



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Пусть первым член a , r разность d . Тогда:

$$\begin{cases} a + 3d = 6 - 9x & (1) \\ a + 5d = (x^2 - 2x)^2 & (2) \\ a + 9d = 9x^2 & (3) \end{cases}$$

Возьмем (2) - (1):

$$2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 \quad (3) - (2):$$

$$4d = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 \quad \text{Значит } ((2) - (1)) \cdot 2 =$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = -x^4 + 4x^3 + 5x^2 \quad = (3) - (2)$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0 \quad | : 3$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0 \quad \text{Заметим, что } x=1 \text{ - корень, т.к.}$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0 \text{ - верно. Разделим}$$

данной многочлен на $(x-1)$:

1	-4	1	6	-4	
1	1	-3	-2	4	0

Тогда:

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$$

т.к. заметим, что $x=1$ - корень, т.к. $1 - 3 - 2 + 4 = 0$ - верно. Разделим:

1	-3	-2	4	
1	1	-2	-4	0

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: $x \in \{1; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases} \quad \text{Пусть } 3y + 6x = 3M$$

Нам надо $3M \rightarrow \max$

$y = M - 2x$. Подставим: $M \rightarrow \max$

$$\begin{cases} |5x - 2M| \leq 2 \quad (1) \\ |4x - M| \leq 1 \quad (2) \end{cases}$$

Докажем (2) на ~~доказ~~ $\frac{5}{4}$:

~~$|8x - 2M| \leq 2$. При этом~~

~~$|\frac{5}{4} \cdot 4x - \frac{5}{4} \cdot M| \leq \frac{5}{4} \Rightarrow |5x - \frac{5M}{4}| \leq \frac{5}{4}$~~

т.е. ~~$|5x - \frac{5M}{4}| = |\frac{5M}{4} - 5x|$, то:~~

$$|5x - 2M| \leq 2$$

$$|\frac{5M}{4} - 5x| \leq \frac{5}{4} \quad |4x - M| \leq 1$$

$\textcircled{*}$ пусть $\begin{cases} 5x - 2M \geq 0 \\ 4x - M \geq 0 \end{cases} : (M \leq \frac{5x}{2})$:

$$5x - 2M \leq 2$$

$$5x - \frac{5M}{4} \leq \frac{5}{4} \quad M \geq \frac{5x - 2}{4}$$

Тогда $M_{\max} = \frac{5x}{2}$. Тогда:

$$\frac{5x}{2} \geq 4x - 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} \leq 1 \quad x \leq \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

M^2
Продолжить.

Тогда $x_{\max} = \frac{2}{3}$. $M_{\max} = \frac{5 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{3}$

$3M_{\max} = 5$

~~②~~ ~~при $5x - 2M \leq 0$ $M \leq \frac{5x}{2}$~~

$$\begin{cases} 5x - 2M \geq -2 \\ 5x - \frac{5M}{4} \geq -\frac{5}{4} \\ 4x - M \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \leq \frac{5x}{2} + 1 \\ M \leq 4x + 1 \end{cases}$$

Примем полагая, что в ② уже нашли M такой, что $M > 0$. Тогда получим также:

~~$\frac{5x}{2} + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{5}$~~

~~②~~ ~~$4x - M \geq 0$~~ ~~$5x - 2M \leq 0$~~

$$\begin{cases} 4x \geq \frac{5x}{2} \\ \frac{2x}{5} \leq \frac{5x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x < \frac{2x}{5} \end{cases}$$

$M_{\max} = 4x$

$5x - 2M \geq -2$

$5x - 8x \geq -2 \Rightarrow 3x \leq 2$

$x \leq \frac{2}{3}$

$x_{\max} = \frac{2}{3}$, $M_{\max} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3M_{\max} = 5$

③ $\begin{cases} 4x - M \leq 0 \\ 5x - 2M \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \geq 4x \\ M \geq \frac{5x}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 4x - M \geq -1 \\ 5x - 2M \geq -2 \end{cases} \Rightarrow M_{\max} = \frac{2}{3} (4x + 1)$ или $M_{\max} = \frac{5x}{2} + 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m + 2n)^2 -$$

$$- 7(m + 2n) = (m + 2n)(m + 2n - 7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 8mn = mn(m + 2n + 8)$$

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} (m + 2n)(m + 2n - 7) = 11p^2 \quad (1) \\ mn(m + 2n + 8) = 75q^2 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} mn(m + 2n + 8) = 75q^2 \quad (2)$$

из (1) ~~пред~~ целую часть: $m + 2n = kp^2, k \in \mathbb{N}$

Тогда: $kp^2(kp^2 - 7) = 11p^2$

$$k(kp^2 - 7) = 11$$

\Leftrightarrow т.к. $k, p \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 1 \\ kp^2 - 7 = 11 \end{array} \right. \quad \left\| \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 11 \\ kp^2 - 7 = 1 \end{array} \right.$$

$$kp^2 - 7 = 11$$

$$kp^2 - 7 = 1$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 18$$

не цел

$$\Leftrightarrow 11p^2 = 8$$

не цел

Заметим $m + 2n \equiv 0 \pmod{p}$ (не цел)

$$m + 2n - 7 \equiv 0 \pmod{p}$$

\Leftrightarrow вычитаем

$$7 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$p = 7$$

Тогда: заменим $m + 2n = t$

$$t^2 - 7t = 11 \cdot 49$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 7t - 539 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. \mathbb{D} не является полным идеалом
то $t \notin \mathbb{N}$

3). $m + 2n - 7 = kp^2$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$(m + 2n) \cdot kp^2 = 11p^2$$

$$(kp^2 + 7) \cdot kp^2 = 11p^2$$

$$(kp^2 + 7) \cdot k = 11$$



$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \\ kp^2 + 7 = 11 \end{array} \right\} \parallel \left\{ \begin{array}{l} k=11 \\ kp^2 + 7 = 1 \end{array} \right.$$

$$p^2 + 7 = 11$$

$$\boxed{p=2}, \text{ ил.}$$

т.к. $kp^2 \geq 1$
 $7 \neq 1$

Теперь вернемся к
исх.

Прим. $7 \neq 0 \pmod{11}$

$$m + 2n - 7 = 4$$

$$m + 2n = 11$$

Подставим $m + 2n = 11$ во второе ур-е:

$$mn(20) = 75q^2$$

$$4mn = 15q^2$$

$$n(N - 2n) = 15q^2$$

т.к. q - простое,
то $q^2 \equiv 0 \pmod{4}$, т.к.

$q^2 \equiv 0 \pmod{4}$, ил. $q^2 \equiv 1 \pmod{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n \geq 3$
7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 106, 109, 112, 115, 118, 121, 124, 127, 130, 133, 136, 139, 142, 145, 148, 151, 154, 157, 160, 163, 166, 169, 172, 175, 178, 181, 184, 187, 190, 193, 196, 199, 202, 205, 208, 211, 214, 217, 220, 223, 226, 229, 232, 235, 238, 241, 244, 247, 250, 253, 256, 259, 262, 265, 268, 271, 274, 277, 280, 283, 286, 289, 292, 295, 298, 301, 304, 307, 310, 313, 316, 319, 322, 325, 328, 331, 334, 337, 340, 343, 346, 349, 352, 355, 358, 361, 364, 367, 370, 373, 376, 379, 382, 385, 388, 391, 394, 397, 400, 403, 406, 409, 412, 415, 418, 421, 424, 427, 430, 433, 436, 439, 442, 445, 448, 451, 454, 457, 460, 463, 466, 469, 472, 475, 478, 481, 484, 487, 490, 493, 496, 499, 502, 505, 508, 511, 514, 517, 520, 523, 526, 529, 532, 535, 538, 541, 544, 547, 550, 553, 556, 559, 562, 565, 568, 571, 574, 577, 580, 583, 586, 589, 592, 595, 598, 601, 604, 607, 610, 613, 616, 619, 622, 625, 628, 631, 634, 637, 640, 643, 646, 649, 652, 655, 658, 661, 664, 667, 670, 673, 676, 679, 682, 685, 688, 691, 694, 697, 700, 703, 706, 709, 712, 715, 718, 721, 724, 727, 730, 733, 736, 739, 742, 745, 748, 751, 754, 757, 760, 763, 766, 769, 772, 775, 778, 781, 784, 787, 790, 793, 796, 799, 802, 805, 808, 811, 814, 817, 820, 823, 826, 829, 832, 835, 838, 841, 844, 847, 850, 853, 856, 859, 862, 865, 868, 871, 874, 877, 880, 883, 886, 889, 892, 895, 898, 901, 904, 907, 910, 913, 916, 919, 922, 925, 928, 931, 934, 937, 940, 943, 946, 949, 952, 955, 958, 961, 964, 967, 970, 973, 976, 979, 982, 985, 988, 991, 994, 997, 1000

Значит $q^2 : n \Leftrightarrow q = 2$
 q - простое

Тогда: $\begin{cases} m + 2n = 11 \\ mn = 15 \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2n = 11 \\ mn = 15 \end{cases}$

т.е. $m + 2n = 11$, $m \leq 11$
 $n \leq 5$

Тогда $mn = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 3 \end{cases}$ (больше)

2) $(m + 2n) \cdot (m + 2n - 7) = 75q^2$

$(m + 2n + 3) \cdot mn = 11p^2$
Али Али

1) $m + 2n = k \cdot q^2$

$kq^2(kq^2 - 7) = 75q^2$

$k(kq^2 - 7) = 75 = 5^2 \cdot 3$

$\begin{cases} k = 1 \\ kq^2 - 7 = 75 \end{cases}$

$q^2 = 82$ не цел

$\begin{cases} k = 3 \\ kq^2 - 7 = 75 \end{cases}$

$q^2 = \frac{32}{3}$ не цел

$\begin{cases} k = 5 \\ kq^2 - 7 = 15 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{22}{5}$ не цел

$q^2 = \frac{22}{5}$ не цел



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

^{1/3}
Продолжить

$$\begin{cases} k = 15 \\ kq^2 - 7 = 5 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{12}{15} \text{ не целое}$$

$$\begin{cases} k = 25 \\ kq^2 - 7 = 3 \end{cases} \text{ не целое} \quad \begin{cases} k = 75 \\ kq^2 - 7 = 1 \end{cases} \text{ не целое}$$

~~Положим $(m, n) = 250A = 75q^2$.~~

$$2). \begin{cases} m + 2n \equiv 0 \pmod{q} \\ m + 2n - 7 \equiv 0 \pmod{q} \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ 7 \equiv 0 \pmod{q} \quad q = 7$$

Заменим $m + 2n = 7$

$$t^2 - 7t = 75 \cdot 7^2$$

$$D = 7^2 + 4 \cdot 75 \cdot 7^2 = 7^2(1 + 300)$$

$$3). \begin{cases} m + 2n - 7 = kq^2, & k \in \mathbb{N} \\ kq^2 + 7 = 75q^2 \end{cases} \text{ не полный квадрат}$$

$$kq^2 + 7 = 75q^2$$

$$k(kq^2 + 7) = 75 = 5^2 \cdot 3$$

\Downarrow

$$\begin{cases} k = 1 \\ kq^2 + 7 = 75 \end{cases} \\ q^2 = 68 \\ \text{не целое}$$

$$\begin{cases} k = 3 \\ kq^2 + 7 = 25 \end{cases} \\ q^2 = 6$$

$$\begin{cases} k = 5 \\ kq^2 + 7 = 15 \end{cases} \\ q^2 = \frac{8}{5} \\ \text{не целое}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нз

Аргумент.

Далее рас-н не нужно, тем.

$$kq^2 + 7 \geq 1, \text{ т.к. } q \geq 2$$

$$k \geq 5$$

Значит таких (m, n) , где $A = 75q^2$ нет.

Ответ: $m = 5; n = 3$

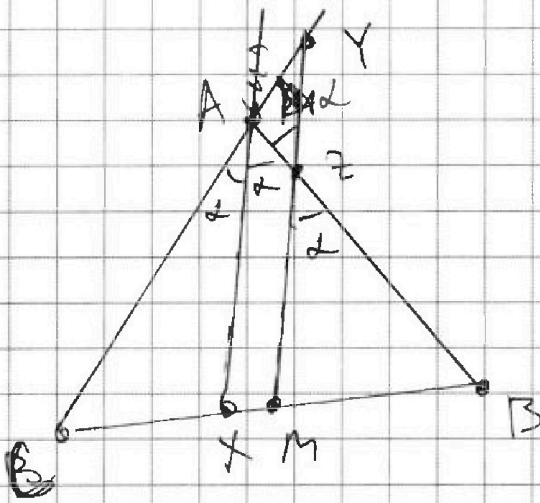


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AZ = 3$$

$$AC = 6$$

$$YZ = 4$$

Найти:

BC

Р-е

Пусть $\angle YAZ = \alpha$, углы μ/ν биссектрис AX и AC

$YZ \parallel AX \Rightarrow \angle AYZ = \alpha$

$$\angle MZB = \alpha$$

Тогда $\angle AZY = \alpha$ (верт.) $\Rightarrow \triangle AYZ - \text{равн.}$

$AZ = AY = 3$. Тогда по т. косинусов в

$$\triangle AYZ: 3^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$. По т. Менелая для $\triangle CYM$
и секущей AB:

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{4}{YM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow YM = 4. \text{ По т. Менелая}$$

для $\triangle ABC$ и секущей YM:

$$1 \cdot \frac{BZ}{3} \cdot \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow BZ = 9. \text{ Значит по}$$

т. косинусов для $\triangle BZM$:

$$MB^2 = 4^2 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \cos \alpha = 16 + 81 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

Треугольник.

$$MB^2 = 16 + 81 - 2 \cdot 8 \cdot 7 = 97 - 112 = 49$$

$$MB = 7 \Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x+y^2} \\ x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \end{cases}$$

Введём функцию $f(t) = t^3 + 3t + \sqrt{2t}$.

При этом $t \geq 0$. Заметим, что данная функция монотонно возрастает, т.к. t^3 монотонно возрастает, $3t$ монотонно возрастает, $\sqrt{2t}$ монотонно возрастает. Значит имеем:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y. \text{ Тогда:}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$14 + 5x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 \leq 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 14 = 25 + 56 = 81$$

$$x_1 = \frac{5+9}{2} = 7 \Rightarrow x \in [0; 7]$$

$$x_2 = \frac{5-9}{2} = -2. \text{ Тогда:}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

Введём замену: $\sqrt{x+2} = \alpha$

$$\sqrt{7-x} = \beta$$

$$\alpha - \beta + 7 = 2\alpha \cdot \beta$$

$$\beta(2\alpha + \beta) = \alpha + 7 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 7}{2\alpha + 1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5

Продолж.

$$\sqrt{x+2} = a; \quad \sqrt{7-x} = b:$$

$$a - b + 7 = 2ab \Rightarrow \cancel{b} = \frac{a+7}{2ab}$$

$$a + 7 = b \cdot (2a + 1)$$

$$a^2(4b^2 - 1) + 49 - b^2 = b^2(4a^2 + 4a + 1)$$

$$a^2(4b^2 - 1) + 49 - b^2 = a(4b^2 - 4a)$$

$$a - b = 2ab - 7$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 28ab + 49$$

$$a^2(4b^2 - 1) - 26ab + 49 - b^2 = 0$$

$$26ab = (x+2)(6-x) + 49 - x$$

$$26ab = -x^2 + 9x + 54$$

$$26^2 \cdot (x+2)(6-x) = (-x^2 + 9x + 54)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

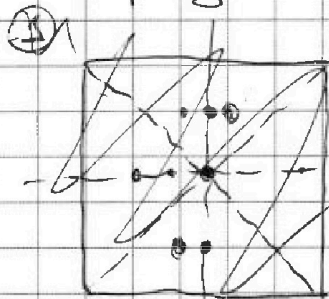
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Если бы условие теоремы не было, то верш. C_{121}^2 . Рас-м как можно повернуть один способ раскраски.



Эта фигура при повороте раскраски поворачивается относительно центра

②



Все точки симметричны
через центр будут
давать две раскраски
при повороте (которые
раньше считались за
одну)

Точки не симм. через центр - 4 раскрас.

Выберем одну точку: 121 верш. -

симметричная ей - 1 верш. 3 точки

$$C_{121}^2 = 120 \quad (\text{кроме одного верш. центр})$$

$$\frac{120}{2} + \frac{120}{2} = \text{Ответ.}$$

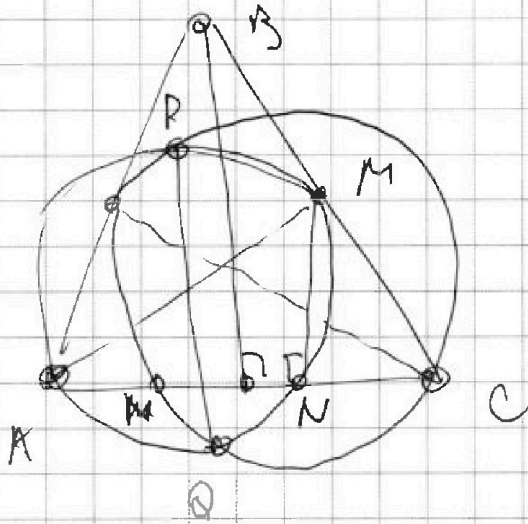


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$MN \parallel PQ$, $\angle M$
 \Downarrow
 $\angle ANM = 90^\circ$
 $PMNQ$ - ρ / σ трапеция

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит: $\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1} \quad a = \frac{\sqrt{5+7}}{2\sqrt{5} + 1}$

$\sqrt{7-x} \cdot (2\sqrt{x+2} + 1) = \sqrt{x+2} + 7$ $\sqrt{5+7} = \sqrt{5+7}$
 $\sqrt{5} = \sqrt{5}$

т.к. обе части ≥ 0 , то \Leftrightarrow заменим

~~$(7-x)(2\sqrt{x+2} + 1) = \sqrt{x+2} + 7$~~ $\sqrt{x+2} = \alpha$
 $\sqrt{7-x} = \beta$

~~$\beta(2\alpha + 1) = \alpha + 7$~~ $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{6+7}}{2\sqrt{6} + 1}$

~~$\beta^2(4\alpha^2 + 2\alpha + 1) = \alpha^2 + 14\alpha + 49$~~

~~$\alpha^2(4\beta^2 - 1) + \alpha(4\beta^2 - 14) + \beta^2 - 49 = 0$~~

~~$(x+2)(4(7-x) - 1) + \sqrt{x+2}(4(7-x) - 14) + 7 - x - 49 = 0$~~ $2\sqrt{18} + \sqrt{3} = \sqrt{6+7}$

~~$\sqrt{7-x}$~~ т.к. обе части ≥ 0 , то \Leftrightarrow $4 \cdot 18 + 3 + 4\sqrt{18 \cdot 3} =$

~~$(7-x)(4(x+2) + 4\sqrt{x+2} + 1) = 4x + 28 + 4\sqrt{x+2} + 14\sqrt{x+2}$~~

~~$28(x+2) + 28\sqrt{x+2} + 7 - x(4(x+2) + 4\sqrt{x+2} + 1) =$~~
 ~~$= x + 51 + 14\sqrt{x+2}$~~ $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{7+7}}{2\sqrt{7} + 1}$

~~$27 - 12 + 27x + 14\sqrt{x+2} = x(4(x+2) + 4\sqrt{x+2} + 1)$~~ $2\sqrt{14} + \sqrt{2} = \sqrt{7+7}$

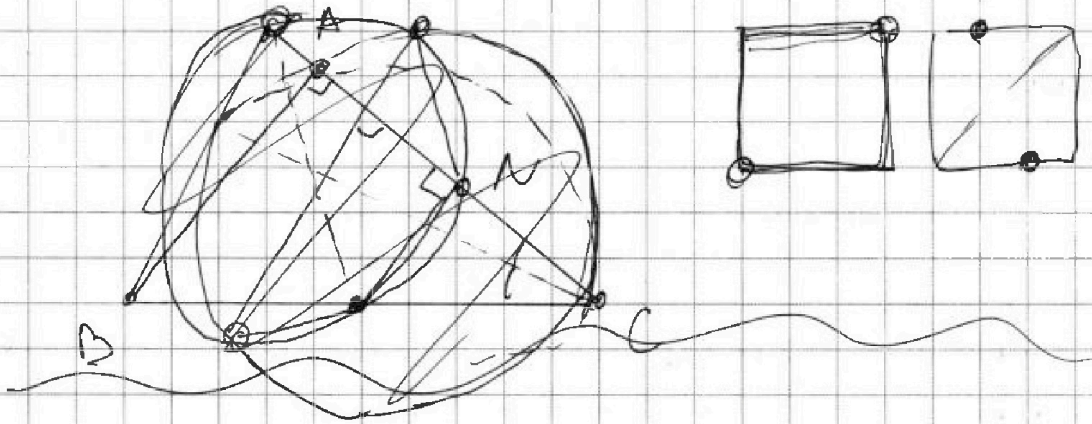


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$x+2 + 49 + 14\sqrt{x+2} = 4(x+2)(7-x) +$$

$$+ 4(7-x)\sqrt{x+2} + 7-x$$

$$x+51 + 14\sqrt{x+2} = 4(14 + 5x - x^2) +$$

$$+ 4(7-x)\sqrt{x+2} + 7-x$$

$$2x + 12 + 14\sqrt{x+2} = 20x - 4x^2 + 4(7-x)\sqrt{x+2}$$

~~$$4x^2 + 18x$$~~

$$4x^2 + 18x + \sqrt{x+2} \cdot (x-14) + 12 = 0$$

~~$$2x^2 + 8x + 6$$~~

~~$$D = 31 - 4 \cdot 4 = 31 - 16 = 15$$~~

~~$$4x^2 + 18x + 42$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5 Продолж.

~~$$-12 + 27x + 14\sqrt{x+2} = 4x^2 + 8x + 4\sqrt{x+2} + x$$~~

~~$$-6 + 9x + 7\sqrt{x+2} = 2x^2 + 2x \cdot \sqrt{x+2}$$~~

~~$$x=2 \quad -6+18+14=8+14$$~~

Т.к. при $x \geq 0$ правая функция

строго возрастает

и левая функция строго возрастает, \therefore найдем корни: $x=2$:

~~$$-6 + 18 + 7 \cdot 2 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \text{ верно}$$~~

Ответ: $x=2; y=2$

$$\sqrt{7-x} (2\sqrt{x+2} + 1) = \sqrt{x+2} + 7$$

$$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$$

$$x=1$$

$$x=0$$

$$\sqrt{7} = \frac{\sqrt{3} + 7}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\sqrt{14} + \sqrt{7} = \sqrt{2} + 7$$

$$\sqrt{7}(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + 7$$

$$14 + 7 + 2\sqrt{14} \cdot 7 = 2 + 49 + 2$$

$$\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3} + 7}{2\sqrt{3} + 1}$$

$$2\sqrt{18} + \sqrt{6} = \sqrt{3} + 7$$

$$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$$

$$\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

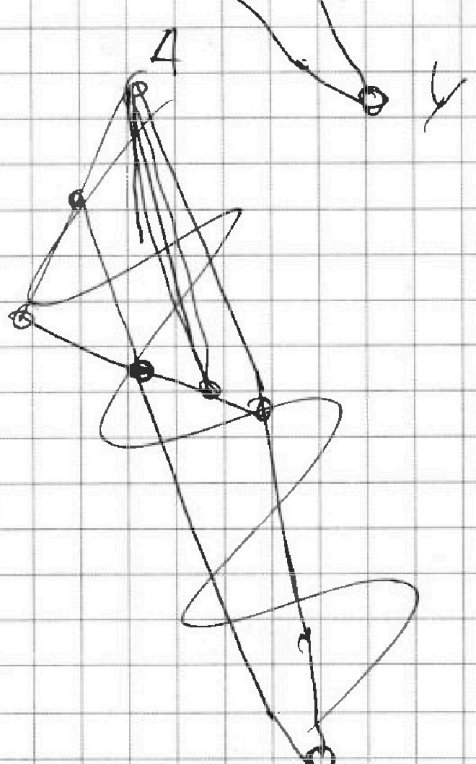
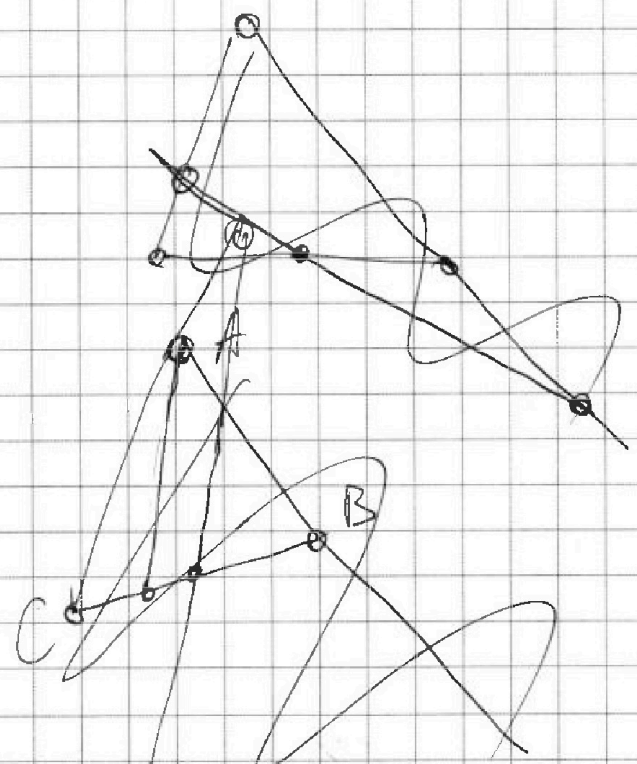
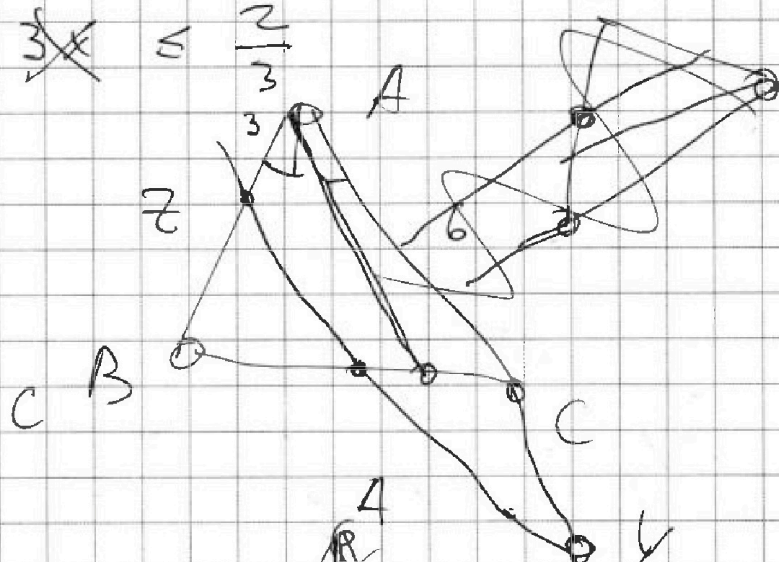
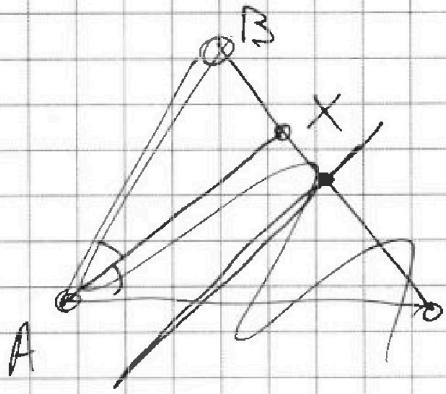
$$\begin{cases} 5x - 2M \geq -2 \\ 4x - M \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} M \leq \frac{5x}{2} + 1 \\ M \leq 4x + 1 \end{cases}$$

~~$5x - 8x + 2 \geq -2$~~ $M_{\max} = 4x + 1$

$$\frac{5x}{2} + 1 \geq 4x \quad | \cdot 2$$

$$M_{\max} = \frac{5x}{2} + 1$$

$$\frac{5x}{2} \leq \frac{2}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подготовим все ^{нз} из ^{Продолж.} этих x :

$$\begin{cases} 4x + 5 \geq \frac{5x}{2} \\ \frac{5x}{2} + 5 \geq 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\max} = \frac{2}{3} \\ 3x_{\max} = 5 \end{cases}$$

Ответ: 5

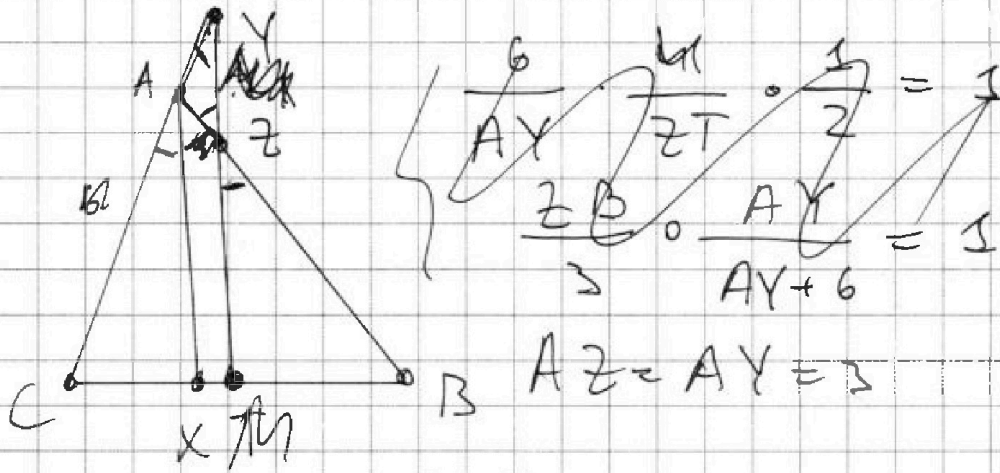


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AZ = AY = 3$$

$$ZM = \dots$$

$$2 + \sqrt{5} + z = 2\sqrt{20}$$

$$2 + \sqrt{5} + z = 4\sqrt{5} = 2 \cdot 5\sqrt{5} = 10$$

$$\sqrt{5} = 2 + z = 2 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$x = 6$$

$$2\sqrt{2} - 1 + z = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\alpha - \beta + z = 2\sqrt{2} = 6$$

$$\beta = \frac{\alpha + z}{2}$$

$$\sqrt{7-x} = \frac{2\alpha + 1}{\sqrt{x+2} + 7}$$

$$2\sqrt{x+2} + 1$$

$$7-x = \frac{x+2+49+14\sqrt{x+2}}{4x+8+1+4\sqrt{x+2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

$$x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2$$

$$\sqrt{x+2} = 2$$

$$x+2 = 4$$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{5x + (2-y)(2+y)}$$

$$2x^2 + 3 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{3+3x+\sqrt{2x}}$$

$$x \geq 0$$

$$1, 3, 5 \oplus$$

$$2x^2 + 3 + \frac{1}{\sqrt{2x}} \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x \rightarrow \max$$

$$f(a, b) = a - 2b$$

$$\begin{cases} |y - 2x| \leq 2 \\ |x - 2y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |f(y, x)| \leq 2 \\ |f(x, y)| \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x = 3M$$

$$y = M - 2x$$

$$\begin{cases} |5x - M| \leq 1 \\ |5x - M| \leq 1 \end{cases}$$

$$y = f(M, x)$$

$$|x| \leq 3$$

$$M > 0$$

$$x \in [-3; 3]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

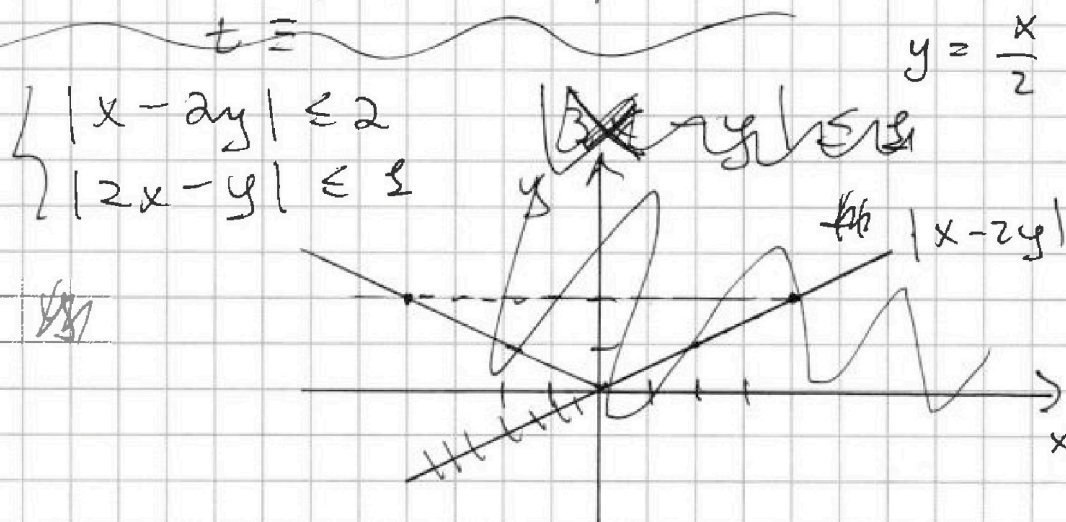
1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим каждую из корней: $m+2r=kp$
 $x=1$. Тогда: $a_n = -3$
 $a_6 = 1$
 $a_{30} = 9$ } верно
 $x=1+\sqrt{5}$ } $kp^2(kp^2-2) = 11\tilde{p}$

Ответ: $x=1; 1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}$ } $t=m+2n$
 $A=t(t-7)$; $B=mn(\frac{1}{2}+16)$
 $t(t-7) = 11p^2$ $75 = 25 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3$
 $mn(t+16) = 75q^2$
 $t \equiv 0 \pmod{11}$
 $t \equiv 7 \pmod{11}$
 $t \equiv 0 \pmod{p^2}$
 $t \equiv$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$$\begin{cases} a+3d = 6-9x \\ a+5d = (x^2-2x)^2 \\ a+9d = 9x^2 \end{cases}$$

$$2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x$$

$$4d = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 13x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

~~$$x^2 - 4x + 1 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$$~~

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

~~$$3y+6x = M \rightarrow \max$$~~

$$3y+6x = 3M$$

$$y = M - 2x$$

$$\begin{cases} |x-2M+4x| \leq 2 \\ |2x-M+2x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |5x-2M| \leq 2 \\ |4x-M| \leq 1 \end{cases}$$

~~$$3 \geq |5x-2M| + |4x-M| \geq |9x-3M|$$~~

$$\left| \frac{3M}{4} \right| \leq \frac{13}{4}$$

$$|M| \leq \frac{13}{3}$$

$$\begin{cases} |5x-2M| \leq 2 \\ |5x-2M| \geq -2 \\ |4x-M| \leq 1 \\ |4x-M| \geq -1 \end{cases}$$



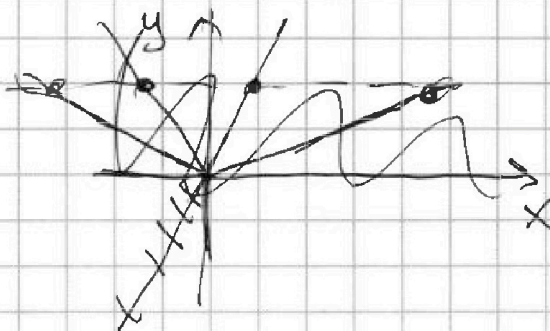
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$



$$y = \frac{2}{1}x - \frac{1}{2}$$

$$3y + 6x = 3M$$

$$y = M - 2x$$

$$\begin{cases} |5x - 2M| \leq 2 \\ |4x - M| \leq 1 \end{cases}$$

$$M \leq \frac{5x}{2}$$

$$x \geq \frac{2M}{5}$$

$$\begin{cases} 5x - 2M \leq 2 \\ 4x - M \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2M + 2 \geq 5x \\ M + 1 \geq 4x \end{cases}$$

$$|9x - 3M| \leq 3$$

$$|3x - M| \leq 3$$

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n =$$

$$= (m + 2n)^2 - 7(m + 2n) = (m + 2n) \cdot$$

$$(m + 2n - 7)$$

$$m + 2n = x$$

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m + 2n + 9)$$

$$A = x(x-7); \quad B = mn(x+9)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

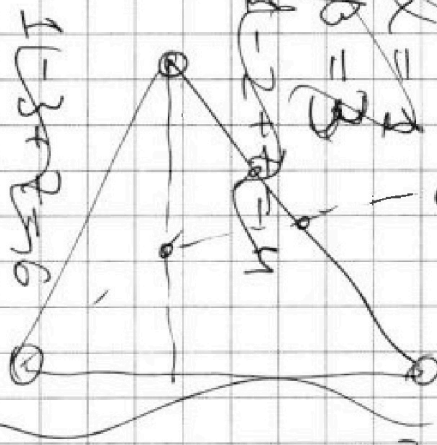
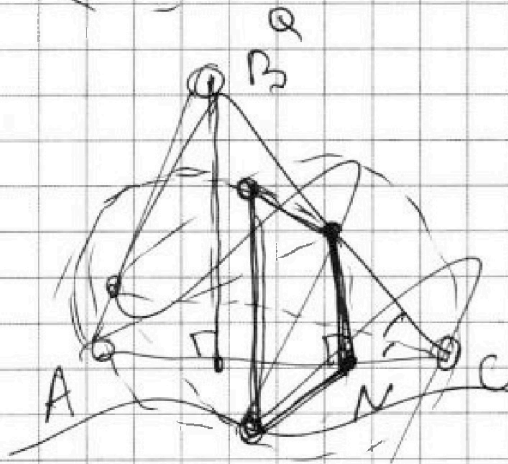
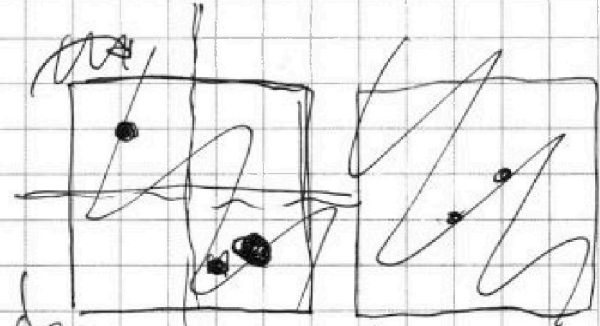
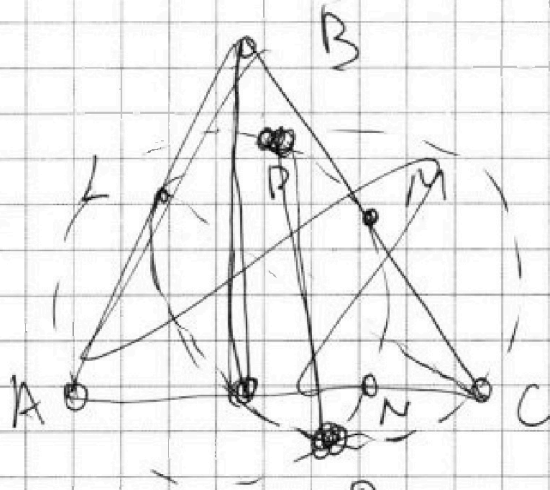


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

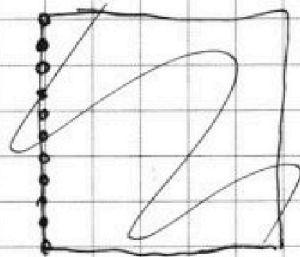
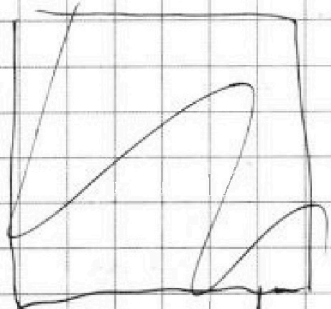
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

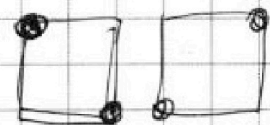
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



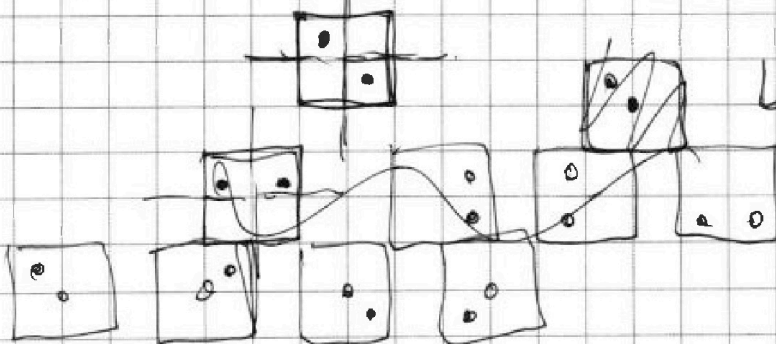
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$
 $\alpha - \beta + 7 = 2\alpha \cdot \beta$
 $1 + \alpha^2 + \beta^2$



C_{12}^1
 C_{12}^2
 C_{12}^1



и наоборот



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{x+2} \sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$ Заметим, что $\sqrt{7-x}$ убывает. $\frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1}$ тоже убывает
 \downarrow
 одно переменные. Попробуем переобратить $x=5$~~

~~$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{7+2}}{2\sqrt{7+2}}$ $\sqrt{7+2} = 2\sqrt{4} + \sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{7}$
 $7+4+2\sqrt{7} = 8\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$
 $\sqrt{7-x} = \frac{\sqrt{x+2} + 7}{2\sqrt{x+2} + 1} \cdot \frac{(\sqrt{x+2} - 7)}{(\sqrt{x+2} - 7)}$
 $= \frac{x+2-49}{(2\sqrt{x+2} + 1)(\sqrt{x+2} - 7)} = \frac{x-47}{2x+4-12\sqrt{x+2}-7}$~~

Заменим $x+2 = a$; $\sqrt{7-x} = \beta$:

~~$a - \beta + 7 = 2a\beta$ т.к. одно перемен \rightarrow (a, β)~~