



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N_1. \quad a_5 = 6x + 78 = a_1 + 4d \quad a_7 = (x^2 - 4x)^2 = a_1 + 6d \\ a_{11} = -3x^2; \quad a_{11} = a_1 + 10d \Rightarrow \frac{a_5 + a_{11}}{2} = a_1 + 7d = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2} \\ a_{11} - a_5 = -3x^2 - 6x - 18 = 6d \Rightarrow d = -\frac{x^2 + 2x + 6}{2}$$

Также a_1 - первый член арифм. прогрессии, а d - шаг.

$$\text{Тогда } a_7 + d = \frac{a_5 + a_{11}}{2}$$

$$(x^2 - 4x)^2 - \frac{x^2 + 2x + 6}{2} = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - x^2 - 2x - 6 = -3x^2 + 6x + 18$$

$$2(x^2 - 4x)^2 + 2x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$\text{Замена } t = x^2 - 4x: \quad 2t^2 + 2t - 24 = 0 \\ t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\text{Обратная замена: } t = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$t = 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 3 \cdot 4 = 4 \cdot 7$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

Проверка:

a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
$x = 2: \quad 30$	23	16	9	2	-5	-12
$x = 2 + \sqrt{7}: \quad 30 + 6\sqrt{7}$	$19,5 + 3\sqrt{7}$	9	$-1,5 - 3\sqrt{7}$	$-12 - 6\sqrt{7}$	$-33 - 12\sqrt{7}$	+ верно $\Rightarrow x = 2 + \sqrt{7}$
$x = 2 - \sqrt{7}: \quad 30 - 6\sqrt{7}$	$19,5 - 3\sqrt{7}$	9	$-1,5 + 3\sqrt{7}$	$-12 + 6\sqrt{7}$	$-23,5 + 9\sqrt{7}$	$-33 + 12\sqrt{7}$ + верно

Проверка: $x = 2: \quad a_5 = 30; \quad a_7 = 16; \quad a_{11} = -12$ легко можно подсчитать, что

$a_1 = 58; \quad d = -7$ подходит по слог. $\Rightarrow x = 2$

$x = 2 + \sqrt{7}: \quad a_5 = 30 + 6\sqrt{7}; \quad a_7 = 9; \quad a_{11} = -33 - 12\sqrt{7}$ можно

проверить, что по слог. задано: $d = -10,5 - 3\sqrt{7}; \quad a_1 = 72 + 18\sqrt{7}$

$x = 2 - \sqrt{7}: \quad a_5 = 30 - 6\sqrt{7}; \quad a_7 = 9; \quad a_{11} = -33 + 12\sqrt{7} +$ можно проверить, что

$a_1 = 72 - 18\sqrt{7}; \quad d = -10,5 + 3\sqrt{7}$ задает по слог. $\Rightarrow x = 2 - \sqrt{7}$

Ответ: $\{2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}\}$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq 3y-4x \leq 6 \\ -8 \leq 4y-3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x-2 \leq y \leq \frac{4}{3}x+2 \\ \frac{3}{4}x-2 \leq y \leq \frac{3}{4}x+2 \end{cases} \quad \text{построим граничные линии } l_{11}: y = \frac{4}{3}x-2; \\ l_{12}: y = \frac{4}{3}x+2; \quad l_{21}: y = \frac{3}{4}x-2; \\ l_{22}: y = \frac{3}{4}x+2$$

Таким образом реш систему нер. в. будет пересечение областей между $l_{11} \neq l_{12}$ и l_{21}, l_{22} , т.е.

$ABCD$, т.е. нер. во нестрогие, то граничные включ.

Пусть $14x+7y=7 \cdot m$

$\Rightarrow y = m - 2x$, требуется

шт. $7m$, то есть шт. m ,

$y = m - 2x$ — множество

прямых с угловой "наклонкой" -2

а и проложить через $T(0; m)$ для наклон. шт. m можно просто последовательно это увел. до первого пересеч. $ABCD$, т.е. то, что удобн. нер. в. Т.к. графику можно понять, то $y = m - 2x$ проходит через т.а. вершина т.а.

$$l_{12} \cap l_{21} = A \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{4}{3}x_A + 2 \\ y_A = \frac{3}{4}x_A - 2 \end{cases} \quad (1)$$

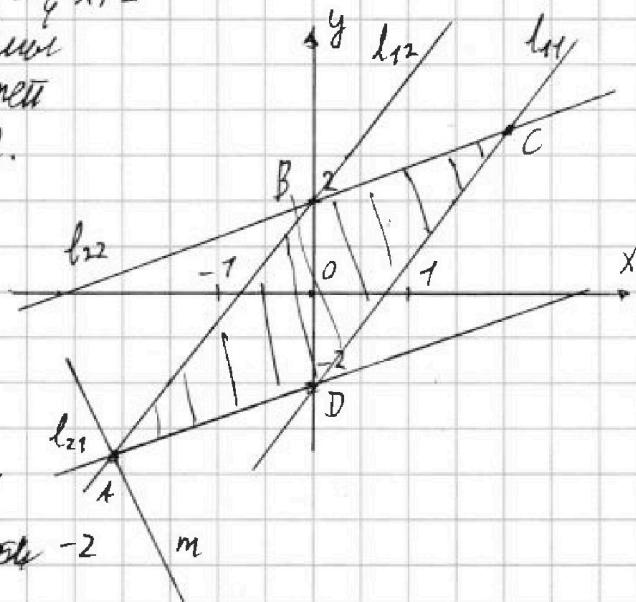
$$\begin{cases} y_A = \frac{4}{3}x_A + 2 \\ y_A = \frac{3}{4}x_A - 2 \end{cases}$$

$$(1): \frac{16-9}{12}x_A = -4 \quad \frac{7}{12}x_A = -4 \quad x_A = \frac{-48}{7} \Rightarrow y_A = -\frac{36}{7} - 2 = -\frac{50}{7}$$

$$\Rightarrow y_A A \left(-\frac{48}{7}, -\frac{50}{7}\right) \Rightarrow -\frac{50}{7} = m - 2 \left(-\frac{48}{7}\right) \Rightarrow m = 2 \cdot \frac{-48}{7} - \frac{50}{7} =$$

$$= -\frac{96+50}{7} = -\frac{146}{7} = m \Rightarrow 14x+7y=7 \cdot m = -146 - \text{шт. знако} \frac{14x+7y}{7} \text{удобн.} \\ \text{системе нер. в.}$$

Ответ: -146 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\textcircled{1}: \begin{cases} A = 3q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \quad \textcircled{2}: \begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 3q^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{1}: A = 3q^2 = (m-n)(m-n+9) \Rightarrow \begin{cases} d_1 \equiv b_1 \pmod{3} \\ d_1 \cdot b_1 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow d_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow m-n = 3k; k \in \mathbb{Z}. \Rightarrow 3q^2 = 3k(3k+9) \Rightarrow q^2 = 3k(k+3) \Rightarrow q^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow q^2 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{m.e. } q \text{ простое то } q=3 \Rightarrow g=3k(k+3)$$

$$\Rightarrow k^2 + 3k - 3 = 0 \quad D = 9 + 4 \cdot 3 = 3 \cdot 7 - \text{не полн. квадр} \Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$$

\Leftrightarrow уравнение не имеет решений, м.e.

$m \neq n \in \mathbb{N} \Rightarrow k = m-n, \text{ но } k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \textcircled{1}$ -вариант ~~нет~~ - нет решений $\Rightarrow \emptyset$

$$\textcircled{2}: \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 > 0 \end{cases} (\times)$$

$$\Rightarrow m > 0 \text{ и } n > 0, m \neq n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow m-n+3 > 0 \Rightarrow m-n+9 > 0$$

$$(\times): (m-n)(m-n+9) = 13p^2;$$

$$\text{m.e. } 13p^2 > 0 \text{ и } m-n+9 > 0 \Rightarrow m-n > 0 \Rightarrow m > n$$

также $d = m-n$, тогда $d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0 \Rightarrow d \in \mathbb{N}$.

аналогично: $d(d+9) = 13p^2, 0 < d < d+9; p \text{-простое, тогда все}$

$\textcircled{1} \begin{cases} d=1 \\ d+9=13p^2 \end{cases}$ но тогда $13p^2 = 10$ нет комп. реш. \Rightarrow нет реш.

$\textcircled{2} \begin{cases} d=p \\ d+9=13p \end{cases} \Rightarrow 13p-p = 9 = 12p$, тоже нет реш.

$\textcircled{3} \begin{cases} d=p^2 \\ d+9=13 \end{cases}$

$\textcircled{4} \begin{cases} d=13p \\ d+9=p \end{cases}$, но тогда $13p < p \Rightarrow 13 < 1$ - нет реш.

$\textcircled{5} \begin{cases} d=13p^2 \\ d+9=13p \end{cases}$, но тогда $13p^2 < 1$ - нет реш.

$\textcircled{6} \begin{cases} d=13 \\ d+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 22$, нет цел. реш. \Rightarrow нет реш.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | X | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом у ③, ④, ⑤, ⑥ нет решений для ③:

$$\begin{cases} a=p^2 \\ a+q=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2=4 \\ a=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ a=4=m-n \end{cases}$$

Вернемся к исходу: $\begin{cases} mn(m-n+3)=3q^2 \\ m-n=4 \\ p=2 \end{cases} \Rightarrow mn \cdot 7 = 3q^2$

$m \times q$ -простое и $m \cdot n \cdot 7 \neq 3$, а ~~3~~ 3 не делит $7 \neq q=2$
 $\Rightarrow m \cdot n \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \Rightarrow m \cdot n = 21 \Rightarrow \begin{cases} m \cdot n = 21 \\ m-n=4 \end{cases}$

$$\Rightarrow n(n+4) = 21 \Rightarrow n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 21 = 4 \cdot 25$$
$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = -7 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 7$$

$\Rightarrow (n=3; m=7)$, проверка: $\begin{cases} 3 \cdot 7(7-3+3) = 3 \cdot 7^2 \\ (7-3)(7-3+9) = 13 \cdot 2^2 \end{cases}$ — верно $\Rightarrow (7; 3)$

Ответ: $(7; 3)$.

если $\overline{(7; 3)}$

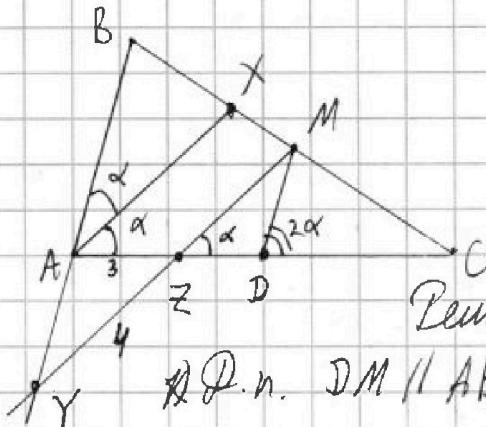


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$; $AX \parallel BC$

M -ср. BC ; $ZM \parallel AX$; $ZM \cap AC = Z$

$ZM \cap AB = Y$; $AC = 12$; $AZ = 3$; $YZ = 4$

Найти: $BC = ?$

Решение:

1) Д.н. $DM \parallel AB$; $DE \parallel AC \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha = \angle MDC$ (внешний угол $\triangle ADM$ при параллельных прямых)

$AX \parallel ZM \Rightarrow \angle XAC = \alpha \Rightarrow \angle MZC = \alpha = \angle XAC$ (внешний угол при параллельных прямых)

$\angle MDC = 2\alpha$ - внешний угол $\triangle ADM$; $\angle MZD + \angle ZMD = \angle MDC = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle ZMD = \alpha \Rightarrow \angle ZMD = \angle D = \angle M$.

$\triangle ABC \sim \triangle DMC$ (по 2 равным углам и 3-му. общему углу)

$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{MC}$ (по опр. подобия); $\frac{BC}{MC} = 2$, т.к. M -ср. BC \Rightarrow

$\Rightarrow AC = 2 \cdot DC \Rightarrow DC = \frac{AC}{2} = 6 \Rightarrow$ т.к. $AZ + ZD + DC = AC \Rightarrow ZD = AC - AZ - DC = 12 - 3 - 6 = 3$

$\Rightarrow DM = ZD$ (так как см. 1 п. доказательства) $\Rightarrow DM = 3$

$\triangle ABC \sim \triangle DMC$ $k=2 \Rightarrow AB = 2 \cdot DM = 6$.

$\triangle AZY \sim \triangle DZM$: ($\angle AZY = \angle MZD$ внешний угол)

($AZ = 3$; $ZD = 3$; $\angle YAZ = \angle ZDM = 180^\circ - 2\alpha$)

$YZ = ZM = 4$. Рассм $\triangle ZMD$: $ZD^2 + ZM^2 - 2 \cdot ZD \cdot ZM \cos \alpha = MD^2$ (по т. косинусов)

$$\Rightarrow 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha = 9 \Rightarrow 16 = 8 \cdot 3 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9} = \cos 2\alpha$$

Рассм $\triangle ABC$: $AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 2\alpha = BC^2$

$$\cancel{AB^2} \quad 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 180 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 196 \Rightarrow BC = \pm 14$$

$BC = -14$ - нецд.
 $\Rightarrow BC = 14$ BC -длинна.

Ответ: $BC = 14$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} & (1) \\ 4x^4 + x + 5\sqrt{x}^2 = y^4 + 5\sqrt{y}^2 + y & (2) \end{cases}$$

Заметим $f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$, т.к. сумма из членов функция опред. на $x \geq 0$, т.к. каждый из членов на интервале $x \in [0; +\infty)$ — возраст. функции, то $f(x)$ также возраст. на $x \in [0; +\infty)$, т.е. область опред.

Тогда (2) имеет вид: $f(x) = f(y)$ если

$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ — не удовл. усл. по опр. постоянн. возраст. ф. $y \Rightarrow x = y$ — одинаковы условия из-за возраст. ф. (2) ур.

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=y, \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Рассмотрим (1): пусть $a = \sqrt{x+6}$; $b = \sqrt{5-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = x+6+5-x-2\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} = 11-2\sqrt{x+6}(5-x). \quad (x+6)(5-x)=30-x-x^2$$

$$\Rightarrow (1): a-b+5+(a-b)^2-11=0$$

$$\text{Заметим } t = a-b \Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

$$t=2 \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow \sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} = 2$$

$$\sqrt{x+6} = 2 + \sqrt{5-x}$$

$$x+6 = 4 + 5-x + 4\sqrt{5-x} \Rightarrow 2x+2 = 4\sqrt{5-x} \Rightarrow x+1 = 2\sqrt{5-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1 = 20-4x \Rightarrow x^2+6x-19=0$$

$$\Rightarrow 2x-3 = 4\sqrt{5-x} \Rightarrow 4x^2-12x+9=20-4x \Rightarrow 4x^2-8x-11=0 \quad D = 64+4 \cdot 4 \cdot 11 = 16 \cdot 15$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \pm 4\sqrt{15}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}, \text{ единственный неотрицательный корень!}$$

$$t=-3 \Rightarrow \sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x} \Rightarrow x+6+3+6\sqrt{x+6} = 5-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x=1 + \frac{\sqrt{15}}{2}}_{2x-3 \geq 0}$$

$$t=-3 \Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3 \Rightarrow \sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+6+9+6\sqrt{x+6} = 5-x \quad 6\sqrt{x+6} = -2x-10$$
$$3\sqrt{x+6} = -x-5$$
$$\begin{cases} 9x+54 = x^2 + 25 + 10x \\ -x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 25 + 10x = 9x + 54 \\ x \geq -5 \end{cases} \leftarrow \text{не удовлетв. т.к. из ур(2) ограничение } x \geq 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x < -1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ x \geq 0 \\ x = y \end{cases} \text{ верно} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ y = -1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{2}; -1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \right)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

м.л. $\frac{3k^2}{8} \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right)$ и замечу из этих выражений
 расчеты под. гарм и расчет. физ-подприм. м.л.

$$\frac{3n^2}{2} \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right) a_3 = \frac{3n^2}{2} \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right)$$

77

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — n чисел, все различны.
 Тогда $\sum_{i=1}^n a_i^2 > \sum_{i=1}^n a_i$.
 Докажем это неравенство, заменив сумму на k членов.
 Рассмотрим k произвольных чисел a_1, a_2, \dots, a_k ,
 $\sum_{i=1}^k a_i^2 = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

$$2 \cdot \frac{n}{2} + n^2 - 2n + n^2 + 4X = \frac{n^2(n^2+4)}{2}$$

$$4X = \frac{n^4}{2} + \frac{n^2}{2} - 2n^2 + n \rightarrow X = \frac{n^4}{8} - \frac{3n^2}{8} + \frac{n}{4}$$

$$\text{Mengalih jadi pers - c - nob: } \frac{\frac{n^4}{8}}{2} - \frac{\frac{n^2}{8}}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{2} + \frac{\frac{n^2}{4}}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} =$$

$$= \frac{n^4}{l^2} - \frac{5n^2}{8} - \frac{n}{2} = \frac{100000}{l^2} - \frac{500}{8} - 50 = \frac{1250}{l^2}$$

$$\text{Amdotsum} \quad \frac{\cancel{n^2} \cancel{m}}{\cancel{n^2} \cancel{m}} \cdot \frac{n^2}{\cancel{1}} \cdot \frac{\cancel{(n^2 - 3)}}{\cancel{2}} = \frac{n^2(n^2 - 3)}{\cancel{n^2} \cancel{2}} = \frac{n^2(n^2 - 3)}{1}$$

рже $\frac{n^2}{4}$ бандажи нервного т. в сух. лек. залы.

~~42~~ 3 budramb us ocrabum ad t. Hc ch. u Hc
N-3-1 cob. smt

и \exists есть утверждение о напоминающее может

$$\text{Acero: } \frac{n}{2} + \frac{\frac{n^2}{4}}{y} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - n + \frac{n^2(n^2-y)}{8} = 25 + 50 - 10 + 50 \cdot 23 =$$

1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2° Группа: пары точек не лежат на одной диагонали, но симмр. относительно центра. Выбрав одну из $\frac{n^2}{4}$ т. в верхнем левом квадрате

6 $\frac{n}{2}$ слч. т. падают на диаг. что ^{верхний левый кв.} идет к группе 1°, в оставшемся $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ пример т. группе 2°.

Симмр. эти слч. точки получили $\frac{n}{4} - \frac{n}{2}$ уникальным расп.

Без поворота с подсчетами, каждая из которых, поверн. на 4 раза получалась еще 4 от данной раскраски без поворота. оставшееся пр. 2° подсчитывается подсчетом т. в

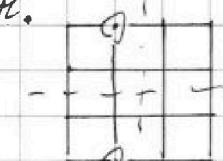
т.е. dato $n^2 - 2n$ ракр.-без-пов. из $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ расп-6 пов.

3° Группа - пары точек, симмр. относ. одной из осей симмр. проход. через центр кв. и парал. образ. из сторон.

Подумав сначала, верхн. лев. квадрат и

нижн. строит т. симмр.

Точки не должны лежать на одной диаг.



пример, пр. 3°

3.1° Точки леж. на ~~од~~ линии диаг. кв., таких т. $\frac{n}{2}$, однако построив т. симмр. относ. одной из осей получили 4 нов. расп. без-пов. из $\frac{n}{2}$, т.е. $2n$

3.2° Не лежат на л. диагонали \Rightarrow таких $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$, каждая из них можно отложить симмр. т. относ. кв. Остальные получим 2 пары расп. ~~без~~-с-пов., каждая из кот. есть 4 нов. расп. расп-без-пов. Но каждая расп. с-пов. встречается дважды, т.е. их всего $(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}) \cdot 2 \cdot 1 = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ и каждая дважды встречает 4 нов., т.е. $n^2 - 2n$ ракр.

Прикину обозначил пр. 3°: $n^2 - 2n$ ракр.-без-пов. из $\frac{n^2}{4}$ ракр-

~~без-пов.~~ оставшиеся, их кол-во $\frac{n^2}{4}$ + ~~бесцветные перв.~~ т. в $\frac{n^2}{4}$ кол-во

$(\frac{3n^2}{4} - 3) +$ бесцветные втор. т. в ~~две~~ по 2, т.к. они одинак.

Остальные избавимся от порядка выбора точек

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть нет подограта, тогда всего $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ способов покрасить два узла в белый, где $n=10$.

Пусть есть m одинак. раскрасок, попарно которые различны ~~даже если~~ образом с учетом подограта, т.е. если одна подограта переходит в другую, то эти ~~одинак~~ раскраски ~~не~~ считаются одинаковыми.

Пусть есть штук $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ - кол-во раскрасок, из которых можно получить стартную из m раскрасок, тогда $\sum_{i=1}^m a_i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, т.к. чтобы раскраска перешла в какуюто из m раскрасок с подограта т.к. так были получены раскраски с подограта.

Разобьем раскр. с подограторкой на группы с разн.

1° 2 точки (покрас. узлы) лежат на диагонали и симметр. относительно центра квадрата (т.к. квадр. 9×9 , всего 100 т.) и можно ли среди них на 2 такие раскр. получатся одной нар.кой, т.к. от центра, всего их может быть 5 различных.

на рис. 1 изображены все 5 таких раскрасок, рисун. в группе 1°, остальные раскр. этой группы получатся подограторкой, потому что всего 5.

Когда раскр. такой группы даст по 2 раскр.-без-подограта, причем уникальных, т.к. одна раскр. без подограта не может относиться к двум раскр.-без-подограторкам, т.к. эта группа даст 10 раскр.-без-п. и её размер $\frac{5}{2}$ раскр.-б.

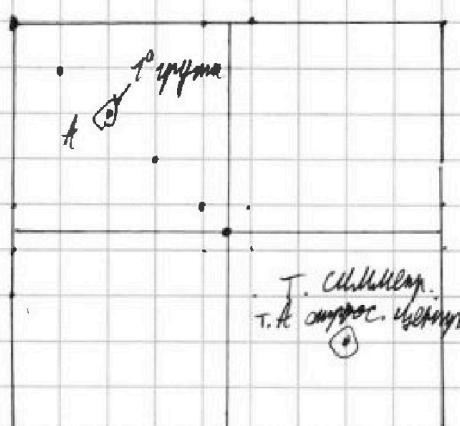


рис 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$5 \geq x > 0 \quad x+6 = 5 - y = 2\sqrt{(x+6)(y-4)} \quad a = \sqrt{x+6}; \quad b = \sqrt{5-y}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} \quad | \quad 3 = \sqrt{2} \\ d^2 \neq 6^2 = 36 \quad d = \sqrt{17-8^2}$$

$$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{30-x^2} + \sqrt{5-x} \quad (x \neq 0) = 11 + 2\sqrt{30-x^2-x}$$

$$\frac{\sqrt{k} - \sqrt{b}}{-b} = 2\sqrt{kt} + k + t$$

$$2ab = 5 + a - b$$

$$2ab - a + b - 5 = 0$$

$$a(2b - 1) + b - 5 = 0$$

~~$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$~~

$$(a-b)^2 = 11 - 2\sqrt{10-x-y^2}$$

$$d - b + 5 + (a-b)^2 - 74 = 0 \quad \sqrt{x+6} = \sqrt{5-x} + 2$$

$$\begin{cases} d - \beta = 2 \\ d - \beta = -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} -6 \\ x+6 = 5 - x + 4 + 4\sqrt{5} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sqrt{d} = \sqrt{5} + 2 \\ 2x = 3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & \quad 2x - 3 \\ & 4x^2 + 9 - 72x = 20 - 4x \quad 64 + 4 \cdot 4 \cdot 11 = 16(15) \\ & (m-n)^2 + 9(m-n) \quad x - 8 \pm \sqrt{175} \end{aligned}$$

$$A = m^2 - 2mh + h^2 + gm - gn = 13p^2 \quad p, q - \text{натуральные}$$

$$B = m^2 n - mn^2 + 3nm = 3n^2 \quad , \quad P, Q - \text{parameters}$$

$$B = m n (m - n + 3) = 73 p^2$$

$$B = m n (m - n + 3) = 73 p^2$$

$$A = (m - n)(m - n + 9) = 3 q^2 \neq 27$$

$$d^2 + 9d - 13p = 0 \quad A = (m-n)(m-n+9) = 3q^2 - 27 \quad d^2 + 3d - 3 = 0$$

$$P = g_1 + 4 \cdot g_3 P^2$$

$$mn(m-n+3) = 3\alpha^2 \quad n=1: \quad m(m+2) = 3\alpha^2$$

$$(m-n)(m-n+g) = 13p^2$$

$$m-n=p^2 \quad m-n=4$$

$m-n+g=73$ $m-n=4$
 $\beta = \sqrt{16+72} \cos \alpha =$

$$12 \cos \alpha = 16 \quad x \quad \cos \alpha = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \cos 70^\circ = 144 + 16 - 96 \cos 70^\circ$$

$$-194 + 16 - 72 = 144 + 4 = 4(34+1) \quad | \quad \alpha$$

~~$2\sqrt{62}$~~ ~~α~~ ~~a_2/a_1~~ ~~$2x$~~

2/82. ~~A3~~ 30-19278
A3 2218

~~144-241-0~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чертёж в окончательном виде: