



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



- [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
- [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
- [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$
- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} a_5 = 6k + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 4d = 6k + 18 \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \\ a_6 + 10d = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6d = -3x^2 - 6x - 18 \\ a_0 = 6k + 18 - 4d \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d = -x^2 - 2x - 6 \\ a_6 = 6k + 18 + 2x^2 + 4x + 12 \\ 2x^2 + 10x + 30 - 36 - 6x - 18 = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$(x-2)^2(x-1)(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\text{При } x=1: \quad \begin{cases} a_5 = 24 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 36 \\ d = -3 \end{cases} \Rightarrow a_7 = 36 - 18 = 18 \neq 9 \text{ - неверно}$$

$$\text{При } x=2: \quad \begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 58 \\ d = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \text{ - верно} \\ a_{11} = -12 \end{cases}$$

$$\text{При } x=3: \quad \begin{cases} a_5 = 36 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = -27 \\ 2d = -18 \end{cases} \text{ - неверно}$$

Ответ 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

52

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 4y-3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -8 \leq 4x-3y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -6 \leq 4x-3y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -48 \leq 2x \leq 48 \\ -14 \leq x+y \leq 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -98 \leq 7x+7y \leq 98 \\ -48 \leq 2x \leq 48 \end{cases}$$

$$-48 \leq 14x+14y \leq 148$$

$$-146 \leq 14x+14y \leq 146 \Rightarrow \min(14x+14y) = -146$$

Ответ: -146.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2 n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ 4mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ 4mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$m \cdot n \neq 5 \Rightarrow m-n \in \{1, 3\} / 13p^2$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=p^2 \\ m-n+9=13 \end{cases}$$

$\begin{cases} m-n=1 \\ p^2=\frac{12}{10} \notin \mathbb{N} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=13 \\ 22=p^2 \text{ неквадрат} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p^2=4 \\ m-n=p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} p=2 \\ m-n=4 \\ 7mn=3q^2 \end{cases} \quad \text{решение}$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ 7mn=3 \cdot 7 \cdot 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4+n \\ 4+n \cdot 21 = 3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ 4+n=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=-2 \notin \mathbb{N} \\ n=7 \\ m=4+n \end{cases}$$

$$m-n+5 > m-n \Rightarrow m-n \in \{1, 3\}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=3q^2 \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases}$$

решение

$$\begin{cases} q^2 = \frac{10}{3} \cdot \text{неквадрат} \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m-n=3 \\ q=2 \\ 6mn=13p^2 ; 6=3 \cdot p^2 \end{cases} \quad 6-\text{кратное} \Rightarrow p \in \mathbb{O}$$

Ошибки (7/3)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



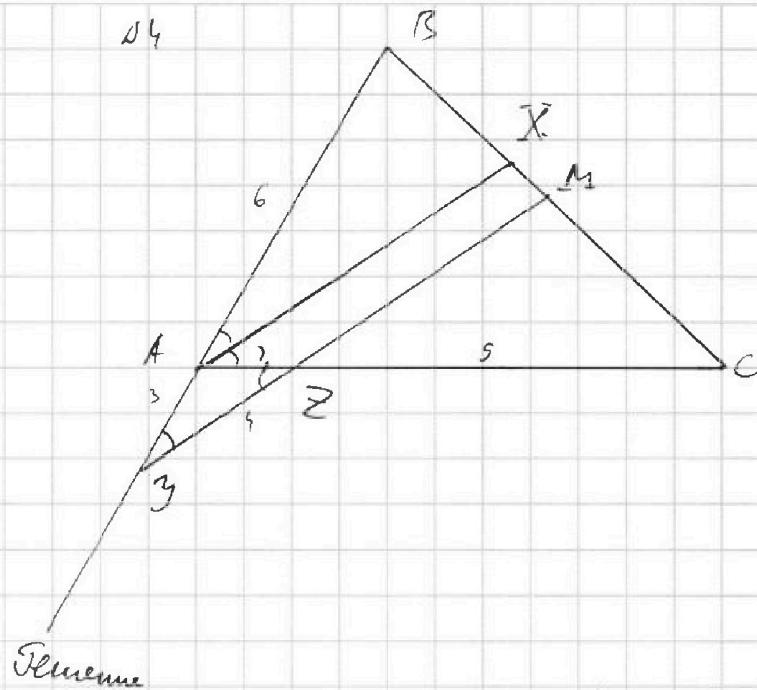
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} AC &= 12 \\ AZ &= 3 \\ BY &= 4 \\ \hline BC - ? \end{aligned}$$

№ 1



Решение

1) $\angle XA Z = \angle 3 \neq \angle 4$ - нарушение условия при $AX \parallel BY$ и $AX \neq BY$

2) $\angle BAX = \angle BZY$ - условие при $AX \parallel BY$ и $AX \neq BY$

3) $\angle BAX = \angle AYC$ $\angle BZA \stackrel{?}{=} \angle 3 \Rightarrow \angle BZA = \angle AYC \Rightarrow \angle AYC = \angle AYB = \angle AYB - \text{факт}$ $\Rightarrow AY = AY = 3$

4) $AC = AZ + ZC \Rightarrow ZC = 12 - 3 = 9$

5) $\angle AXC$ $\angle 2M \parallel AX$ $\left| \begin{array}{l} \text{доказательство} \\ \text{однозначно} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{CA}{CX} = \frac{CZ}{CA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \left| \begin{array}{l} \text{доказательство} \\ \text{однозначно} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{2}{3}$

6) $\angle BZA$ $\angle BAX \parallel BY$ $\left| \begin{array}{l} \text{доказательство} \\ \text{однозначно} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{BA}{BZ} = \frac{BX}{BA} = \frac{2}{3} \Rightarrow BZ = \frac{3}{2} BA \Rightarrow BA = 2A3 = 6$

7) Используя $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle YAZ = 180^\circ - \alpha$

8) по теореме косинусов в $\triangle AYZ$

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos \angle YAZ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порта QR-кода недопустима!

$$16 = 5 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$16 = 18 + 18 \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$18 \cos \alpha = -2$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

9) (По теореме косинусов в $\triangle BAC$)

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \cdot BA \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = 180 - 144 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC^2 = 196$$

$$BC = \pm 14 \quad (\Rightarrow) \quad BC = 14$$

Ответ: 14

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases} \quad (1)$$

(1) Извлек $x=0$, $y=0$ (могут быть сделаны, например, $x \geq 0$ и $y \geq 0$)

$$4a^{16} + a^4 + 5a = 4b^{16} + b^4 + 5b$$

$$4(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b) + 5(a - b) = 0$$

$$(a - b) \underbrace{(4(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b) + 5(a + b))}_{A} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x^8 + x^4 + 5x = 0 \\ a^8 + b^8 = 0 \\ a^4 + b^4 = 0 \\ a^2 + b^2 = 0 \\ a + b = 0 \\ 5x = 0 \end{array} \right| \Rightarrow A = 0 \quad | \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \quad x = y$$

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \end{cases} \quad (2)$$

(2) $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$

Извлек $c = \sqrt{x+6}$, $d = \sqrt{5-y}$, можем напр. $30 - x - y^2 = (x+6) + (5-y)$

$$\begin{cases} c - d + 5 = 2cd \\ cd - c^2 - d^2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 + d^2 - 2cd = 4(cd)^2 + 25 - 10cd \\ c^2 + d^2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 = 4(cd)^2 + 25 - 10cd \\ c^2 + d^2 = 11 \end{cases} \quad (3)$$

(3) $4(cd)^2 - 10cd + 14 = 0$
 $4(cd)^2 - 9cd + 7 = 0$
 $2cd = (cd - 1)(2cd - 7) = 0$
 $\begin{cases} cd = 1 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 11 \\ cd = 1 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad \begin{cases} c^2 + d^2 = 11 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2 - 2cd = 11 \\ cd = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2 - 2cd = 11 \\ cd = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2 = 13 \\ cd = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2 = 13 \\ cd = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c > 0 \\ d > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d = \sqrt{13} \\ cd = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d = 3\sqrt{2} \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \sqrt{13} - d \\ d\sqrt{13} - d^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3\sqrt{2} - d \\ 6\sqrt{2}d - 2d^2 = 7 \end{cases}$$

$$(4) \quad d^2 - 6\sqrt{2}d + 1 = 0$$

$$(5) \quad 2d^2 - 6\sqrt{2}d + 7 = 0$$

$$D = 13 - 4 = 9$$

$$D = 72 - 56 = 16$$

$$d = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{2}$$

$$d = \frac{6\sqrt{2} \pm 4}{4}$$

$$\checkmark d \neq$$

$$d = \frac{3\sqrt{2} \pm 2}{2}$$

$$\begin{cases} c = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \\ d = \frac{\sqrt{13} + 3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \\ d = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X+6 = \frac{1}{4}(11 - 6\sqrt{2}) \\ 5-X = \frac{1}{4}(11 + 6\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X+6 = \frac{1}{4}(21 + 6\sqrt{2}) \\ 5-X = \frac{1}{4}(21 - 6\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X+6 = \frac{1}{4}(22 - 12\sqrt{2}) \\ 5-X = \frac{1}{4}(22 + 12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X+6 = \frac{1}{4}(22 + 12\sqrt{2}) \\ 5-X = \frac{1}{4}(22 - 12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4}(-7 - 6\sqrt{2}) \\ X = \frac{1}{4}(-1 - 6\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4}(-7 + 6\sqrt{2}) \\ X = \frac{1}{4}(-1 + 6\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4}(-2 + 12\sqrt{2}) \\ X = \frac{1}{4}(-2 - 12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4}(-2 + 12\sqrt{2}) \\ X = \frac{1}{4}(-2 - 12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$x < 0$ - неверно

$-3 + 6\sqrt{2} \neq -1 + 6\sqrt{2}$ - неверно

$X < 0$ - неверно

$X > 0$ - верно

$$X = \frac{-2 + 12\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2} \\ Y = \frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + 6\sqrt{2}}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

III. Квадрат 9×9 , что у него всего 100 клеток покрасил
в чёрный. Способов покрасить два угла в белый всего $100 \cdot 99$. Ит.к.
при первом вращении на $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ мы получаем ту же раскраску,
что все красили или поменяли но ч роз., то есть всего
 $\frac{100 \cdot 99}{4} = 25 \cdot 99 = 2475$ разм. способ. Если же вращать на
угол 120° или 30° , то квадрат
не перейдет сам в себя.

Ответ: 2475.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

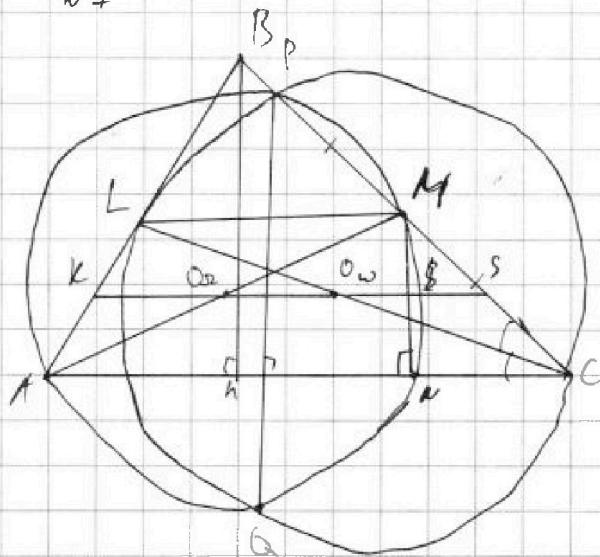
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

$$\begin{aligned}AB &= 26 \\AH &= 20 \\BA \cdot BC &\text{ common to } \triangle ABC\end{aligned}$$



Доказать

- 1) $O_L \perp O_w$ - центры окружностей \mathcal{L} и ω соотв.
- 2) $AM \parallel LC$ - доказательство $\Rightarrow O_L \perp O_w$ - серединник $AM \parallel LC$ соотв.
- 3) $P \in \mathcal{L} \cap \omega$ $\left| \begin{array}{l} PQ - \text{радикальная ось } \mathcal{L} \text{ и } \omega \\ O_L \perp O_w - \text{минд центров} \end{array} \right. \Rightarrow PQ \perp O_L \perp O_w$
- 4) $PQ \parallel BH$ $\left| \begin{array}{l} BH \perp AC \\ \Rightarrow PQ \perp AC \end{array} \right.$
- 5) $PQ \perp AC$ (из 4) $\left| \begin{array}{l} O_L \perp O_w \parallel AC \\ PQ \perp O_L \perp O_w \text{ (из 3)} \end{array} \right.$
- 6) $O_L \perp O_w \parallel AC$ $\left| \begin{array}{l} O_L \perp O_w - \text{одинаковы углы } \angle ALC = \angle ASB = \angle SC \\ AO_L = O_L H \end{array} \right.$ из 6
- 7) $\angle O_w = O_w C \left| \begin{array}{l} O_w S - \text{одинаковы углы } \angle KSC = \angle KSC \\ AS = SC \end{array} \right.$ $\Rightarrow SO_w \parallel (A \perp) \Rightarrow O_w O_L \parallel LH$
- 8) $O_L \perp O_w \parallel AC$ (из 7) $\left| \begin{array}{l} \angle K \parallel AC \\ BM = MC \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \angle K - \text{одинаковы углы } \angle ABC \\ \Rightarrow \angle BLM = \angle LAC \Rightarrow CL - \text{медиана} \end{array} \right.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9) CL-медиана (h_1 , 8) | h_1 .
CL-бисс. ср. (кош.) $\Rightarrow \triangle ABC$ -равнобедр. $\stackrel{\text{по} \sim}{\Rightarrow} AC = BC$

10) АН-диагональ $\angle \Rightarrow \angle ANH = 90^\circ \Rightarrow MN \parallel BH$ / Т. паралл.
 $BH = NC \Rightarrow MN = NC$

11) Медиан $MN = NC = X \Rightarrow AH = 20 - x \Rightarrow AC = 20 + x = BC$

12) ПО + Пифагора в $\triangle ABH$ ($\angle AHB = 90^\circ$)

$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

13) ПО + Пифагора в $\triangle BHC$ ($\angle BHC = 90^\circ$)

$$BH^2 + CH^2 = BC^2$$

14) № 7 (12) 4.4. В)

$$AB^2 - AH^2 = BC^2 - CH^2$$

зап

$$676 - (20-x)^2 \geq (20+x)^2 - 4x^2$$

$$676 = 400 + x^2 - 40x + 400 + x^2 + 40x - 4x^2$$

$$676 = 800 - 2x^2$$

$$2x^2 = 124 \Rightarrow x^2 = 62 \Rightarrow x = \sqrt{62} \Rightarrow AC = BC = 20 + x = 20 + \sqrt{62}$$

Ответ: $AC = BC = 20 + \sqrt{62}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} A &= m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n \\ B &= m^2n - m^2 + 3mn \end{aligned}$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m+n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn(m-n+3) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$m-n = 13$$

$$m-n+9 = p^2$$

$$p^2 - 9 = 13$$

$$p^2 = 22$$

$$(m-n) = p^2$$

$$m-n+9 = 13$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$m-n = 13$$

$$\begin{cases} mn(m-n) = 13 \\ mn \cdot 6 = 3q^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{3}$$

$$13p^2$$

$$3q^2$$

$$(7, 3) \rightarrow \begin{cases} 6 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2 \\ 7 \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \end{cases}$$

$$m-n$$

$$\begin{matrix} m-n = 13 \\ m-n = p^2 \end{matrix}$$

$$m-n = p$$

$$m-n = p$$

$$p^2 - 9 = 13$$

$$p^2 = 22$$

$$(m-n) = p^2$$

$$m-n+9 = 13$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$m-n = 13$$

$$\begin{cases} mn(m-n) = 13 \\ mn \cdot 6 = 3q^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{4}$$

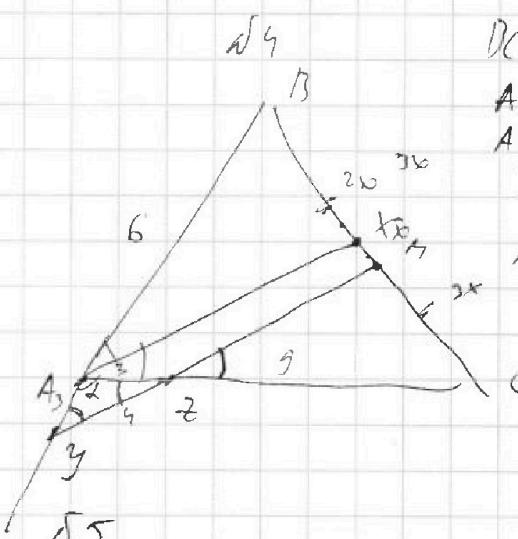
$$DC = ?$$

$$AC = 12$$

$$AZ = 3$$

$$ZC = 4$$

$$AC = AZ = 3$$



$$\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{6} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt{6} = 4y^4 + y + 5\sqrt{x}$$

$$4x^4 - 4y^4 = y - x + 5\sqrt{6} - 5\sqrt{x}$$

$$(4x^4 - 4y^4) + (y - x) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(k+6)(5-y) = 20 - 6y + 5x - xy$$

$$20 - kx - y^2 = 20 - 6y + 5x - ky + Ax$$

$$A = -y^2 + 6y - 6x + xy =$$

$$= -y(y-x) + 6(y-x) =$$

$$= (y-x)(6-y)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_5 &= 6x + 18 \\ a_7 &= (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} &= (-3x^2) \end{aligned}$$

x^7

$$\left\{ \begin{array}{l} a_5 = a_0 + 4d \\ a_7 = a_0 + 6d \\ a_{11} = a_0 + 10d \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 - 6x - 18 \\ 4d = -3x^2 - x^4 - 16x^2 + 8x^3 \\ 6d = -3x^2 - 6x - 18 \end{array} \right.$$

$$2d = -x^2 - 2x - 6$$

$$a_0 = a_5 - 4d = 6x + 18 + 2x^2 + 4x^3 + 12 = 2x^2 + 10x + 30$$

$$2x^2 + 10x + 30 - 3x^2 - 6x - 18 = (x^2 - 4x)^2$$

$$x^2 - 4x + 12 = x^4 + 16x^2 - 8x^3$$

$$24 = -12 + a_0$$

$$5 = -18 + a_0$$

$$-3 =$$

$$x = 21$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 30 \\ 6 \\ -12 \end{array} \right. \quad 2d = -4 \quad 30 = a_0 - 2x \quad (x-2)^2 (x-1)(x-3) = 0$$

$$x^4 + 16x^2 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = 2, \quad 16 - 64 + 64 - 8 - 12 - 20 - 20 = 0$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)(x-2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x = 3,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 36 \\ 9 \\ -27 \end{array} \right. \quad 2d = -27 \quad 2d = -18$$

12.

нужна $4x + 7y = ?$

$$14x + 7y = -162$$

$$2x + y =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 4x - 3y &\leq 6 \\ 3x - 4y &\leq 8 \\ 4x - 3y &\geq -6 \\ 3x - 4y &\geq -8 \end{aligned}$$

$$14x - 12y \leq 18$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -14 \leq x + y \leq 14 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -18 \leq 4x + 3y \leq 56 \\ -26 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -64 \leq 7x \leq 64 \\ -99 \leq 2x + 7y \leq 93 \\ 162 \leq 14x + 7y \leq 162 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x-6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$\begin{aligned} & (\cancel{5x-6} + \cancel{5-y} + \cancel{25} + 10\sqrt{x-6} - 10\sqrt{y}) / \cancel{2\sqrt{30-x-y^2}} = \\ & = 4(30-x-y) = \cancel{96} - \cancel{4x} - \cancel{4y}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x-6)(5-y)(y-x)(6-y) = (6y-y^2-6x+xy)(5x-xy-30+6y) = \\ & = (30xy-6xy^2) - (80y+36y^2) - 5xy^2 + xy^3 + 30y^2 = 6y^3 - 30x^2 + 6x^2y - 30x \\ & - 36xy + 5x^2y - x^2y^2 - 30xy + 6xy^2 = \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6 \\ 5-y \geq 0 \quad y \leq 5 \quad | \quad y \in \{0, 5\} \rightarrow y^2 \in \{0, 25\} \\ y \geq 0 \quad y \geq 0 \\ x \geq 0 \quad x \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \quad x+y^2 \leq 30 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in [0, 30] \\ (x+6)(5-x) = 30 - 6x + 5x^2 = \\ = 30 - x^2 \end{array}$$

$$x=a^4 \quad y=b^4$$

$$4(a^8 + a^4 + 5a) = 4b^{16} + b^4 + 78$$

$$4(a^8 + a^4)(a^4 + b^4) + (b^4 - a^4)(a^4 + b^4) + 7(a - b)^4$$

$$4(a^8 + a^4)(a^4 + b^4)/a^4b^4(a^4 + b^4)(a + b) + (a^4 + b^4)(a - b)(a + b) + 5(a - b)^4 = 0$$

$$(a - b)(4(a^8 + a^4)(a^4 + b^4) + (a^4 + b^4)(a + b) + 5(a - b)^4) = 0$$

$$a = b \Rightarrow x = y$$

✓✓

