



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



- [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
- [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
  - [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
  - [4 балла] Решите систему уравнений
- $$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$
- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
  - [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

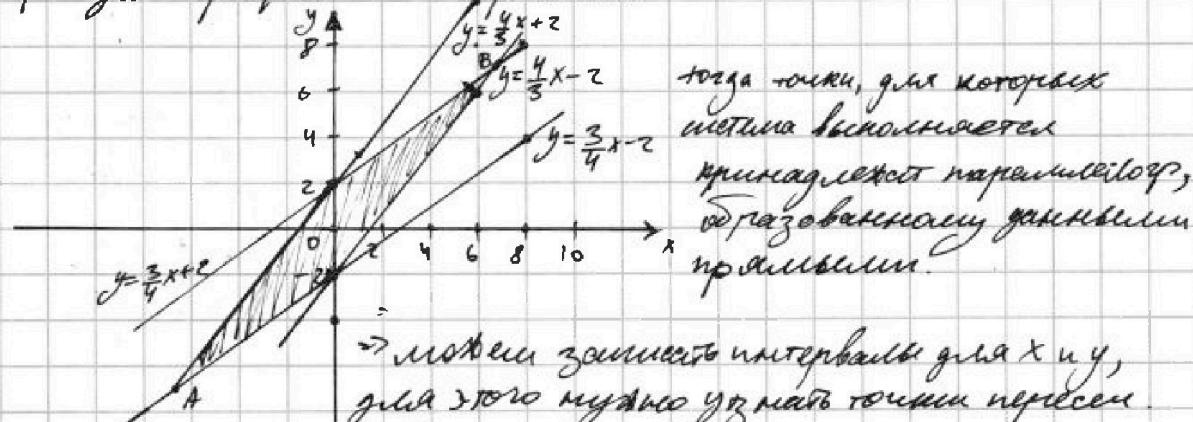
Задача 2.

Рассмотрим в каких интервалах лежат  $x$  и  $y$ , чтобы условие выполнялось.

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 3y - 4x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{4}{3}x - 2 \\ y \leq \frac{4}{3}x + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 8 \\ 4y - 3x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{3}{4}x - 2 \\ y \leq \frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  нарисуем график этих неравенств



$\Rightarrow$  можем записать интервалы для  $x$  и  $y$ , для этого нужно узовать точки пересечения

$$A: \begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 2 \\ y = \frac{3}{4}x - 2 \end{cases} \quad B: \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - 2 \\ y = \frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$$

$$A: \frac{4}{3}x + 2 = \frac{3}{4}x - 2 \quad B: \frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

$$16x + 24 = 9x - 24 \quad 16x - 24 = 9x + 24$$

$$x = \frac{-48}{7} \quad y = \frac{50}{7}$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{48}{7}, \frac{48}{7}\right] \text{ и } y \in \left[-\frac{50}{7}, \frac{50}{7}\right] \Rightarrow x > -\frac{48}{7} \quad y > -\frac{50}{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 14x + 7y \geq 14 \cdot -\frac{48}{7} - 7 \cdot \frac{50}{7} = -96 - 50 = -146$ . Это значение достигается при  $x = -\frac{48}{7}$  и  $y = -\frac{50}{7}$ . При этом они удовлетворяют системе:  $\left| \frac{4}{3}(-\frac{48}{7}) + \frac{3}{4}(-\frac{50}{7}) \right| = \left| \frac{160 - 192}{7} \right| = \left| \frac{42}{7} \right| = 6$

$$\left| \frac{3}{4}(-\frac{48}{7}) + \frac{4}{3}(-\frac{50}{7}) \right| = \left| \frac{200 - 144}{7} \right| = \left| \frac{56}{7} \right| = 8$$

Ответ:  $-146$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3

Для начала предположим числа  $A$  и  $B$ :

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 3m - 3n = (m-n)^2 + 3(m-n) = (m-n)(m-n+3)$$

$$B = mn - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

Сразу рассмотрим число  $A$  и его множители, заметив, что по мод 2  $m-n+3 \equiv m-n+1 \Rightarrow$  числа  $(m-n)$  и  $(m-n+3)$  — разные четности  $\Rightarrow$  ровно одно из них: 2  $\Rightarrow A:2$ .

При этом оба числа  $A$  и  $B$  — натуральные (нравятся  $13p^2$  и  $3q^2$ ) и  $m$  и  $n$  — натуральные.  $\Rightarrow$  тк  $B = mn(m-n+3) \Rightarrow m-n+3$  — натуральное  $\Rightarrow m-n+3 > 0 \Rightarrow m-n+3 > 0$  тк  $A = (m-n)(m-n+3) > 0 \Rightarrow m-n > 0 \Rightarrow m > n$ .  $\Rightarrow$  Все множители положительные.

Теперь рассмотрим 2 случая:  $A = 13p^2$  и  $A = 3q^2$

①  $A = 13p^2$  при этом  $A:2 \Rightarrow 13p^2:2 \Rightarrow$  тк  $13 \nmid 2 \Rightarrow p^2:2$ ,

$$\text{тк } p \text{ — простое и } p^2:2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow$$

$$A = (m-n)(m-n+3) = 13 \cdot 4.$$

Сделаем замену переменной:  $t = m-n$ , тогда  $t > 0$  и:

$$A = t(t+3) = 52$$

$$t^2 + 3t - 52 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{81+4 \cdot 52}}{2} = \frac{-3 \pm 17}{2} \text{ тк } t > 0 \Rightarrow t = \frac{-3+17}{2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m-n = 4. \text{ тк } A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2, \text{ тогда:}$$

$$B = mn(m-n+3) = mn(4+3) = 7mn = 3q^2 \quad 3 \nmid 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2:7. q \text{ — простое} \Rightarrow q=7 \Rightarrow B = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49$$

$$\Rightarrow B = m \cdot n \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \Rightarrow m \cdot n = 21 \text{ и } m-n=4 \Rightarrow m=4+n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+n)n = 21$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4 \cdot 21}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{600}}{2} = \frac{-4 \pm 20}{2} \text{ тк } n > 0 \Rightarrow n = \frac{-4+20}{2} = 3$$

$$\Rightarrow m = 4+n = 4+3 = 7. A = 4 \cdot 7 \cdot 13 = 13 \cdot 2^2 \quad B = 3 \cdot 7 \cdot 7 = 3 \cdot 7^2$$

$\Rightarrow$  Всегда если  $A = 13p^2$  и  $B = 3q^2$  ( $m, n$ ) = (7; 3)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 продолжение.

⑦  $A = 3q^2$   $B = 13p^2$ , при этом  $A : 2$

$$\Rightarrow 3q^2 : 2 \quad 3/2 \Rightarrow q^2 : 2 \quad q\text{-простое} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (m-n)(m-n+g) = 3 \cdot 2^2$$

Очевидно деление заменено перемножением  $t = m-n$   $t > 0$ .

$$A = t(t+g) = 12$$

$$t^2 + gt - 12 = 0$$

$$t = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-g \pm \sqrt{12g}}{2} = \frac{-g \pm \sqrt{3 \cdot 4g}}{2}$$

не могут рац. вв.  
последнее

$\Rightarrow$  8 случаев  $A = 3q^2$  и  $B = 13p^2$  натуральных и иррациональных.

$$(m; n) = \emptyset$$

Мы рассмотрели оба случая и исследовали еденическое пару  $(m; n)$ , которая подходит это  $(m; n) = (7; 3)$

Ответ:  $(7; 3)$ .

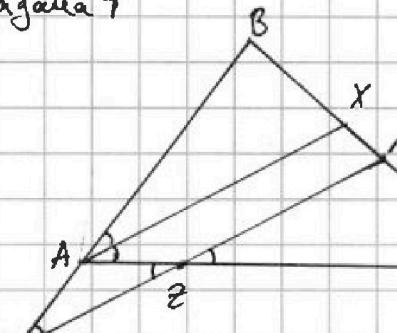
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4



Из параллельности прямых следуют равенства углов:

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle BAX = \angle XAC \text{ тк } AX - \text{биссектриса.} \\ \alpha &= \angle BAX = \angle BYM = \angle XAC = \angle MZC, \text{ при этом} \\ \alpha &= \angle MZC = \angle AZY - \text{вертикальные} \Rightarrow \\ C &\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY = \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow &\triangle AYZ - \text{равнобедренный} \Rightarrow AY = AZ = 3 \end{aligned}$$

У ок  $AX \parallel YM$ , то образуются подобные треугольники:  
 $\triangle ABX \sim \triangle BYM$ ;  $\triangle ZCM \sim \triangle ACX$ . Запишем отношения соответствующих сторон:  $\frac{CZ}{CX} = \frac{CM}{CX} = \frac{ZM}{AX} + \frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BY} = \frac{AX}{MY}$ . Тогда.

$$\frac{CM}{CX} = \frac{CZ}{AC} = \frac{(AC - AZ)}{AC} = \frac{12 - 3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CM}{CX} = \frac{3}{4}. \text{ При этом, тк.}$$

$AX$ -биссектриса  $\Rightarrow$  выполняются равенства отношений отрезков:

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CX}. \text{ При этом } \frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BY} \text{ BM} = CM = \frac{BC}{2} \text{ тк } M - \text{ср. } BC.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{BY}{BM} \Rightarrow \frac{BY}{BM} = \frac{AC}{CX} \Rightarrow BY = \frac{BM}{CX} \cdot AC = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

$\Rightarrow BA = BY - AY = 9 - 3 = 6$ . Так же выполняются такие соотношения:

$$\frac{AX}{MY} = \frac{AB}{BY} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{ZM}{AX} = \frac{CZ}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow AX = \frac{4}{3} ZM \text{ тк } AX = \frac{2}{3} MY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} ZM = \frac{2}{3} MY \Rightarrow 2ZM = MY = 2M + 2ZM = 2M = 2Y \Rightarrow ZM = 2Y = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow MY = 2ZM = 8$ . Запишем т. косинусов для  $\triangle AYZ$ :

$$AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2 \cos \alpha \cdot AY \cdot YZ \Rightarrow 3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cos \alpha \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 = 8 \cdot 3 \cos \alpha \Rightarrow 2 = 3 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}. \text{ Запишем т. косинусов для } \triangle BYM:$$

$$BM^2 = BY^2 + YM^2 - 2 \cos \alpha \cdot BY \cdot YM \Rightarrow BM^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 =$$

$$= 81 + 64 - 72 = 73 \Rightarrow BM^2 = 73 \text{ BM - отрезок} \Rightarrow BM > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM = 7. BC = 2BM \Rightarrow BC = 2 \cdot 7 = 14$$

О т в е т: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача №5

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5y^4 = 4\sqrt[4]{y^4 - 5\sqrt{x+y}} \end{cases}$$

заметим, что  $x \geq 0, y \geq 0, y \leq 5, x \leq 30$ .

Пусть  $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$  тогда условие переписывается как:

$$\begin{aligned} 4a^4 + a^4 - 5b^4 &= 4b^4 - 5a + b^4 \quad a \geq 0, b \geq 0 \\ 4a^4 - 4b^4 + a^4 - b^4 + 5a - 5b^4 &= 0 \\ 4(a^4 - b^4) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) &= 0 \\ 4(a^4 - b^4)(a^4 + b^4) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) &= 0 \\ (a^4 - b^4)(4a^4 + 4b^4 + 1) + 5(a - b) &= 0 \\ (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(4a^2 + 4b^2 + 1) + 5(a - b) &= 0 \\ (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(4a^2 + 4b^2 + 1) + 5(a - b) &= 0 \\ (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(4a^2 + 4b^2 + 1) + 5 &\stackrel{> 0}{=} 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{30-x-y^2} - 5 \quad \text{известно в условии.}$$

Ход решения

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{(x-6)(5-x)} - 5.$$

$$\sqrt{x+6} = A, \sqrt{5-x} = B$$

$$A - B = 2AB - 5$$

$$A(1 - 2B) - B - 5$$

$$A = \frac{B-5}{1-2B}, \quad \sqrt{x+6} = \frac{\sqrt{5-x}-5}{1-2\sqrt{5-x}}$$

$$x+6 = \frac{5-x-20\sqrt{5-x}+25}{1-4\sqrt{5-x}+20-4x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6. продолжение.

~~Также посчитали кол-во ко~~

Т.к. нам нужно найти кол-во различных 1-раскрасок, то а раскраски, которые можно друг из друга получить разделив на колыша, то соответственно нам надо найти кол-во колец.

Посчитаем кол-во колец способностью 2: Для этого нужно выбрать 1 клетку из верхнего правового квадрата  $5 \times 5$ , а вторые клетка строятся симметрично относительно.

$$\Rightarrow \text{Пусть } y - \text{кол-во таких колец} \Rightarrow y = C_{25}^1 = 25$$

При этом, чтобы  $x$ - кол-во колец способностью 4, тогда посчитаем общее кол-во раскрасок:  $4 \cdot x + 2y$ , а нам нужно найти кол-во колец - т.е  $x+y$ . При этом:

$$\begin{cases} 4x+2y = C_{100}^2 \\ y=25 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+2y = \frac{100 \cdot 99}{2} \\ y=25 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x+4y=100 \cdot 99 \\ y=25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x+4 \cdot 25 = 100 \cdot 99 \Rightarrow 8x+100 = 100 \cdot 99 \Rightarrow 8x = 100 \cdot 98$$

$$8x = 9800$$

$$x = 1225$$

$$\Rightarrow x+y = 1225 + 25 = 1250$$

Ответ: 1250.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

## Задача № 6.

Нам начали заметили, что в ~~однотонной~~ квадрат  $9 \times 9$ , где все узлы чистые, лежащих на сторонах будет по 10. т.е всего узлов сетки  $10 \cdot 10 = 100$ . Тогда будем рассматривать квадрат  $10 \times 10$ , где вместо чисток - узлы сетки, содержащиеся в исходном квадрате.  $\Rightarrow$  из начального нового квадрата ( $10 \times 10$ ) - будет первыми будем называть этот квадрат "табличкой"  $\Rightarrow$  Нас просит посчитать количество различных раскрасок чистых прямых ~~углов~~, так чтобы дальше были явные углы, а все остальные чисты.  $\Rightarrow$  Когда мы от узлов перешли к нашей табличке, задача формулируется как: нужно найти кол-во раскрасок таблички  $10 \times 10$ , в которых ровно 2 чистки белые, а остальные чисты.

Введен определение кольца. Кольцом определенное раскраски будем называть множеством раскрасок, которые могут получаться из нее поворотами. При этом, чтобы квадрат переходил сам в себя, угол поворота должен быть:  $90^\circ$  (повороты)  $\frac{1}{4}$  (цифра в центре)

Тогда, заметим, что если угол между покрашенными чистками (два угла между прямыми соед. чист. квадрата и узором чистки) равен  $180^\circ$  и расстояние до отдаленных чисток, до узла равны, то эти чистки отличаются симметрией относительно узла, то мощность (кол-во элементов множества) кольца этой раскраски равна  $2^4$ . В оставшихся случаях, мощность кольца равна 4, т.к. чтобы мощность была  $< 4$  должны существовать таких поворотов, что точки становятся местом друг друга.

Будет тогда при повороте на угол  $-d$ , должно происходить тоже самое  $\Rightarrow$  такое возможно только если  $d: 180^\circ$  и расст до узла равны. Т.е. если точки отличаются симметрией.

\* 2. т.к. при повороте на  $+90^\circ$  получаем раскраску, в кот. раскрашиваются точки отмеченные от измеченных. При этой раскраске, получим, поворотом на  $+90^\circ$  = раскраска, полученная Р на  $-90^\circ$ .

Тогда получаем количество различных раскрасок.

Всего якож размножение  $R$ -раскраски - где отмеч. поворотом раз. считаются одинаковыми.

Всего возможных новых раскрасок = кол-во способов выбрать две чистки таблички =  $C_{100}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}4x - 3y &\leq 6 \\3y - 4x &\leq 6 \\3x - 4y &\leq 8 \\4y - 3x &\leq 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x - 6 &\leq 3y \\ \frac{4}{3}x - 2 &\leq y \\ 3y &\leq 4x + 6 \\ y &\leq \frac{4}{3}x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x - 4y &\leq 8 \\ 3x - 2 &\leq y \\ \frac{3}{4}y &\leq \frac{3}{4}x + 2 \\ y &\leq \frac{3}{4}x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{cases}y = \frac{3}{4}x + 2 \\ y = \frac{4}{3}x + 2\end{cases} & \quad \frac{3}{4}x - 2 = \frac{4}{3}x + 2 \\ \frac{9}{12}x - 2 &= \frac{16}{12}x + 2 \\ 9x - 24 &= 16x + 24 \\ -7x &= 48 \\ x &= -\frac{48}{7}\end{aligned}$$

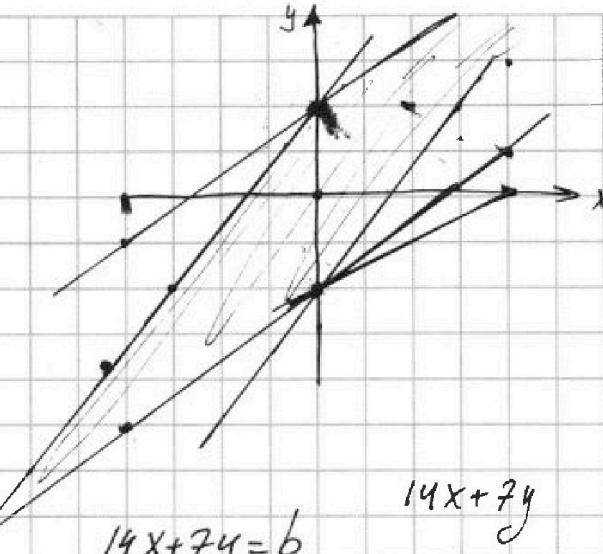
$$\begin{aligned}y &= -\frac{36}{7} - 2 = -\frac{50}{7} \\ y &= -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7} \\ x &= -6 - 2.3\end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

$$2.48 \quad 96$$

$$\begin{array}{r} +81 \\ +69 \\ -145 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1.48 \\ \hline 9 \\ 2 \\ \hline 4.8 \\ 2.8 \cdot 3 \cdot 2 = 19.2 \\ 4.8 \cdot 3 \\ 12 \cdot 8 = 96. \end{array}$$



$$\begin{aligned}\frac{4}{3}x &= 2 \\ x &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ k &= 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}14x + 7y &= 6 \\ y &= \frac{6 - 14x}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}x - 2 &= \frac{4}{3}x + 2 \\ \frac{9}{12}x - 2 &= \frac{16}{12}x + 2 \\ 9x - 24 &= 16x + 24 \\ -7x &= 48 \\ x &= -\frac{48}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= -\frac{36}{7} - 2 = -\frac{50}{7} \\ y &= -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7} \\ x &= -6 - 2.3\end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

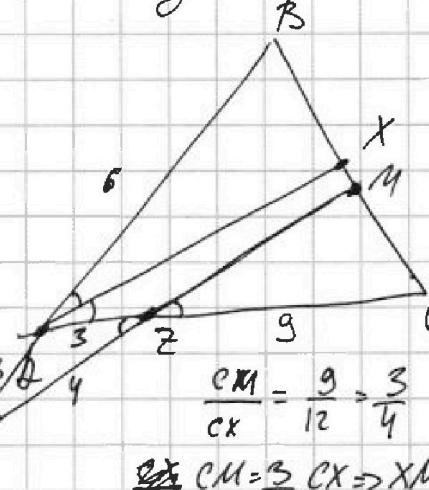
$$2.48 \quad 96$$

$$\begin{array}{r} +81 \\ +69 \\ -145 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1.48 \\ \hline 9 \\ 2 \\ \hline 4.8 \\ 2.8 \cdot 3 \cdot 2 = 19.2 \\ 4.8 \cdot 3 \\ 12 \cdot 8 = 96. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1.48 \\ \hline 9 \\ 2 \\ \hline 4.8 \\ 2.8 \cdot 3 \cdot 2 = 19.2 \\ 4.8 \cdot 3 \\ 12 \cdot 8 = 96. \end{array}$$

$$14x + 7y$$



$$\frac{CM}{CX} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad 4CM = 3CX$$

$$2BC = 3CX$$

$$CM = \frac{3}{4} CX \Rightarrow XM = \frac{1}{4} CX$$

$$CX = \frac{4}{3} CM \Rightarrow XM = \frac{1}{3} CM = \frac{1}{3} BM$$

$$\Rightarrow \frac{BY}{BY} = \frac{BX}{BM} \Rightarrow AB = \frac{BY}{BX} = \frac{AC}{CX}$$

$$BY = AC \cdot BM = \frac{3}{4} AL = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

$$AB = 6 \quad CX = 9$$

$$\frac{AX}{MY} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \frac{AX}{M2} = \frac{12}{8} = \frac{4}{3} \quad Ax = 4 \quad M2 = 2 \quad \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2M2 = MY \Rightarrow MB = 2$$

$$\Rightarrow AX = MB \Rightarrow 2Y = M2 = 4$$

$$9 = 9 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha = 25$$

$$16 = 8 \cdot 3 \cos \alpha \quad \frac{2}{3} = \cos \alpha$$

$$BM^2 = 64 + 81 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} = 145 - 86 = 49$$

$$BM = 7 \Rightarrow BC = 14.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} m(m-n+3) &= a_1 + 4d \quad a_1 + 10d = \frac{2a_1 + 14d}{2} = a_1 + 7d. \quad a_1 + 6d. \\ (m-n)(m-n+3) & \qquad \qquad \qquad \underline{2a_1 + 16d} = a_1 + 8d. \\ a_5 = 6x+18 & \quad a_7 = (x^2 - 4x)^2 \quad a_{11} = -3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2d &= (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 \quad 3x^2 + 6x + 18 + 6d = 0 \\ 6d &= -3x^2 - 6x - 18 \quad x^2 + 2x + 6 + 2d = 0 \quad x^2 + 2x + 6 = -2d. \\ 4d &= -3x^2 - (x^2 - 4x)^2 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{1 - 6 - 2d}}{2} \end{aligned}$$

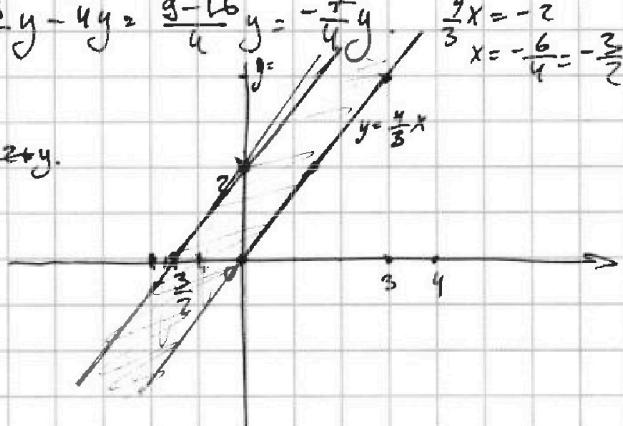
$$\begin{aligned} x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 3x^2 + 10d &= 0 \\ x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 4d &= 0 \\ x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 6x + 18 - 2d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^4} - 8x^3 + 19x^2 + 4d = 0 \\ \cancel{x^4} - 8x^3 + 17x^2 - 12x - 36 = 0 \\ \cancel{x^4} - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -3x^2 + 6x + 18 &= (x^2 - 4x)^2 + d \\ -3x^2 + 6x + 18 &= 2(x^2 - 4x)^2 + 2d. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \quad \textcircled{1} \quad 4x < 3y \quad x < \frac{3}{4}y.$$

$$\begin{aligned} 3x - 4y &< \frac{3}{4}y - 4y = \frac{3-16}{4}y = -\frac{7}{4}y \quad \frac{7}{3}x = -2 \\ 3y - 4x &\leq 6 \\ 3y &\leq 6 + 4x \\ y &\leq 2 + \frac{4}{3}x \quad \cancel{2+y}. \\ y &> \frac{4}{3}x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4x - 3y &\leq 6 \\ 4x - 3y &\geq 0 \\ 3y - 4x &\leq 6 \\ 3x - 4y &\leq 8 \end{aligned}$$

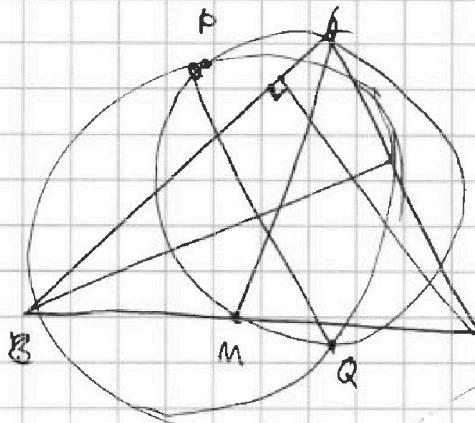


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

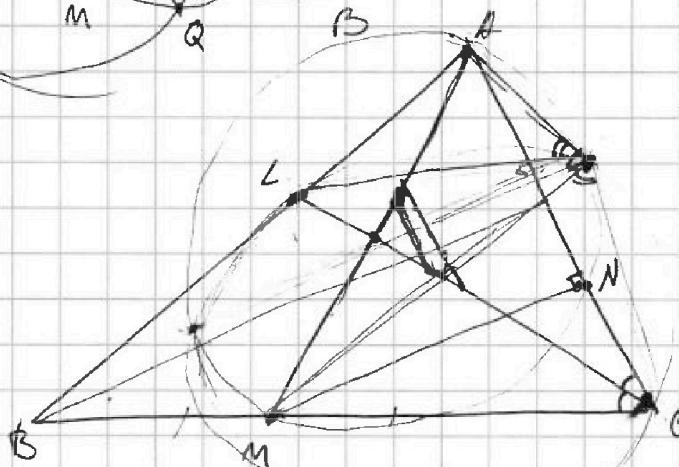
- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$PQ \text{ - фаг. ось } PQ \perp RS \\ \Rightarrow AC \parallel PQ$$



$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

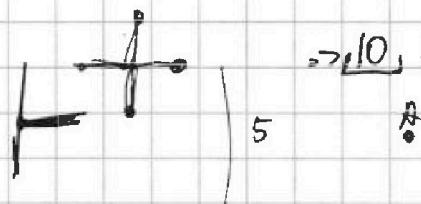
$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$\begin{array}{r} x^4 - y^4 \\ - \quad - \\ \hline 0 \end{array}$$

автомат  
исправил.

$$\begin{array}{r} 980012 \\ - 14950 \\ \hline 830512 \\ - 10 \\ \hline 830502 \\ - 0 \\ \hline 830502 \end{array}$$

5



$\rightarrow 10$ , возможно.



$\pm 90^\circ$ .

$R^\alpha \rightarrow$  только повернута  $180^\circ$ .



$A \rightarrow B \ B \rightarrow A$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы до каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = a_1 + 4d = 6x + 18 \quad a_7 = a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2 \quad a_{11} = a_1 + 10d = (-3x^2)$$

$$2d = 3x + 9$$

$$2d = (x^2 - 4x)^2$$

$$2d = \cancel{3x^3} \quad \cancel{6}$$

$$a_1 = 6x + 18 - 4d = (x^2 - 4x)^2 - 6d = (-3x^2) - 10d$$

$$3x^2 + 6x + 18 = -6d$$

~~$$3x^2 + 6x + 18 = 2d = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$~~

$$4d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 12x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ x^2 \\ \hline 216 \\ 6 \\ \hline 108 \\ 108 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$216 + 81 - \frac{108}{153}$$

$$= 18 - 24$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 3m - 9n =$$

$$16 - 64 + 38 - 8 \sqrt{2} \rightarrow$$

$$-(m-n)^2 + 3(m-n) = (m-n)(m-n+3) \text{ по мод 3 равна}$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$\textcircled{1} \ A = 13p^2 \Rightarrow B = mn(m-n+3) = 3p^2$$

~~$$B = mn(m-n+3)$$~~

$$\textcircled{1} \ m-n=1 \ m-n+3=10x \Rightarrow p=3 \ A=13 \cdot 9$$

$$\textcircled{2} \ m-n=13 \ 13 \cdot (13+3)=13 \cdot 22x$$

$$\textcircled{3} \ m-n=p \ p(p+3)=13p^2$$

$$p^2 + 3p = 13p^2$$

$$3p = 12p^2$$

$$3 = 12p \ x$$

$$\textcircled{4} \ m-n=p^2 \ p^2(p^2+3)=13p^2 \ B = mn(m-n+3) = 7 \cdot mn$$

$$p^2 + 3 = 13$$

$$p^2 = 4 \ p=2$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 48 \\ \hline + 81 \\ 129 \\ \hline 13 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = 6x + 18 \quad a_7 = (x^2 - 4x)^2 \quad a_{11} = (-3x^2)$$

$$a_2 = a_5 + d : a_5 + 2d \quad a_{11} = a_5 + d = a_5 + 2d : a_5 + 6d$$

$$\begin{cases} 6x + 18 + 6d = (-3x^2) \\ (x^2 - 4x)^2 + 4d = (-3x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 18 + 2d = (x^2 - 4x)^2 \\ 6d = 8 - 3x^2 - 6x - 18 \end{cases}$$

$$2d = -x^2 - 2x - 6$$

$$(x^2 - 4x)^2 + 2(2d) = -3x^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 - 2x^2 - 4x - 12 = -3x^2$$

$$\begin{cases} x^4 - 2 \cdot 4x^3 + 16x^2 - 2x^2 - 4x - 12 = -3x^2 \\ 4d = -x^2(3 + (x - 4)^2) \end{cases}$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 2x^2 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$-2x^2 - 4x - 12 = -x^2(3 + (x - 4)^2)$$

$$2x^2 + 4x + 12 = x^2(3 + (x - 4)^2)$$

$$2x^2 + 4x + 12 = x^2(3 + x^2 - 8x + 16)$$

$$2x^2 + 4x + 12 = x^2(x^2 - 8x + 19)$$

$$2(x^2 + 2x + 6)$$

$$-3x^2 + 6x + 18 + 6d = 0$$

$$x^2 + 2x + 6 + 2d = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(6 + 2d)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 - 6 - 2d}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{5 - 2d}}{2} \quad -2d \geq 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 3m - 3n$$

$$A = (m-n)^2 + 3(m-n)$$

$$A = (m-n)(m-n+3)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$B = mn(m-n+3) \quad m-n >$$

~~13p<sup>2</sup>~~ 13p<sup>2</sup> 3q<sup>2</sup> - возможные делители.

ОДРЗ

$$\begin{matrix} m-n & 1 & 13 & p & p^2 \\ 13p & 13p^2 & 3q & 3q^2 \end{matrix}$$

$$m-n < m-n+g$$

$$A = (m-n)(m-n+g) - разной четности \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=2 \Rightarrow m-n+g : 13$$

$$\textcircled{1} \quad m-n+g = 13$$

$$m-n = 4$$

$$\cancel{4 \cdot 13} = p^2 \cdot 13 \text{ (V)}$$

$$\textcircled{2} \quad m-n+g = 26$$

$$m-n = 17$$

$$17 \cdot 26 \neq$$

$$\textcircled{3} \quad m-n+g = 52$$

$$m-n = 43 \cancel{\text{X}}$$

$$\Rightarrow m-n = 4$$

$\Rightarrow m-n$  - ошибка четности..

$$B = mn(m-n+3) =$$

$$= mn \neq 3q^2$$

$$m > n \Rightarrow q = 7$$

$$mn = 3 \cdot 7$$

$$(4n)n = 3 \cdot 7$$

$$4n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$n = \frac{-4 + 10}{2} = 3 \quad m = 7$$

$$A(A+g) = 52$$

$$a^2 + ga = 52$$

$$a^2 + ga - 52 = 0$$

$$a = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + 4 \cdot 52}}{2} = \frac{-g \pm \sqrt{128}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ 4 \\ \hline 208 \\ 81 \\ \hline 289 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$a > 0 \Rightarrow a = \frac{-g + 17}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8}{2} \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 + 2d = a_7 \quad a_4 = a_2 + 4d \quad a_6 = a_5 + 6d \quad 2d.$$

$$\frac{(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18}{2} = \frac{(-3x^2) - (x^2 - 4x)^2}{3} = \frac{(-3x^2) - 6x - 18}{3}$$

$$\frac{5}{2}. \\ \frac{625}{16} * 125 +$$

$$(-3x^2) \cdot 3 - 3(x^2 - 4x)^2 = (-3x^2) \cdot 2 - 12x - 36. \quad 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$-3x^2 - 3(x^2 - 4x)^2 = -12x - 36. \quad * \frac{4}{7^4} - 2\sqrt{2} + \frac{17}{2} -$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0$$

~~$$3x^2 + (x^2 - 4x)^2 - 4x - 12 = 0$$~~

~~$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0.$$~~

$$0 < y \leq 5$$

$$y^2 \leq 25$$

$$30 - x - y^2 \geq 0$$

$$30 - x \geq y^2$$

$$x \leq 30.$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y} \\ \sqrt{x} = a \quad \sqrt{y} = b \end{array} \right.$$

$$4(\sqrt{b})^4 + 5$$

$$4 \cdot a^4 + a^4 - 5b = 4b^4 - 5a + b^4$$

$$4a^4 + a^4 - 5a = 4b^4 + b^4 - 5b$$

$$4(a^4 - b^4) + (a^4 - b^4) + 5(6-a) = 0$$

$$4(a^4 - b^4)(a^4 + b^4) + 1.$$

$$x^2 + x - 30$$

$$(x-6)(5-x) =$$

$$= 5x + 6x - x^2$$