



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

пусть 1-ый член прогрессии =  $a$ , разность между 2-ми соседними членами прогрессии  $b$ .

тогда:

$$\begin{cases} a + 2b = 3x + 3 \\ a + 4b = (x^2 + 2x)^2 \\ a + 8b = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a + 8b) - (a + 4b) = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 \\ 2(a + 4b) - (a + 2b) = 2((x^2 + 2x)^2 - (3x + 3)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 \\ 4b = 2((x^2 + 2x)^2 - (3x + 3)) \end{cases}$$

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 2(x^2 + 2x)^2 - (6x + 6) \Rightarrow$$

$$3(x^2 + 2x)^2 - 3x^2 - (6x + 6) = 0 \quad | :3$$

$$(x^2 + 2x)^2 - x^2 - (2x + 2) = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$  - одно из решений  
 $\Rightarrow$  вынесем  $(x+1)$  за скобки (сл. произведение)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 продолжение

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$  одно из решений этого уравнения

$$x^3(x+1) + (x+1) \cdot 3x^2 - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

Это мы хотим разложить на множители  $x = -1$  одно из решений уравнения  $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$  вынесем  $(x+1)$  за скобки

$$(x+1) \cdot (x^2(x+1) + 2x(x+1) - 2(x+1)) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

решим это уравнение  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$(x+1)^2(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3}) = 0$$

решая это  $x$  в которых представленные скобки "превращаются" в 0:

$$x = -1$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ответ:  $x = -1, x = -1 \pm \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\max y - 3x$$

Построим график у-ий. Для этого мы сначала построим графически  $x-3y=0$  и  $3x-y=0$  а затем построим графики для возможных разрывов модулей

модулей соединив области зависимости от себя и заменим нерав-е (предварительно отметив области

$$x-3y \geq 0, 3x-y \geq 0, x-3y \leq 0 \text{ и } 3x-y \leq 0$$

$$x-3y-3 \leq 0 \quad y \geq \frac{x}{3} - 1$$

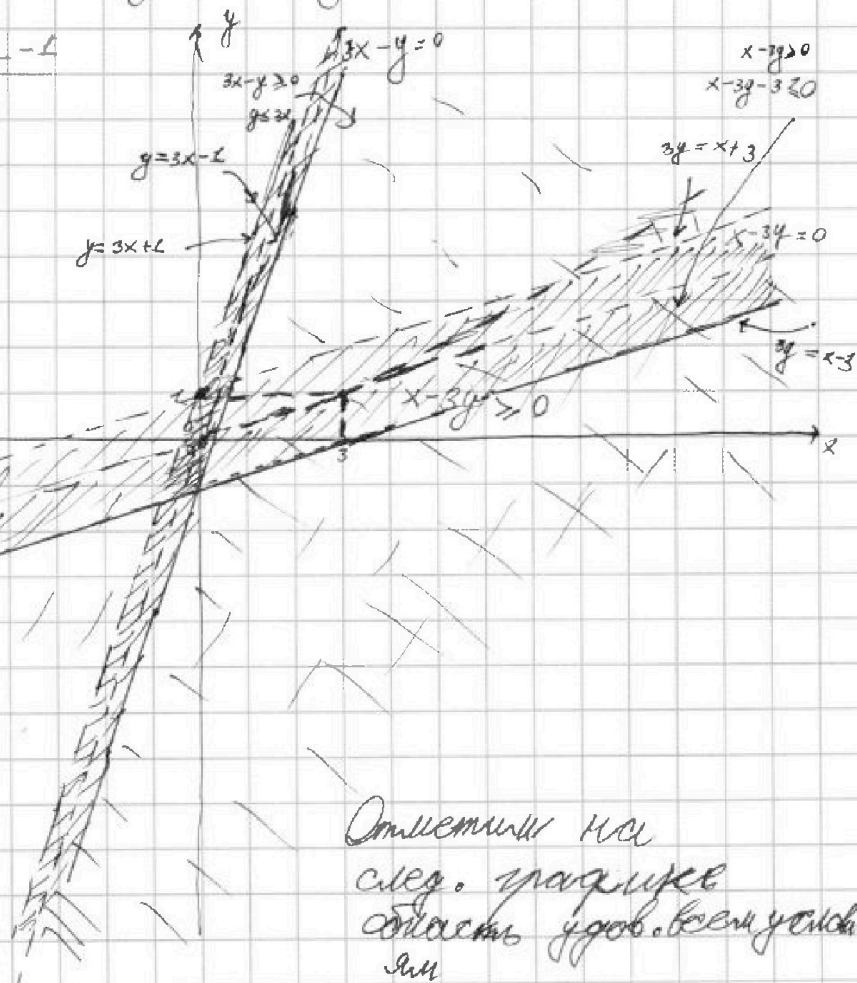
$$3y-x \leq 3$$

$$y \leq \frac{x+1}{3}$$

$$x-3y \leq 0$$

$$3x-y \leq 1 \quad 3x-y \geq 0$$

$$y \geq \frac{3x-1}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

неч - нечетное  
чет - четное

Пусть  $m$  чет и  $n$  нечетное или наоборот.

тогда  $A = 4 + 4 + 4m + 4 - 2m - 4n = \text{неч.}$

если  $m$  чет и  $n$  чет то  $A$  чет

если  $m$  неч и  $n$  неч то  $A = 4m + 4n + 4 - 4m - 4n = \text{чет}$

$\rightarrow A$  четное  $A = 13p^2$  или  $45q^2$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn \equiv m^2n + mn^2 \pmod{3}$$

Если одно из чисел  $m$  или  $n \equiv 0 \pmod{3}$  (если

оба то  $A \equiv 0 \pmod{3}$  и  $B \equiv 0 \pmod{3}$ ) то  ~~$B \equiv 0 \pmod{3}$~~  и  $A \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow A$  не  $13p^2$

но  $A$  чет ~~то~~  $A = 52$

~~$B$  не может быть чет. иначе  $p=q=2 \Rightarrow m, n, p, q$~~

то:  $A = (m+n)(m+n-3) = (m+n)^2 - 3(m+n)$

возможная  
Если два слагаемых

$$A = 13p^2 \quad \text{и} \quad A = 45q^2$$

1)  $A = 13p^2 \quad m+n=k$

$13p^2 = k(k-3) \rightarrow k, p \in \mathbb{N}$  м.к.р  
полное  $\downarrow$  но  $A \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow p \equiv 2 \pmod{4}$

Шаг  $\Rightarrow$   $\begin{cases} k=13 \Rightarrow k-3=p^2=4 \checkmark \\ k=p \times \quad k-3 < 0 \times \\ k=13p \quad k-3=12 \times \\ k=p^2 \quad k-3 < 0 \times \end{cases}$

2)  $A = 45q^2 \quad A \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow q \equiv 2 \pmod{4}$   
 $k(k-3) = 4 \cdot 45 \quad k^2 - 3k - 300 = 0$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{1281}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ИЗБІ  $\notin \mathbb{Z}$  ~~и~~  $k = m + n$ ,  $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$   
противоречие  $\Rightarrow mn = 13$

$$D = 45q^2$$

$$mn \underbrace{(mn-3)}_{10} = 45q^2 \Rightarrow 45q^2 \text{ дел} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$$

$$mn = \frac{45}{2} q^2 \quad m, n, q$$

$$\Rightarrow mn = 30 \quad mn - 10 = 30 \Rightarrow mn = 30$$

рассм кв. ур-ие  $x^2 - \cancel{13} - 13x + 30 = 0$   
его решение и будет есть возможная пара  $m, n$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$(m, n) = 10, 3$$

Ответ: 10, 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\angle Z \in (ZM) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi M \parallel AX \Rightarrow \angle XAC = \angle MYC$$

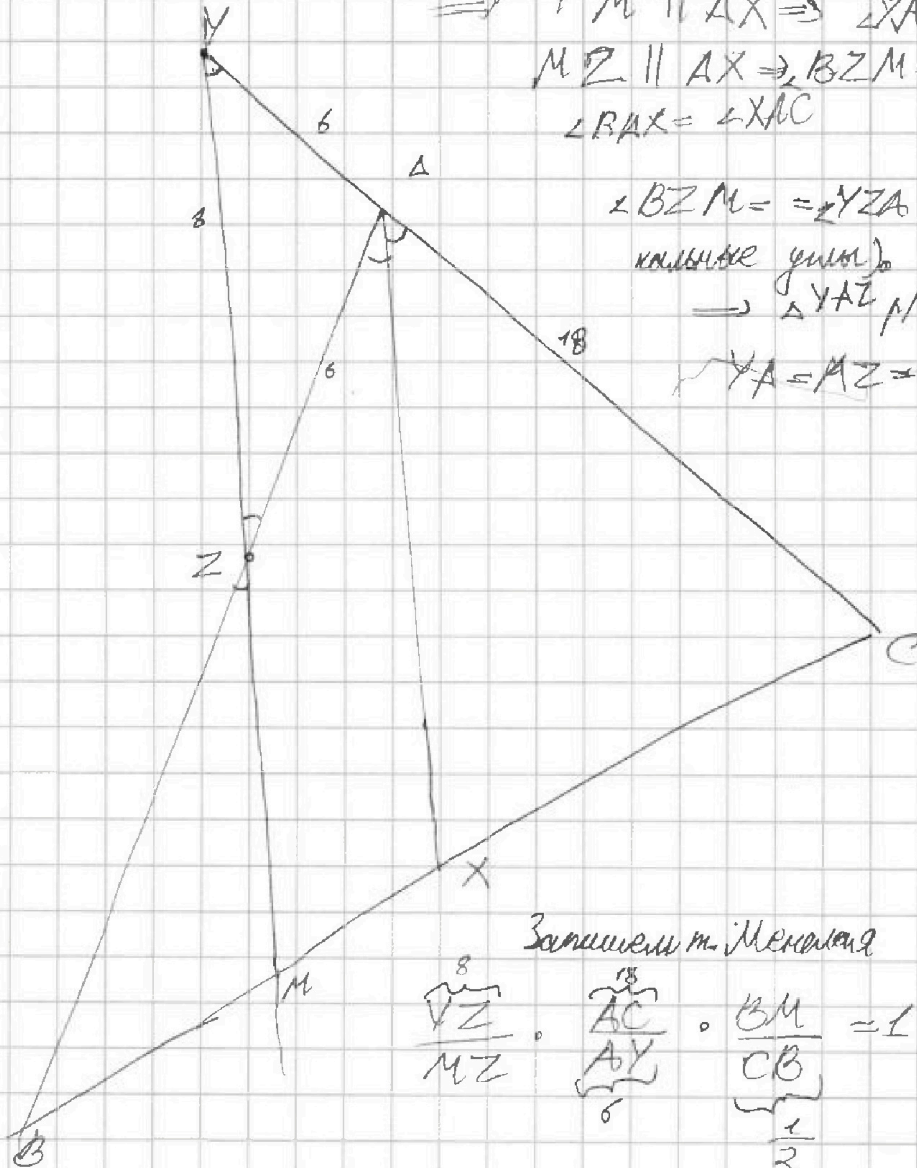
$$MZ \parallel AX \Rightarrow \angle BZM = \angle BAX$$

$$\angle BAX = \angle XAC$$

$$\angle BZM = \angle YZA \text{ (вертикальные углы)}$$

$$\rightarrow \triangle YAZ \sim \triangle BZM$$

$$YA = AZ = 6$$



Запишем т. Менелая

$$\frac{AZ}{MZ} \cdot \frac{AC}{AY} \cdot \frac{BM}{CB} = 1 \quad MZ = 12$$

$$\frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{AY}{CY} = 1 \quad BZ = \frac{2}{3}$$

Запишем т. косинусов  $\triangle ZAY$

$$= \angle BZM$$

$$36 = 36 + 36 - 36 \cos \alpha$$

см. угол  $\alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{т.к. } \alpha = \angle YZA =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ продолжение

Затемнем м. кос. в  $\triangle BZM$

$$BM^2 = BZ^2 + MZ^2 - 2 \cdot BZ \cdot MZ \cdot \cos \alpha$$

$\uparrow$   
 $\frac{BC^2}{4}$

$$\frac{BC^2}{4} = \frac{4}{9} + 144 - 16 \cos \alpha$$

$$BC^2 = \frac{16 + 9 \cdot 144 \cdot 9 - 16 \cdot 6}{9} = \frac{1216}{9}$$

$$BC = \frac{8}{3} \sqrt{19}$$

$$\text{Ответ: } BC = \frac{8}{3} \sqrt{19}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



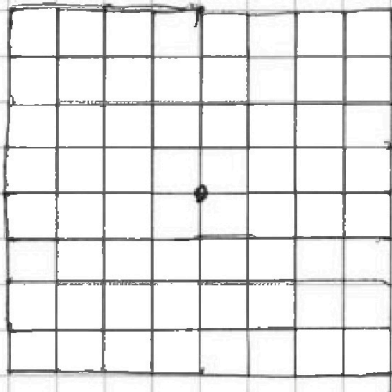
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

узлов  $9 \times 9 = 81$



Сначала подсчитаем кол-во способов выбрать два узла

как будто совместимые поворотом раскраски различны. Но среди двух выбранных узлов не должны быть центрально симметричными или переводными поворотом на 90 и не должны содержать центральный узел.

по принципу комбинаторного замка кол-во таких пар  $C_2^1$

равно:

$$C_2^1 = C_2^1 = \frac{\text{кол-во узлов} \cdot \text{кол-во узлов без центрального узла}}{2} = \frac{81 \cdot (81 - 1)}{2} = 40 \cdot 40 = 3120$$

наименее интересный кол-во сочетаний

Среди  $C_2^1$  подобных способов выбрать клетки

существует 4 совместимых поворота  $\Rightarrow$  кол-во соотв им раскрасок  $C_2 = \frac{C_2^1}{4} = 480$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 49 \\ \hline 40 \\ 3120 \end{array}$$

Подсчитаем кол-во способов выбрать

$C_2^2$  два узла: один из них будет центральным  $C_2^2 = 1 \cdot (81 - 1) = 80$   $C_2^2$  - кол-во соотв комбинаций

$$\begin{array}{r} 2 \\ 44 \\ \hline 308 \end{array}$$

итого  $C_2^1$  раскрасок =  $40 \cdot C_2^1$  см. выше.  $C_2 = 40$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6  
рассчитаем  $C_3'$  - кол-во способов выбрать два узла: они будут смежными  
но симметричны друг другу относительно ц. узла. ~~и~~  
каждая клетка задается однозначно

$$C_3' = \frac{(81-1) \cdot 1}{2} = 40$$

↑ среди них не может быть ц. узла  
↑ кол-во сочетаний

$C_3$  - кол-во раскрасок ~~отв~~ соотв.  $C_3'$ :  $C_3 = \frac{C_3'}{2}$

т. к. один из поворотов ~~на 180°~~ мы учли при расчёте  
кол-ва сочетаний поделив элемент на 2

и остался 1 поворот дающий независимую раскраску

$$C_3 = 20$$

$$C_2 = ~~80~~ 20$$

$$C_1 = 780$$

$C$  - ~~кол-во комбинаций~~ <sup>кол-во</sup> способов

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = ~~80~~ 820$$

Ответ: 820.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

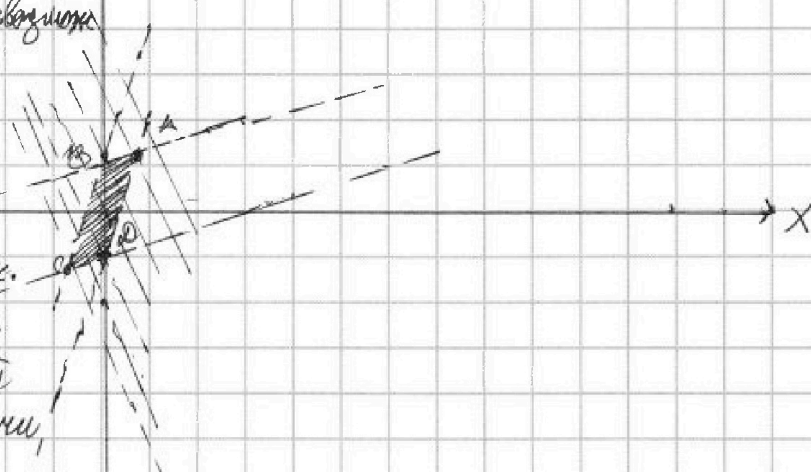
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 продолжение

Пусть  $4y + 8x = k$   $k \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{k}{4} - 2x$$

Нарисуем на графике множество прямых со всевозможными  $k$ . Заметим, что при каком-то  $k$  прямая пересекает область только



в одной точке т.к. эта прямая не параллельна. Не одной из сторон образующей области обложится у данной прямой.

на коэф. угла наклона прямой меньше чем у любой из сторон

$\Rightarrow$  прямая проходит через т.  $P$  см. рис.

$$\begin{cases} y = \frac{k}{4} - 2x \\ y = 3x - 1 \\ y = \frac{5}{3} + 1 \end{cases}$$

$$3x - 1 = \frac{5}{3} + 1$$

$$\frac{8}{3}x = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow k = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right)4 = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

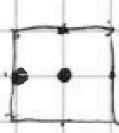
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$f - (8 - \frac{1x}{18})$$

$$f \frac{18+x}{18} - 8$$



$$T = \frac{10}{1x} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{28}$$

$$\frac{AX}{XC}$$

$$\frac{1x}{12}$$

$$\frac{BC \cdot x}{18}$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{33}{144} \cdot 9 = 26.25$$

$$+ 12.96$$

$$+ 13.12$$

$$- 36$$

$$- 12.96$$

$$- 13.12$$

$$98$$

$$\frac{16}{76}$$

$$\frac{AB}{XC}$$

$$\frac{18}{18+18}$$

$$\frac{BC}{2}$$

$$\frac{16}{98}$$

$$\left(\frac{AZ}{ZX}\right) \cdot \left(\frac{AY}{AC}\right) \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$\frac{16}{142}$$

$$\frac{a(18a-b)}{s+b+s+r+h+s}$$

$$k^2 - 9k - 52 = 0$$

$$\frac{9 \pm \sqrt{81+208}}{2}$$

$$\frac{AC}{BC-XC} = \frac{18}{AB}$$

$$\frac{YZ}{MZ} \cdot \frac{AC}{AY} \cdot \frac{BM}{CB} = 1$$

$$\frac{8}{MC} \cdot \frac{18}{AY} = 2$$

$$\frac{18 \cdot 8 \cdot 18}{AY} = BC$$

$$AY = \frac{8 \cdot 18}{BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9	1	2	3	4	9
	1	0	1	0	0

н н нн

ЧЕРНОВИК

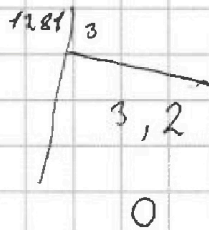
$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n \equiv 1$$

$4n \times 1$   
 $mn \times 2$   
 $11 \times 1$

0 1 2 3 4 5  
0 1 1 1 1 0

$$m^2 + mn^2 - 3mn$$

нч ч  
нн н



-2

-3

$$m^2 n + \dots$$

$$mn(m+n-3) = 759^2$$

15 20  
12 25

$$mn(m+n-3)$$

- 3✓
- 1✓
- 2✓
- 4✓
- 6✓

5
5
3
2
2

$$k^2 - 9k - 300 = 0$$

0 1 2 3  
0 1 1 0

$$A = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = (mn)(m+n-3)$$

$$k = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1200}}{2}$$

1 + 1

$$k = 13$$

1

0

$m+n$

$m^2 n + mn^2$

1, 1

2, 2

$$2+2 = 1$$

$$1+2 = 1$$



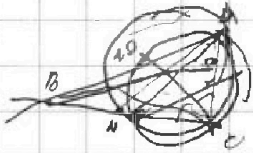
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

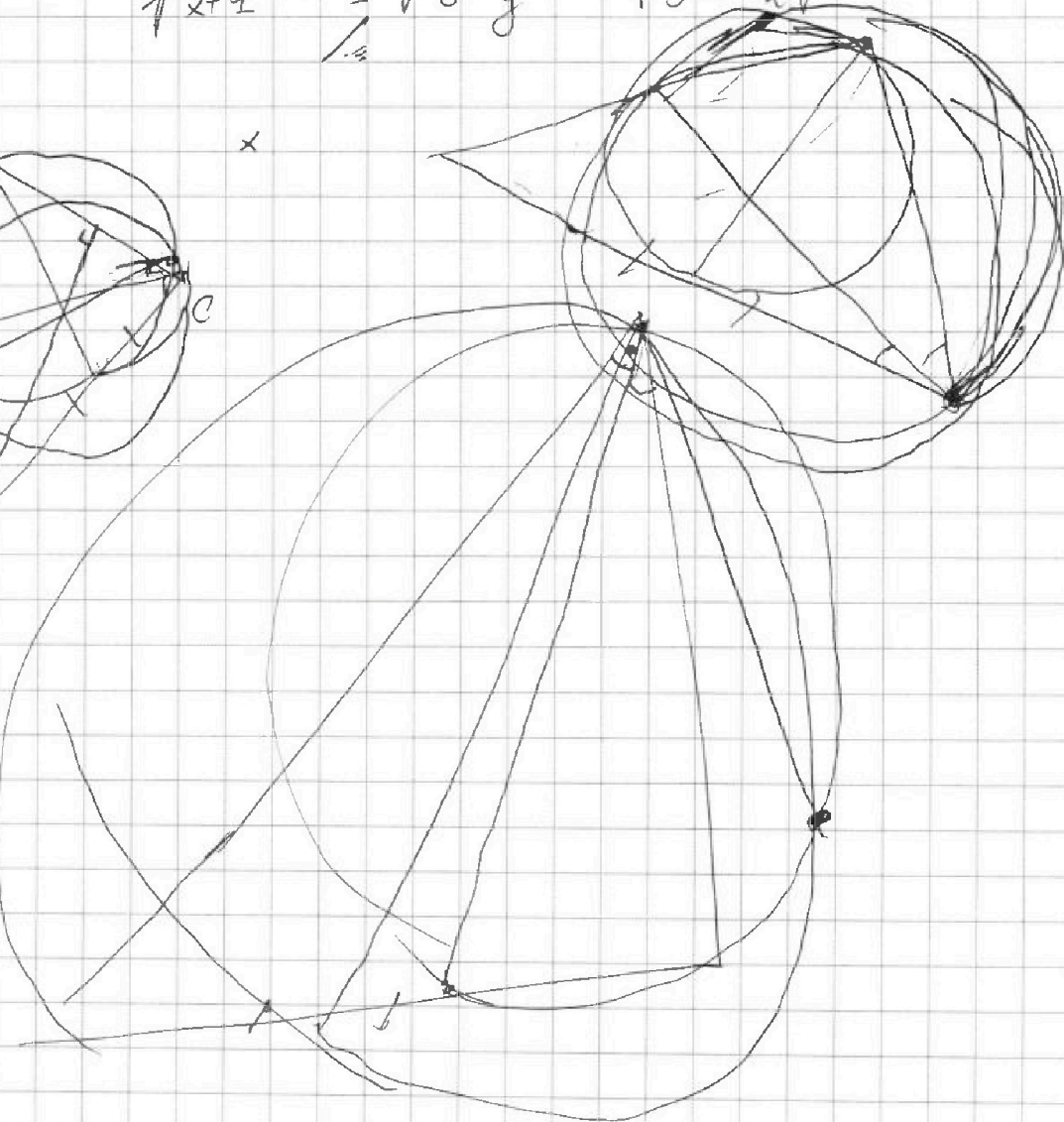
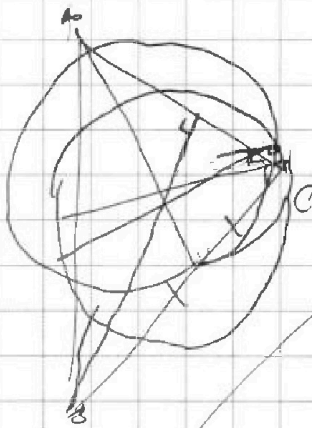
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 27$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

