



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



- [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
- [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
- [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$
- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = a_1 + 4q = 6x + 18$$

$$a_7 = a_1 + 6q = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

a_1 - первая член ар. прогр.

q - разность ар. прогр.

т.к. $a_7 > 0$, а $a_{11} < 0$, $q < 0$ гарантированно

Найдем из a_7 и a_{11} 9-й член прогрессии:

$$a_9 = \frac{a_7 + a_{11}}{2} = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$$

Найдем из a_9 и a_5 7-й член прогрессии:

$$a_7 = \frac{a_9 + a_5}{2} = \frac{\frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2} + 6x + 18}{2} = (x^2 - 4x)^2$$

Тогда:

$$(x^2 - 4x)^2 - 3x^2 + 12x + 36 = 4(x^2 - 4x)^2$$

$$-3x^2 + 12x + 36 = 3(x^2 - 4x)^2 \quad | :3$$

$$-x^2 + 4x + 12 = (x^2 - 4x)^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = t$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \quad \begin{aligned} t_1 &= -4 \\ t_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4+3} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 2$$

Проверим полученные корни:

$$\text{при } x=2: \quad a_5 = 30 \Rightarrow q = -7 \Rightarrow a_{11} = a_7 - 28 = -12 = -3x^2 - \text{Верно}$$

$$\text{при } x=2+\sqrt{7}: \quad a_5 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = (4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{9 - 30 - 6\sqrt{7}}{2} = \frac{-21 - 6\sqrt{7}}{2} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow a_{11} = a_7 + 4q = 9 - 2(21 + 6\sqrt{7}) = -33 - 12\sqrt{7}$$

$$a_{11} = -3(2 + \sqrt{7})^2 = -3(4 + 4\sqrt{7} + 7) = -3(11 + 4\sqrt{7}) = -33 - 12\sqrt{7} \rightarrow$$

\Leftrightarrow Верно

при $x = 2 - \sqrt{7}$: $a_5 = 30 - 6\sqrt{7} \rightarrow q = \frac{9 - 30 + 6\sqrt{7}}{2} = \frac{-21 + 6\sqrt{7}}{2}$,
 $a_7 = 9$

$$\Rightarrow a_{11} = 9 + 2(-21 + 6\sqrt{7}) = -33 + 12\sqrt{7}$$

$$a_{11} = -3(2 - \sqrt{7})^2 = -3(4 - 4\sqrt{7} + 7) = -33 + 12\sqrt{7} \Rightarrow \text{Верно}$$

Ответ: $\{2; 2 \pm \sqrt{7}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

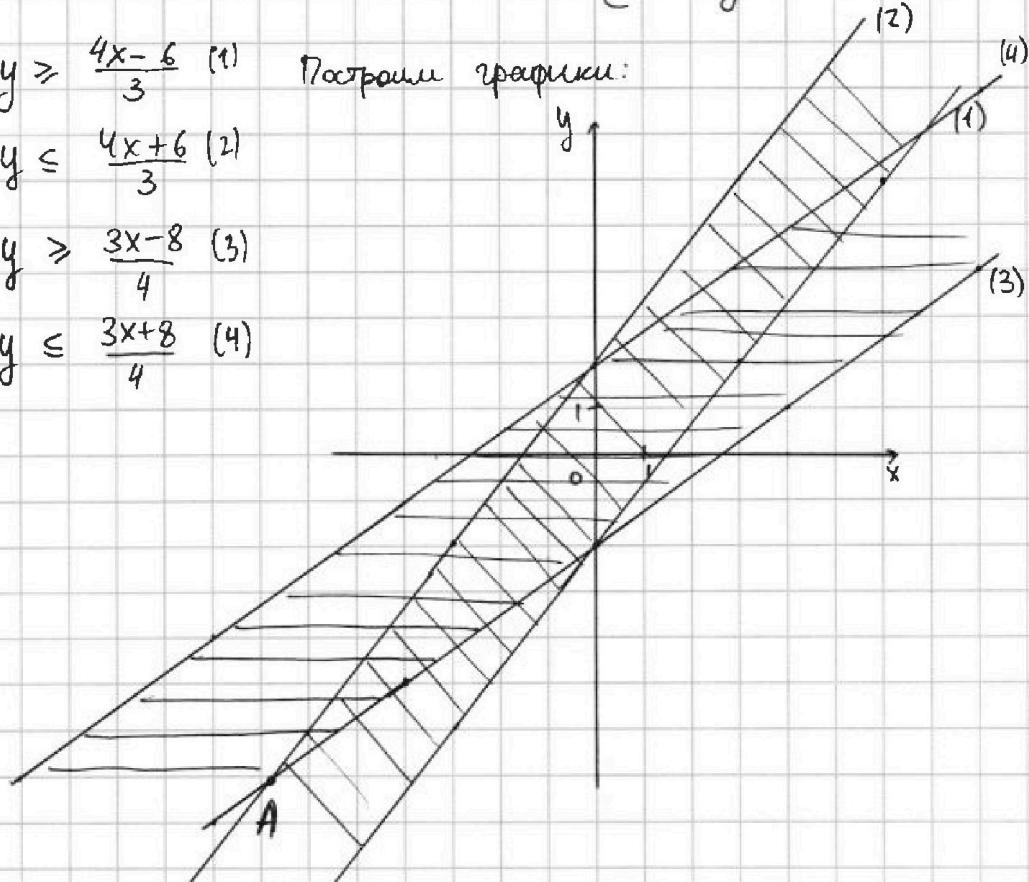
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{4x-6}{3} & (1) \\ y \leq \frac{4x+6}{3} & (2) \\ y \geq \frac{3x-8}{4} & (3) \\ y \leq \frac{3x+8}{4} & (4) \end{cases}$$

Построим графики:



$|4x + 7y|$ минимально при минимальных x и y .
Из графика найдем минимальное решение системы (и по x , и по y), это т. А

Видно, что это точка пересечения прямых $y = \frac{4x+6}{3}$ и $y = \frac{3x-8}{4}$.
Найдем x_A и y_A — координаты т. А.

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} \quad ; \quad y = \frac{4x+6}{3} = \frac{-\frac{4 \cdot 48}{7} + 6}{3} = \frac{-4 \cdot 48 + 42}{21} = -\frac{50}{7} \approx -7$$

$$16x + 24 = 9x - 24$$

$$7x = -48$$

$$x = -48/7 \approx -7$$

и на графике

$$\text{Тогда } |4x + 7y| = \left| \frac{14 \cdot 48}{7} - \frac{7 \cdot 50}{7} \right| =$$

$$= -2 \cdot 48 - 50 = -146$$

Ответ: -146

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

т.к. или A, или B не равны 0, $m \neq n$, т.к. $(m-n)$ - делитель A

I. Пусть $A = 13p^2$; $B = 3q^2$

$$\text{Тогда } (m-n)(m-n+9) = 13p^2, \text{ а } mn(m-n+3) = 3q^2$$

$$\begin{aligned} \text{или } & m = m-n+3 = q & \text{или } & m = 3 \\ & n = 3 & & n = m-n+3 \\ & m = m & & \downarrow \\ & & & n = 6-h \\ & & & h = 3 \rightarrow \text{не подходит}, \\ & & & \text{т.к. } m \neq n \end{aligned}$$

Подставим в A $m = n+3$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p^2$$

$$(m-3)(m+6) = 13p^2$$

Тогда или ~~нельзя~~ $m-3 = 13$

$$m = 10$$

$$m+6 = 16 = p^2$$

$p = \pm 4$ - не подходит,
т.к. p - простое

$$m+6 = 13$$

$$m = 7$$

$$\text{тогда } m-3 = 4 = p^2$$

$P = \pm 2$ - подходит.
 $p = 2$

II. Пусть $B = 3q^2$; $A = 13p^2$

$$\text{Тогда } mn(m-n+3) = 13p^2 \Rightarrow \text{или } \begin{cases} m = m-n+3 = p \\ n = 13 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n = m-n+3-p \\ m = 13 \end{cases}$$

$$m = m-10 - \text{не подходит.}$$

$$\begin{aligned} & h = 16-h \\ & h = 8 \end{aligned}$$

Подставим $m=13$ и $n=8$ в A

$$(m-n)(m-n+9) = (13-8)(13-8+9) = 5 \cdot 14 = 5 \cdot 2 \cdot 7 \neq 3q^2 \Rightarrow$$

не подходит

Ответ: $(7; 3)$

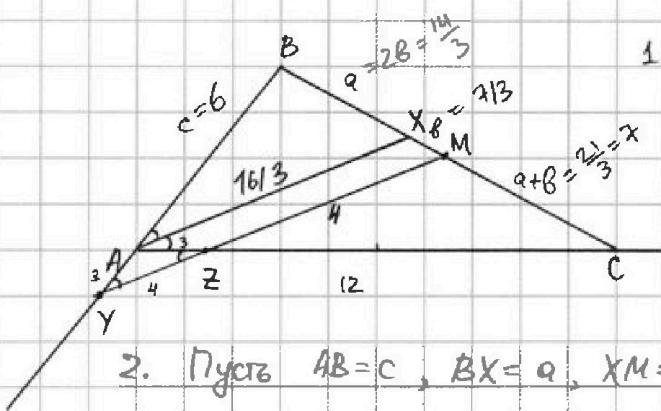


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. $\angle XAZ = \angle AZY$ (чл. при $AX \parallel MZ$ и сек. AZ)
 $\angle BAX = \angle AYZ$ (известно соотв. при $AX \parallel MZ$ и сек. AY)
 $\text{Тогда } \angle YAZ = 16/3$ (но признаку) \Rightarrow
 $\Rightarrow AY = AZ = 3 \Rightarrow ZC = 12 - 3 = 9$

2. Пусть $AB = c$, $BX = a$, $XM = b$. Тогда $MC = a + b$

$\triangle BAX \sim \triangle BYM$ (т.к. $\angle BAX = \angle BYM$ и $\angle BXA = \angle BYM$ (аналогично)) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c+3}{a+b} \Rightarrow \text{известно } 2B = a \text{ (из следующего)} \quad \frac{c}{2} = \frac{c+3}{3} \Rightarrow c = 6$$

$\triangle AXC \sim \triangle ZMC$ (т.к. $\angle XAC = \angle MZC$ и $\angle AXC = \angle ZMC$ (аналогично))
 известно

$$\Rightarrow \frac{a+2B}{12} = \frac{a+b}{9} \Rightarrow 9a + 18B = 12a + 12b$$

т.к. AX -бисс-ца $\frac{a}{c} = \frac{a+2B}{12}$ — (но свойству бисс-ца) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{2B}{6} = \frac{4B}{12} - \text{расходство}$$

Из подобия $\triangle AXC$ и $\triangle ZMC$: $\frac{AX}{a+2B} = \frac{ZM}{a+b} \Rightarrow \frac{AX}{4} = \frac{ZM}{3}$

Из подобия $\triangle ABX$ и $\triangle YBM$: $\frac{AX}{c} = \frac{ZM+YZ}{c+3} \Rightarrow \frac{AX}{6} = \frac{ZM+4}{9}$

$$\Rightarrow AX = \frac{4}{3}ZM \text{ или } \frac{3}{4}AX = ZM$$

$$\frac{3}{2}AX = ZM + 4$$

$$\Rightarrow ZM + 4 = 2ZM$$

$$ZM = 4; AX = \frac{16}{3}$$

Запишем т. косинусов для $\triangle ABX$ и $\triangle AXC$, обозначив

$$\angle BAX = \angle XAC = \alpha$$

$$1) 6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2\cos\alpha \cdot 6 \cdot \frac{16}{3} = 4B^2 / 2$$

$$2) \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 12^2 - 2\cos\alpha \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} = (a+2B)^2 = 16B^2$$

$$\text{Берем (1) и (2): } 8B^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 12^2 - 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 = 2 \cdot 6^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2$$

$$B = 7/3, \text{ тогда } a = 14/3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC = 2(a+b) = 2 \cdot 38 = 68 = 6 \cdot 7/3 = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~х⁴+5x²-2=2y⁴-5y²+10y-4 (30 очков)~~

~~2x²y²=x²-y²~~

~~3x²y²=x²-y²~~

Рассмотрим второе уравнение в системе:

$$4x^4 + 5\sqrt[4]{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt[4]{y} + y \quad \text{— оно симметрично относительно } x = y.$$

Обе функции возрастающие и существуют на участке

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Тогда решений будет не больше двух.

$$x=y=0 \quad \text{и} \quad x=y=1$$

Подставим полученные значения в первое уравнение.

$$x=y=0: \sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{5}+5 = 2\sqrt[4]{30} \quad \text{— неверно}$$

$\underbrace{}_{<1} \quad \underbrace{}_{<6} \quad \underbrace{}_{>6}$

$$x=y=1: \sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{4}+5 = 2\sqrt[4]{30-2}$$

$$\sqrt[4]{7}+3 = 4\sqrt[4]{7}$$

$$3 = 3\sqrt[4]{7} \quad \text{— неверно}$$

„28“

Ответ: \emptyset

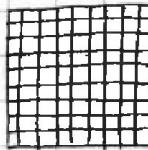


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов: $10 \cdot 10 = 100$

снегана
Пуск мог выбрать какую-нибудь точку (узел),
а потом считаем способов выбрать ей вторую
точку.

~~Пуск мог выбрать первую точку~~

Данный квадрат можно повернуть 4-мя способами, то есть
каждую раскраску мог насчитали 4 раза

Способов выбрать первую точку - 100 $\Rightarrow \frac{100 \cdot 99}{4} = 25 \cdot 99 = 2475$
Способов выбрать вторую точку - 99

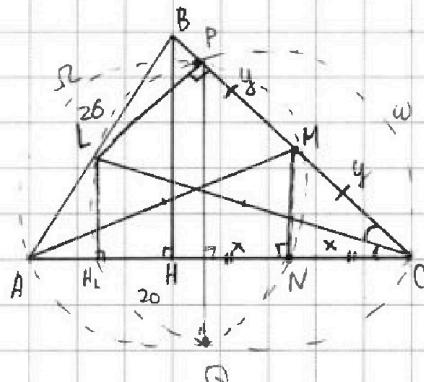
Ответ: 2475



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{l|l} AB = 26 & AC - ? \\ AN = 20 & BC - ? \end{array}$$

1. Проведем высоту LH . Точка H принадлежит w , т.к. $\angle LHN$ с открытым на CL

2. Так же MN -высота, т.к. $\angle MNA$ опирается на диаметр AM и $N \in AC$

3. Т.к. All -медиана BC , $HN = NC = x$, тогда $AH = 20 - x$; $AC = 20 + x$

4. $\triangle CLP \cong \triangle CLH$ (т.к. $\angle LCH_1 = \angle RCH_1$, $\angle P = 90^\circ = \angle H$, CL -общая)
Тогда $CP = CH_1$ и $PL = LH_1$

5. $\triangle APM \cong \triangle AMA$ (аналогично п.4) $\Rightarrow \angle LPC = \angle APC = 90^\circ \Rightarrow$
 ~~$P \rightarrow B = P \angle B = 90^\circ$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

This large rectangular area is intended for students to show their handwritten solutions to the tasks. It is divided into a grid of small squares, providing a space for writing and drawing.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$(x+6) + (5-y) - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 5 + 25\sqrt{x+6} - 25\sqrt{5-y} = 4(30-x-y^2)$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \leftarrow \text{инверсия от } x \text{ и } y$$

$$4x^4 + 5\sqrt{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y$$

Функции возрастают $\Rightarrow 1$ решение $x=y=1$ и $x=y=0$

$$\sqrt{7} - \sqrt{4} + 5 = 2\sqrt{30-1-1} = 4\sqrt{7}$$

$$5 - \sqrt{4} = 3\sqrt{7}$$

$$3 = 3\sqrt{7} - \text{кет.}$$

$$\text{Учеб 100} \quad \sqrt{6} - \sqrt{5} + 5 = 2\sqrt{30} = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5}$$

$$\text{Более вероятн. уч. } \frac{\sqrt{5}}{99 \text{ кв.}} \quad 5 - \sqrt{5} = \sqrt{6} (\sqrt{5} - 1)$$

$$\sqrt{5}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{6}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{6} \cdot \sqrt{5}$$

$$\text{Состр.} - 98 \text{ кв. } 99-4 = 95$$

$$\text{Состр.} - 99-8$$

$$99 + (99-4) + (99-8) + (99-...) =$$

$$a_1 = 99$$

$$q = -4$$

$$S_{10} = 10a_1 + 9 + 2q + \dots + 9q = \\ = 10a_1 + \frac{10q \cdot 9}{2} =$$

$$(x+6)(5-y) =$$

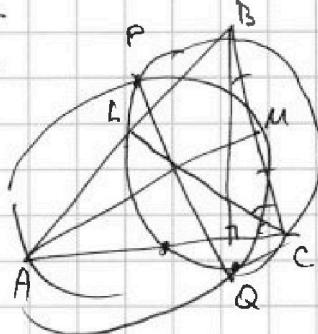
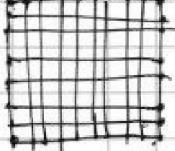
$$= 10a_1 + 45q =$$

$$= 10 \cdot 99 + 45(-4) =$$

$$= 990 - 180 =$$

$$= 810$$

$$6V$$



$$-\frac{990}{180} \\ \hline 81$$

$$x=y=0 \quad x=y=1$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$4(x^2+y^2)(x-y)(x+y) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$4(x^2+y^2)(x+y)(x+y)$$

$$(1 + 4(x^2+y^2)(x+y))(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5 = 0$$

Поворот в -4 \Rightarrow

такую раскраску
посчитали 4 раза

$$\begin{array}{c} 42 \\ 42 \\ \hline 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 99 \\ \hline 225 \\ 225 \\ \hline 2475 \end{array}$$

$$42$$

$$33$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ 96 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 99 \end{array} \text{ or } \begin{array}{r} 99 \\ 99 \\ \hline 99 \end{array} \quad 3 \\ 99 + \underline{9+2q+...+24q} = \\ = 99 + \underline{25q \cdot 24} = 99 + 300q$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$Q_5 = a_1 + 4q = 6x + 18$$

$$Q_7 = a_1 + 6q = (x^2 - 4x)^2 = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$\dots$$

$$Q_{11} = a_1 + 10q = -3x^2$$

у a_7 и a_{11} найдем $a_9 \Rightarrow \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2} = Q_9$

$$(x^2 - 4x + \sqrt{3}x)(x^2 - 4x - \sqrt{3}x) = Q_9$$

$$Q_5 + Q_7 = 2a_1 + 10q = a_{11} + q_1 \Rightarrow$$

у Q_3 и Q_5 найдем $a_3 \Rightarrow (x^2 - 4x)^2 - 3x^2 +$

$$= -3x^2 + Q_1 = 6x + 18 + x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$Q_1 = x^4 - 8x^3 + 19x^2 + 6x + 18$$

N2

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6 \rightarrow$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad \text{+} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq \frac{4x - 6}{3} \\ y \leq \frac{4x + 6}{3} \\ y \geq \frac{3x - 8}{4} \\ y \leq \frac{3x + 8}{4} \end{cases} \quad \text{график}$$

$$\begin{aligned} -14 &\leq 7x - 7y \leq 14 & 4x - 3y \geq -6 & 3x - 4y \geq -8 \\ -2 &\leq x - y \leq 2 & 4y - 8 - 3y \geq -6 & 3y - 6 - 4y \geq 8 \\ x + y \geq -2 & \cancel{\text{уравнение}} \quad \begin{cases} x \geq y - 2 \\ x \leq 2 - y \end{cases} & (y \geq 2) & -y \geq -2 \\ x - y \leq 2 & & (y \leq 2) & \end{aligned}$$

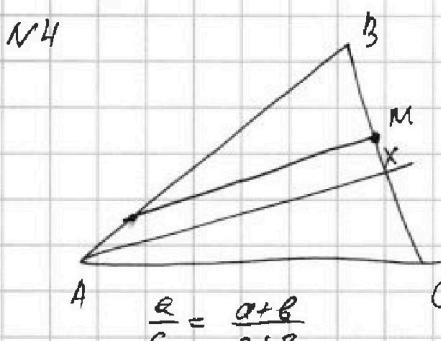
$$14x + 7y$$

N3

$$m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = \underbrace{(m-n)(m+n+9)}_{m+n}$$

$$m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

из условия задачи

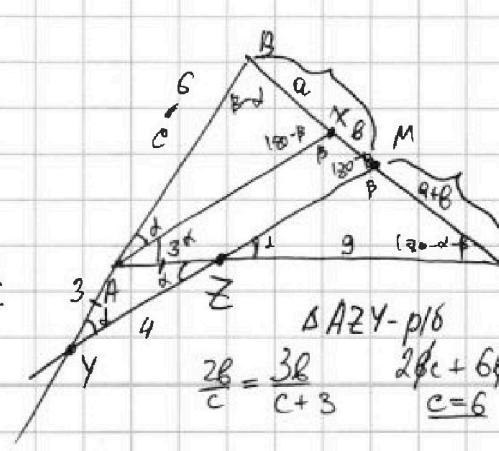


$$\frac{\alpha + \beta}{c} = \frac{\alpha + \beta}{c + 3}$$

$$\frac{\alpha + 2\beta}{12} = \frac{\alpha + \beta}{9}$$

$$9\alpha + 18\beta = 12\alpha + 12\beta$$

$$6\beta = 3\alpha \quad 2\beta = \alpha \quad \beta = \alpha/2$$



$$\Delta AZY - p/6$$

$$\frac{2B}{c} = \frac{3B}{c+3}$$

$$2Bc + 6B = 3Bc$$

$$c = 6$$

$$\begin{aligned} AC &= 12 \\ AZ &= 3 \\ YZ &= 4 \\ BC &=? \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N} \vee \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2} + \frac{6x + 18}{2} = (x^2 - 4x)^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 - 3x^2 + 12x + 36 = 4(x^2 - 4x)^2$$

$$\cancel{-3x^2 + 12x + 36} \quad \cancel{4(x^2 - 4x)^2}$$

$$-x^2 + 4x + 12 = (x^2 - 4x)^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$t = -4 \\ t = 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\text{или } x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$6x + 18$$

$$-3x^2 \Rightarrow q \underset{\substack{\Rightarrow q < 0 \\ \text{т.к. } q_7 > 0}}{<} 0 \Rightarrow q < 0$$

$$x^2 + 4x \underset{x=2+\sqrt{7}}{|} = 4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7} = 3$$

$$6x + 18 = 30 \quad \left. \begin{array}{l} x=2 \\ q=-7 \end{array} \right)$$

$$2 - \sqrt{7} = 4 - 4\sqrt{7} + 7 - 8 + 4\sqrt{7}$$

$$(4 - 4 \cdot 2)^2 = 16$$

$$6x + 18 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 > 9$$

$$q_u = \frac{(-3 \cdot 2^2)}{4} = -12$$

$$12 - 6\sqrt{7} + 18 > 9$$

2 шаг.

$$mn(m-n+3) = 13p^2$$

3V

$$m = m - n + 3 \quad \text{или}$$

$$\boxed{n=3}$$

$$\boxed{m=3} \quad m = m - n + 3$$

$$(m-n)(m-n+3) = 13p^2$$

$$(m-3)(m+6) = 13p^2$$

$$\therefore 13 \quad m-3=13 \quad 16=p^2 \quad \text{нет}$$

$$\begin{array}{l} 2n=6 \\ n=3 \\ \text{нет.} \end{array}$$

$$m = m - n + 3 \quad \text{или} \quad \boxed{n=m-n+3}$$

$$n=13$$

$$m = m - 10$$

нет

$$\boxed{n=8}$$

$$\begin{aligned} mn(m-n+3) &= 13 \cdot 8(13-8+3) = \\ &= 13 \cdot 8 \cdot 8 \quad V \end{aligned}$$

$$m+6=13$$

$$m=7 \quad \cancel{6 \neq 13} \quad 7^2=p^2$$

$$p=2$$

$$q=7 \quad V \text{ cg.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или ни одна задача, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2\cos\alpha \cdot 6 \cdot \frac{16}{3} = 4B^2 \quad | \cdot 2$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 + (12)^2 - 2\cos\alpha \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} = (a+2B)^2 = (4B)^2 = 16B^2 \quad (\textcircled{-})$$

$$2 \cdot 6^2 + 2\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2\cos\alpha \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} = 8B^2$$

$$8B^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 12^2 - 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 = 2 \cdot 6^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = 8B^2$$

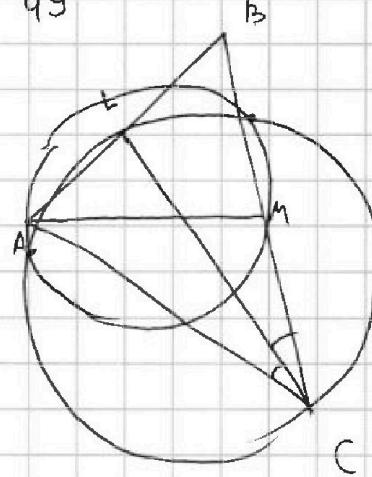
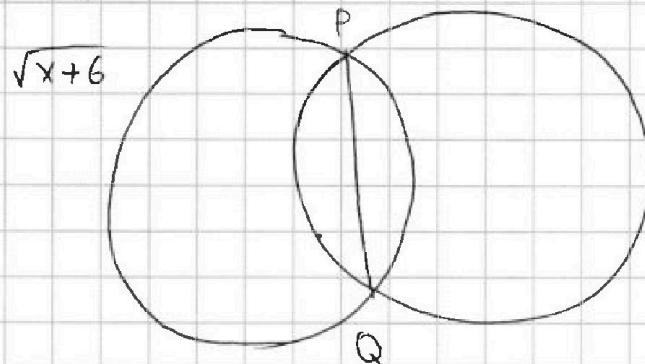
$$2^3 \cdot 3^2 - \frac{2^8}{3^2} = 8B^2$$

$$3^2 - \frac{2^5}{3^2} = B^2$$

$$\sqrt{\frac{3^4 - 2^5}{3^2}} = B = \frac{7}{3}$$

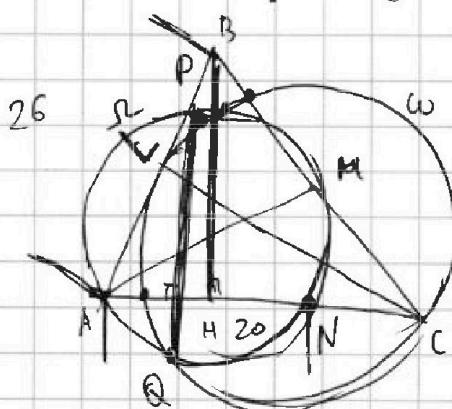
$$\begin{aligned} 3^4 &= 81 \\ 2^5 &= 32 \\ -\frac{81}{32} &= \frac{10}{49} \end{aligned}$$

$$8B^2 = 8 \cdot \frac{49}{9}$$



$$\sqrt{x+6} + 5 = \sqrt{5-y}$$

$$(x+6)(5-y) = 30 - 6y + 5x - xy$$



$$\begin{aligned} AC & \\ BC & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4t^{16} & \\ 4t^{16} + t^4 + 5t & = 4p^{16} + \end{aligned}$$

