18x + 6x = 24x$

4) Т.к. $AX \parallel YM$ по т. Фалеса: $\frac{XM}{MB} = \frac{AZ}{ZB} \Rightarrow ZB = \frac{MB \cdot AZ}{XM} = \frac{24x \cdot 6}{6x} = 24$

5) по т. кос. для ΔAYZ найдем $\cos \angle YAZ$.

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \angle YAZ \cdot AY \cdot AZ$$

$$64 = 36 + 36 - 2 \cos \angle YAZ \cdot 36$$

$$2 \cos \angle YAZ \cdot 36 = 36 \cdot 2 - 64 = 8$$

$$\cos \angle YAZ = \frac{8}{2 \cdot 36} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \angle CAB = \cos(180^\circ - \angle YAZ) = -\frac{1}{9}$$

6) по т. кос. для ΔABC найдем BC :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle CAB \cdot AC \cdot AB$$

$$BC^2 = 18^2 + 30^2 + \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{9}$$

$$BC^2 = 18^2 + 30^2 + 4 \cdot 30 = 324 + 900 + 120 = 1344 = 64 \cdot 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21} \quad \text{Ответ: } BC = 8\sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

1) Заметим, что $x, y \geq 0$, т.к. есть $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$

$$\begin{aligned} 2) \quad x^4 + 5x^2 - y^4 - 5y^2 &= \sqrt{y} - \sqrt{x} \\ (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) &= \sqrt{y} - \sqrt{x} \\ \cancel{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)} + \cancel{5(x+y)(x-y)} &= \sqrt{y} - \sqrt{x} \\ (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) &= \sqrt{y} - \sqrt{x} \\ (x+y)(x-y)(x^2 + y^2 + 5) &= \sqrt{y} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$\text{Если } \sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = -1 \Rightarrow \text{н.т.к.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0 \\ x+y > 0 \\ x^2 + y^2 + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow 3) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+1} + 2$$

$$\text{Пусть } \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t \Rightarrow t^2 = t + 2$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

1 случай $t = 2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2$. Возведем в квадрат.

$$(x+1) + (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \quad . \text{ Возведем в кв. } \cancel{\text{Возведем в кв.}}$$

$$4(x+1)(6-x) = 9$$

$$4(-x^2 + 5x + 6) = 9$$

$$-4x^2 + 20x + 24 = 9$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 20^2 + 16 \cdot 15 = 400 + 240 = 640 \Rightarrow x = \frac{20 \pm 8\sqrt{10}}{8} = 2,5 \pm \sqrt{10}$$

$$\text{Т.к. } x > 0 \Rightarrow \text{нам подойдет только } x = 2,5 + \sqrt{10}$$

$$(\text{также заметим, что } 6-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6 \text{ и } 2,5 + \sqrt{10} \leq 6, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{10} \leq 3,5)$$

$$\text{2 случай } t = -1 \Rightarrow \cancel{\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -1$$

$$\cancel{\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{6-x}}$$

$$\text{Возведем в кв.}$$

$$(x+1) + 1 + 2\sqrt{x+1} = 6-x$$

$$(x+1) + (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$4 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \Rightarrow \sqrt{(x+1)(6-x)} = 1,5 \Rightarrow (x+1)(6-x) = 2,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x + 6 = 2,25 \Rightarrow x^2 - 5x + 3,75 = 0 \Rightarrow D = 25 - 15 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{2} \quad \text{Оба } x \text{ подходят по ограничениям} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \begin{cases} x = 2,5 + \sqrt{10} \\ x = \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$



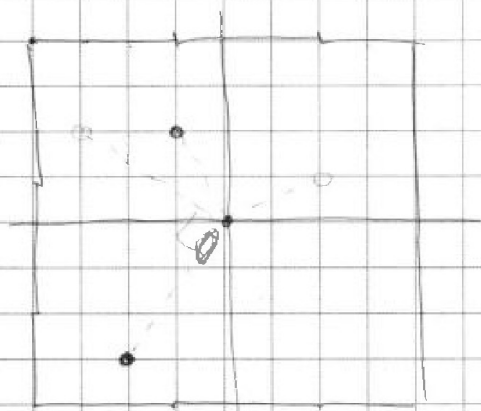
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



~~Задача 6~~
~~С~~
~~Всего~~

1) Всего узлов сетки $9 \cdot 9 = 81$

2) $C_{81}^1 \rightarrow$ кол-во способов выбрать 1-го перекрашиваемого узла

$C_{80}^1 \rightarrow$ кол-во способов выбрать второй узел

3) Запомним, что каждую раскраску мы посчитали 8 раз, т.к. каждую раскраску мы можем повернуть около точки O на 90° и получить такую же (по усл. они считаются одинаковыми). Повернуть мы можем 4 раза. А также мы должны учесть порядок выбора точек $\Rightarrow$ каждую посчитали еще 2!

раз $\rightarrow$ каждую раскраску посчитали $4 \cdot 2! = 8$ раз $\Rightarrow$

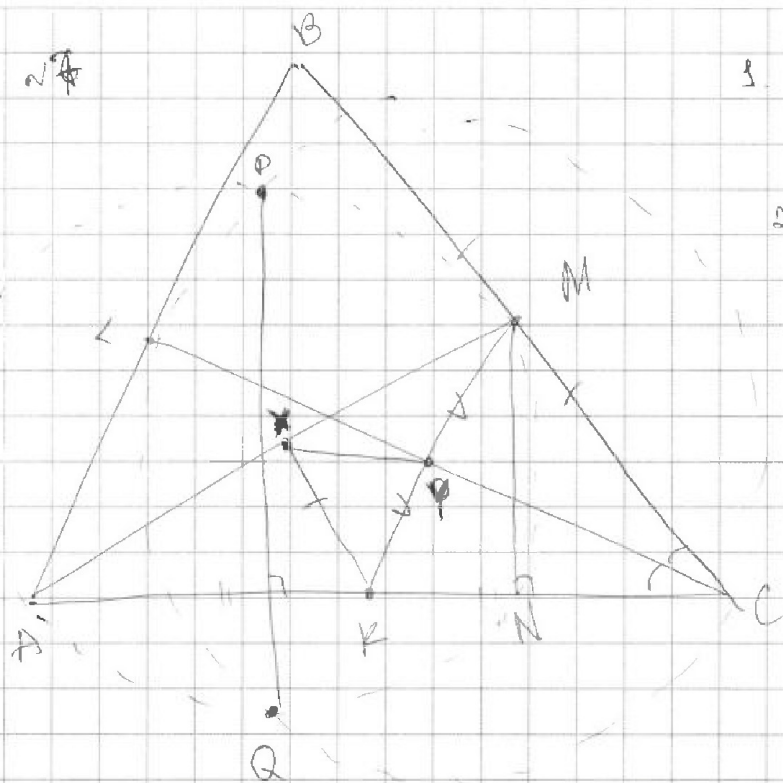
$\Rightarrow$ всего способов $N = \frac{C_{81}^1 \cdot C_{80}^1}{8} = \frac{81 \cdot 80}{8} = 81 \cdot 10 = 810$

Ответ: 810

[illegible]

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



3. $\angle MNA = 50^\circ$ - т.к. отрезок
на диаметр.

2. X и Y - средины
AM и CE

Докажем, что $XY \parallel AC$,
т.к. XY — медиана $\rightarrow$
 $\rightarrow XY \parallel PQ$, а $PQ \perp h$,
а $h \perp AC \rightarrow XY \parallel AC$

3) XK - ср. линия $\triangle AXK \Rightarrow XK \parallel MC$ и $XK = \frac{MC}{2}$
 MK - ср. линия $\triangle ABC \Rightarrow MK \parallel AB$ и $MK = \frac{1}{2} AB = 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

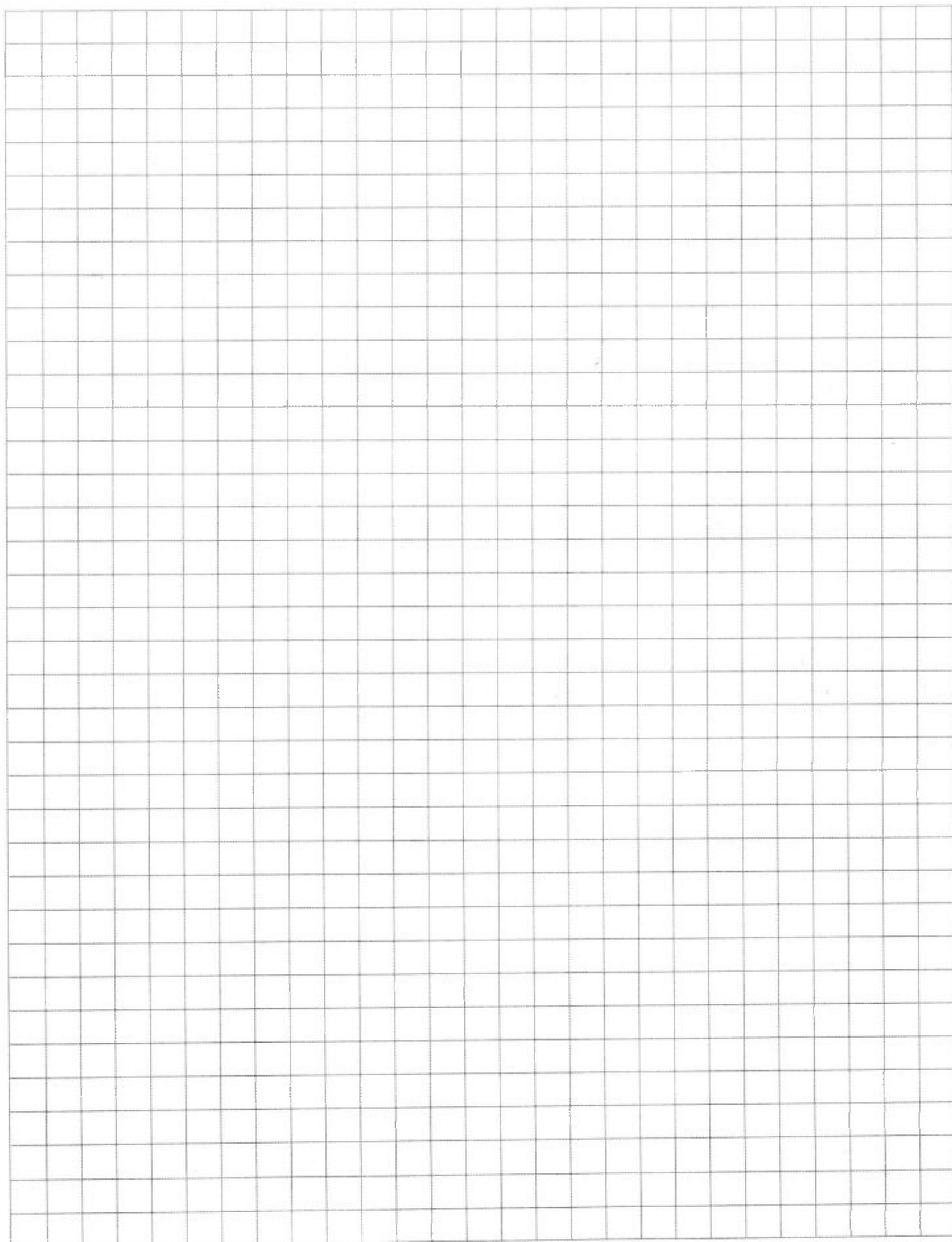
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 3 = 3(x+1) \cdot a_{1+26}$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = x^2(x+2)^2 \Rightarrow 2(x^2(x+2)^2 - 3(x+1)) = 3x^2 - x^2(x+2)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$3x^2(x+2)^2 - 6(x+1) - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x+2)^2 - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 4x + 4) - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x+1 \\ - x^4 + x^3 & x^3 + 3x^2 - 2 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & \\ - 3x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x - 2 & \\ - -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x(x^2 + x - 1) = 2$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2) = (x+1)(x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x^2 - 2x - 2$$

$$+ 2x^3 + 2x^2 = 2x(x+1) \quad (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x^2 + 2x + 2) - 2x = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - 2x - 2 - 2x) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x^2(x+1) = 2(x+1)$$

$$(x+1)^2(x^2 - 2) = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 + 2x^3 - 4x + x^2 - 2 = x^4$$

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 - 4x + x^2 + 2x - 2 =$$

$$= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 2) = 0$$

$$1) x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3x + 3 = 0$$

$$3x^2 \neq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$(x^2 + 5y^2 - \sqrt{y}) = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$6-y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 6$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$(x^2+2x+1)(x^2+2x+2)$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 - 4x + x^2 + 2x - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$6+5x-y^2 \geq 0$$

$$(4-2\sqrt{3}) \cdot (4+2\sqrt{3})$$

$$AH \parallel PQ$$

$$-x^2 + 5x + 6 \geq 0$$

$$AB=10$$

$$AN=8$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$$4+9\sqrt{3}$$

$$(4-3)$$

$$Q = 2S + 24 = 49$$

$$4-3\sqrt{3}$$

$$(x-6)(y+3) \leq 0$$



$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 15 \\ \hline 80 \\ 116 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$5-7 = -2$$

$$(5-7)^2 = 4$$

$$t=2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = 2$$

$$\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 (x+1) + (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 5$$

$$4(x+1)(6-x) = 25$$

$$(x+1)(6-x) = 6,25$$

$$-x^2 + 5x + 6 = 6,25$$

$$y^2 - 5y + 0,25 = 0$$

$$Q = 25 - 4 \cdot 0,25 = 24$$

$$3(-1\sqrt{3}) + 3 =$$

$$(1+\sqrt{3})^2 = (1+3+2\sqrt{3}) = 4+2\sqrt{3}$$

$$(1-\sqrt{3})^2 = (1+3-2\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3}$$

$$16 - 4 \cdot 8 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm 2}{2} \in \{1,5; 3,5\}$$

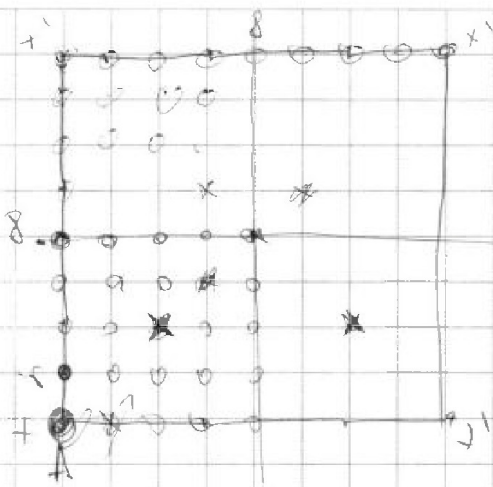


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

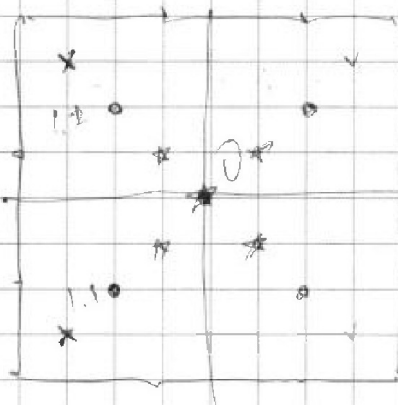


Узлов: $9 \cdot 9 = 81$

Посмотрим на пары узлов из точек которые есть в зоне A

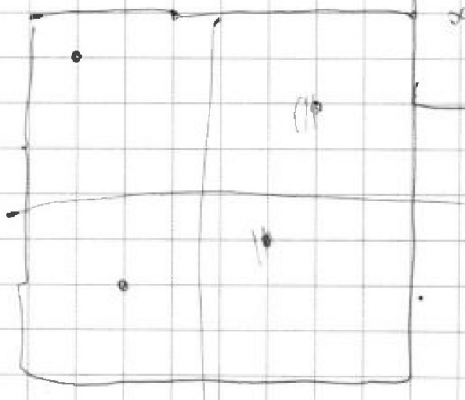
1) Пары точек не подходят.

$C_{81} \leftarrow$ первый узел
 $C_{80} \leftarrow$ второй узел.



Каждую раскраску
считаем в раз

Если не





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - y^4 + 5x^2y^2 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x} \quad , x, y > 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = -1$$

Такое невозможно, т.к.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0 \\ x + y > 0 \\ x^2 + y^2 + 5 > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = y$$

$$x \in [0; 6]$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$2\sqrt{5} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$A \quad y = 2+2$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+1} + 2$$

$$\cancel{x+1} + \cancel{6-x} - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+1} + 2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$$

$$t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \quad D = 1+4$$

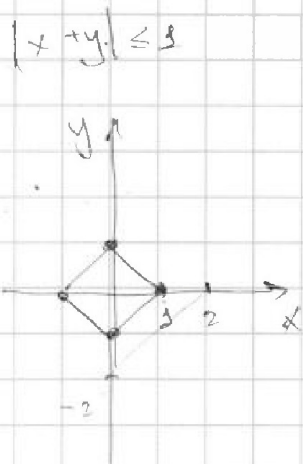
$$(t-2)(t+1) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$|x+y| = 3$$

n2

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-y| \leq 3$$

$$|x-3y| + |3x-y| \geq |x+3x-3y-y|$$

$$|x-3y| + |3x-y| = |x-3y| + |y-3x| \geq |-2x-2y|$$

$$4 \geq |x-3y| + |3x-y| \geq |4x-4y|$$

$$1 \geq |x-y|$$

$$4 \geq |x-3y| + |y-3x-y| = |3y-x| + |3x-y| \geq |2$$

$$4 \geq |x-3y| + |3x-y| = |3y-x| + |y-3x| \geq |4y-4x|$$

$$1+1 = 2 \geq |x-y| + |3x-y| \geq |4x-2y|$$

$$1 \geq |2x-y|$$

$$2 \geq |3y-x| + |3x-y| \geq |2x+2y|$$

$$2 \geq |x+y| \rightarrow 8 \geq |4x+4y|$$

$$2+1 = 3 \geq |x+y| + |3x-y| \geq |4x|$$

$$\frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}$$

$$11 = 3+8 \geq |4x+4y| + |4x| = |8x+4y|$$

(11)

$$y = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{9 \cdot 8^2}{4}$$

$$\frac{9}{4} - \frac{15}{4} = -3$$

$$\frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_3 = a_1 + 2b$$

$$a_5 = a_1 + 4b$$

$$a_9 = a_1 + 8b$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x)^2 - 3x + 3 = 2b$$

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 4b$$

$$\begin{cases} x^4 + 4x^2 + 4x^3 - 3x + 3 = 2b \\ 3x^2 - x^4 - 4x^2 - 4x^3 = 4b \end{cases}$$

(*)

$$(x^2 + 2x)^2 > 0$$

$$3x^2 > 0$$

$$x^2 > 0$$

$$3x^2 - 3x + 3 = 6b$$

$$x^2 - x + 1 = 2b$$

$$(x^2 + 2x)^2 = x^2(x+2)^2$$

$$x^4 + 4x^2 + 4x^3 - 3x + 3 = x^2 - x + 1$$

$$x^4 + 3x^2 + 4x^3 - 2x + 2 = 0$$

$$(x^2 + 2x)(x^2 + x)$$

$$(x^2 + x)^2 = (x+1)^2$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 +$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x^2 + 2x^3 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 +$$

$$x - 3y = 3$$

$$3y = x - 3$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$y = \frac{x}{3} - 1$$

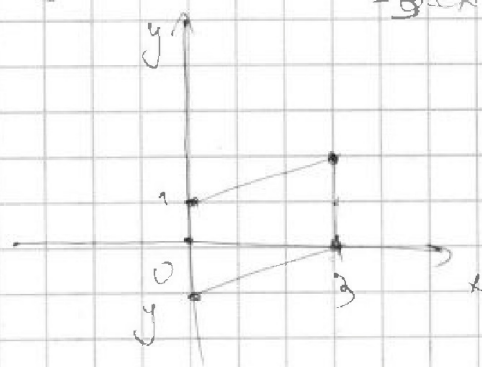
$$N2 \int |x - 3y| \leq 3$$

$$|3x - y| \leq 3$$

$$x - 3y = -3$$

$$3y = x + 3$$

$$y = \frac{x}{3} + 1$$



$$x - 3y = -3$$

$$3y = -x - 3$$

$$y = -\frac{x}{3} - 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n^2 + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$1) A = 13p^2 = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = 75q^2 = mn(m+n-3)$$

$$5^2 \cdot 3$$

$$mn \div 3 \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 4 \\ \hline 300 \end{array}$$

Заметим, что A бодз. четное, т.к. либо $m+n$, либо $m+n-9$ - четное $\Rightarrow p=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4 = 52$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 13 = 26 \\ 3 \cdot 13 = 39 \end{array}$$

$$\begin{cases} m+n \equiv 4 \\ m+n-9 \equiv 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n \equiv 0 \\ m+n \equiv 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=4 \end{cases} \Rightarrow \text{V}$$

но кто суш. ер. остатки по mod. 4, 13 = 52

при этом $\Rightarrow$ т.к. $mn = \text{неч}$, то одно из них чет $\Rightarrow mn = \text{неч} \Rightarrow B = 75 \cdot 4 = 300$

$$m+n \equiv 48 \Rightarrow m+n=48 \Rightarrow$$

$$m+n-3=10$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} mn=80 \\ m+n=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$$

и наоборот

$$\begin{cases} m+n=52 \\ m+n-9=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ + 25 \\ \hline 120 \\ \times 10 \\ \hline 1200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ + 96 \\ \hline 176 \\ \times 10 \\ \hline 1760 \end{array}$$

$$2) A = 75q^2 = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = 13p^2 = mn(m+n-3)$$

$$\text{Аналог } q=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 300$$

$$3 \cdot 5 \cdot 2^2$$

$$mn=6$$

$$1(t-9) = 300$$

$$t^2 - 9t - 300 = 0$$

$$D = 81 + 1200 = 1281$$

3	100
6	50
11	25
12	25
50	10
20	15

$$\begin{array}{l} 50 \cdot 50 = 2500 \\ 20 \cdot 20 = 400 \\ 40 \cdot 40 = 1600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 34 \\ 34 \\ \hline 98 \\ + 34 \\ \hline 561 \end{array}$$

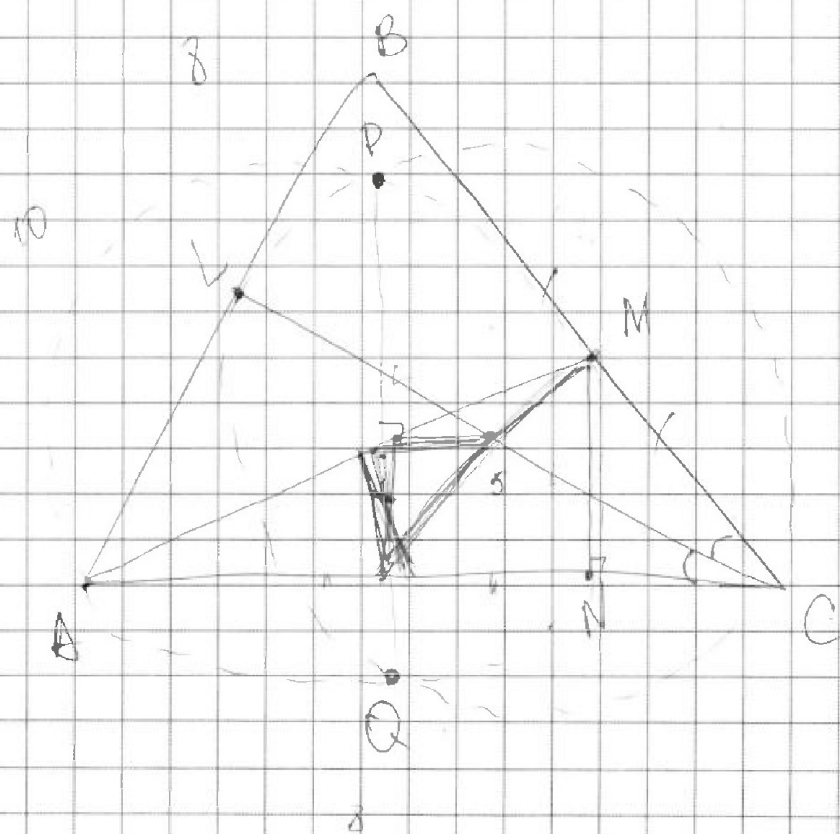
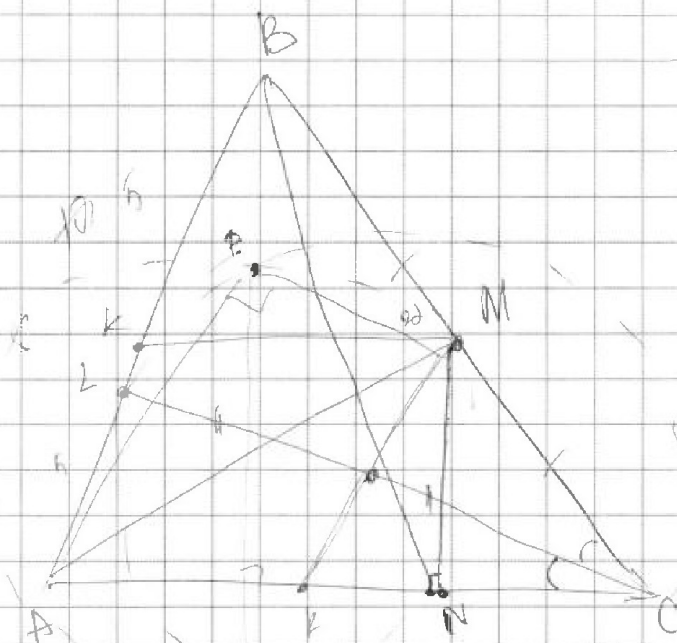


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



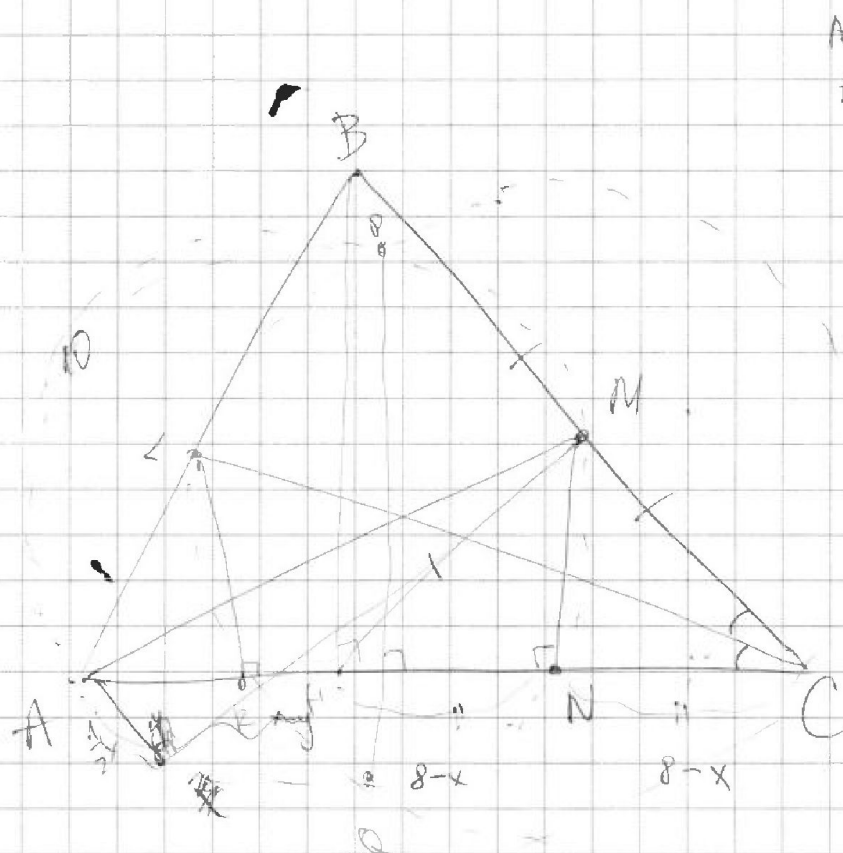


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 10$$

$$AN = 8$$

$$AN = NC$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ - 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 356 \overline{) 4} \\ - 32 \quad 89 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$AM^2 - MC^2 = 64 - (8-x)^2 = 64 - (64 + x^2 - 16x) = 16x - x^2$$

$$MC^2 = AM^2 + x^2 - 16x$$

$$100 - x^2 = BC^2 - (16 - 2x)^2$$

$$100 - x^2 = 4MC^2 - (16^2 + 4x^2 - 64x)$$

$$100 - x^2 = 4MC^2 - 16^2 - 4x^2 + 64x$$

$$4MC^2 = 100 - x^2 + 16^2 + 4x^2 - 64x = 356 + 3x^2 - 64x$$

$$\frac{3x^2}{4} - 16x + 89 = MC^2$$

$$\frac{3x^2}{4} - 16x + 89 - x^2 - 16x \Rightarrow 89 = \frac{1}{4}x^2 + AM^2$$