



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14 + 5x - y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
↓ ИЗ ↓

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1: $\{Q_4\} - \text{пр. кругл. квадр.}$

$$Q_4 = 6 - g_x$$

$$Q_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$Q_{10} = g_{x^2}$$

$$Q_6 = Q_4 + 2d \Rightarrow 2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + g_x - 6$$

$$Q_{10} = Q_6 + 4d$$

$$\Rightarrow g_{x^2} = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + g_x - 6)$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = g_{x^2}$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\text{корень } x=1 \text{ но } 4 \neq 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$x=1 \text{ тоже коренит}$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \mid x-1$$

$$x^3 - x^2 \mid x^2 - 2x - 4$$

$$-2x^2 - 2x$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$-4x + 4$$

$$-4x + 4$$

$$0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$(1) = 4 + 4 = 8 \Rightarrow x = \frac{8 + 2\sqrt{16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$0+6x: x=1, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$$

$$D = 4 + 16 = 20 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Other: } x = 1; 1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Найти наиб. знач. $6x + 3y$, при $\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$ раскроем нер-ва с модулем как систему

$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x - y \leq 1 \\ 2x - y \geq -1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \geq \frac{x}{2} - 1 \\ y \leq \frac{x}{2} + 1 \end{array} \right. \text{ вертикальная инт-ховка}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \geq 2x - 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{array} \right. \text{ горизонтальная инт-ховка}$$

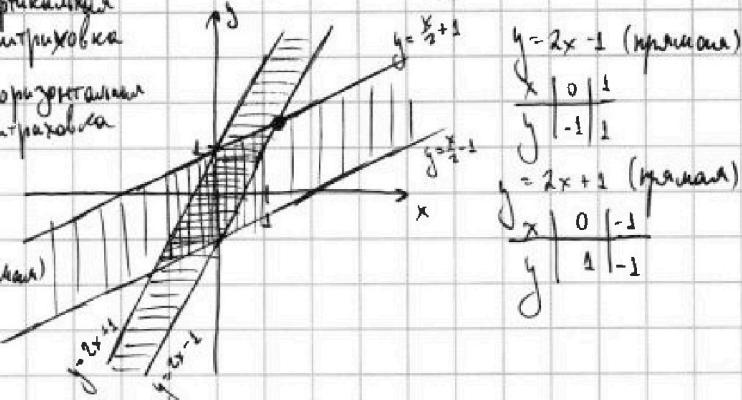
изобразим это на графике

$$y = \frac{x}{2} - 1 \quad (\text{прямая})$$

x	0	2
y	-1	0

$$y = \frac{x}{2} + 1 \quad (\text{прямая})$$

x	0	-2
y	1	0



Место пересечения инт-ховок является множеством решений системы

$6x + 3y$ будет наибольшим, когда x и y примут наибольшие значения. Из графика видно, что среди решений системы существует точка с наибольшими возможными знач. x и y . Это точка пересечения $y = 2x - 1$ и $y = \frac{x}{2} + 1$. Найдём её:

$$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$$

$$4x - 2 = x + 2$$

$$3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{5}{3}. \text{ Это точка } \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow$$

Ответ: 13.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (m, n) - натуральные числа

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n-7)(m+2n)$$

$$b_3 = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Одно из них $11p^2$, а другое $75q^2$, где p и q - простые числа

1) Итак $A = 11p^2 \Rightarrow [m+2n-7 : 11]$ Одновременно они делятся на 11 не могут, т.к. тогда их разность 11 $\Rightarrow 7 : 11$, это не квадрат

1. $m+2n : 11$

\Rightarrow рассмотрим, какая из скобок $: p$ и p^2
1. $m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n = 11p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 1$ (иначе $A \neq 11p^2$) \Rightarrow
 $\Rightarrow m+2n = 8 \Rightarrow m+2n \neq 11 \Rightarrow \cancel{\text{}}$

2. $m+2n : p \quad | \Rightarrow m+2n - (m+2n-7) : p$
 $m+2n-7 : p \quad | \Rightarrow 7 : p \Rightarrow p = 7$ (p - простое число) \Rightarrow
 \Rightarrow т.к. $A = 11p^2$, то $m+2n = 11p \Rightarrow m+2n = 77$ \Rightarrow $m+2n-7 = p \Rightarrow m+2n = 14 \Rightarrow \cancel{\text{}}$
 $p = 7$

3. $m+2n-7 : p^2 \quad | \Rightarrow m+2n = 11$
 $(m+2n \neq p) \Rightarrow m+2n-7 = p^2 = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow A = 44$

\Rightarrow при $m+2n=11$ число A удовл. усло. подберём все пары натуральных m и n : $m+2n=11$ в проверки получают ли в подч.:

$$(1; 5) \Rightarrow b_3 = 1 \cdot 5 \cdot (1+10+9) = 100 \Rightarrow \cancel{75}$$

$$(3; 4) \Rightarrow b_3 = 3 \cdot 4 \cdot (3+8+9) = 20 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow \cancel{75}$$

$$(5; 3) \Rightarrow b_3 = 5 \cdot 3 \cdot (5+6+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow b_3 = 75 \cdot 4 \Rightarrow \text{подходит}$$

$$(7; 2) \Rightarrow b_3 = 7 \cdot 2 \cdot (7+4+9) = 7 \cdot 2 \cdot 20 \Rightarrow \cancel{75}$$

$$(9; 1) \Rightarrow b_3 = 9 \cdot 1 \cdot 20 \Rightarrow \cancel{75}$$

2. $m+2n-7 : 11$

1. $m+2n-7 : p^2 \Rightarrow m+2n = 1 \Rightarrow m+2n-7 = -6 \Rightarrow \cancel{\text{}}$

2. $m+2n-7 : p \Rightarrow p = 7 \Rightarrow m+2n-7 = 77 \Rightarrow \cancel{\text{}}$
 $m+2n : p \qquad \qquad \qquad m+2n = 7$

3. $m+2n : p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 11 \Rightarrow m+2n = p^2 = 12 = 2 \cdot 9 \Rightarrow \cancel{\text{}}$

Второй способ разбора



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

$$2) \text{Учтб } b_3 = 11p^2$$

$$b_3 = m \cdot n (m+2n+g)$$

$$1. m=1 : n(2n+10) = 11p^2$$

$$2n(n+5) = 11p^2 \Rightarrow p^2 : 2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow p^2=4$$

$$\Rightarrow n(n+5) = 22 ; n^2 + 5n - 22 = 0 ; D = 25 + 88 = 113$$

Очевидно, что натуральных корней нет

$$2. m=2 : m(m+10) = 11p^2$$

$$\text{учтб } m \neq 11 \Rightarrow m+11 \neq 11 \Rightarrow b_3 \neq 11 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{учтб } m \neq 11 \Rightarrow m+11 \neq 11 \Rightarrow 11 : 11^2 \Rightarrow b_3 = 11^3 \quad (p=11)$$

$$m(m+11) = 11^3 \quad \text{решени 1 натуральных числах}$$

$$1 \quad 11^3$$

$$11 \quad 11^2$$

$$11^2 \quad 11$$

$$11^3 \quad 1$$

Очевидно, что и 1 уравнение случаев решения нет

$$3. m+2n+g = 1 \quad - \text{ это невозможно, т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

\Rightarrow все множители $> 1 \Rightarrow$ \forall из них это ~~число~~ 11, p или p

$$\text{т.к. } n, m \in \mathbb{N}, \text{ то } m+2n+g > m, n \Rightarrow m+2n+g = 11$$

$$m+2n = 2$$

но при $m=1, n=1 : m+2n=3$, то
уме $> 2 \Rightarrow$ нет решений

Случай разобран.

Ответ: (5; 3)

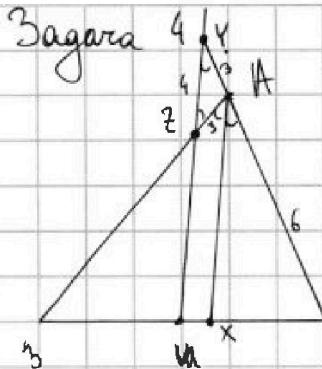


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: 1) $\angle AXY$ - неизвестный; 2) $AZ \perp BC$; 3) $ZY = YB$;

4) $Z \in XY$; 5) $Y \in AC$; 6) $AC = 6$; $AZ = 3$; $YZ = 4$

Найдено: $b_3 C$

Решение: 1) $\angle AXY$ - неизвестный; 2) $\angle b_3 A X = \angle X A C$ |
 3) $A X \parallel Y C$ (усл.) $\Rightarrow \angle b_3 X C = \angle X A C$ (согл. $Y A$ -внешн.) (об-ко // приз)

$\angle Y Z A = \angle Z A X$ (паралл. лин.; $Z A$ -внешн.)

$$\Rightarrow \angle A Y Z = \angle Y Z A \Rightarrow \angle A Y Z = \text{прям.} \Rightarrow A Z = A Y = 3 \quad (\text{усл. 3 опр.})$$

2) $A X \parallel Y C$ (усл.) \Rightarrow по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{A C}{Y A} = \frac{X C}{X M} = \frac{2}{1} \Rightarrow X C = 2 X M \quad | \Rightarrow 3 X M = C M = \frac{1}{2} b_3 C - \\ X C + X M = C M = \frac{1}{2} b_3 C \quad = b_3 M$$

$$3) \frac{b_3 Z}{A Z} = \frac{b_3 M}{X M} \Rightarrow \frac{b_3 Z}{3} = \frac{3 X M}{X M} \Rightarrow b_3 Z = 9 \Rightarrow A b_3 = 12$$

$$3) A Y C \sim X M C \Rightarrow (u_{\text{н.2}}) \quad X C = 2y; \quad b_3 X = 4y; \quad b_3 C = 6y$$

Уравнение биссектрисы: $A X^2 = A b_3 \cdot A C - b_3 X \cdot X C = 72 - 8y^2$

$$4) A X \parallel Y C \quad (\text{усл.}) \Rightarrow \begin{cases} \triangle M b_3 Z \sim \triangle X b_3 M \\ \triangle A X C \sim \triangle Y A C \end{cases} \quad (\text{по теореме о подобии}) \Rightarrow \frac{A X}{b_3 M} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad | \Rightarrow$$

$$\frac{A X}{(2M+4)} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2M+4}{2M} = 2 \Rightarrow 2M+4 = 28M \quad \text{или} \quad 2M = 4 \Rightarrow A X = \frac{16}{3}$$

$$5) A X^2 = 72 - 8y^2 \quad (\text{н.3}) \Rightarrow 72 - 8y^2 = \frac{256}{9} \\ A X = \frac{16}{3} \quad (\text{н.4}) \quad 8(9 - y^2) = 256 \Rightarrow 9 - y^2 = \frac{32}{9}; \quad y^2 = 81 - 32 \\ \Rightarrow y^2 = \frac{49}{9} \Rightarrow y = \left[\begin{array}{l} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{array} \right] \quad \text{неудов.} \Rightarrow b_3 C = 6y = \frac{6 \cdot 7}{3} = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Задача 5} \quad \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} & (1) \\ x^3 + 3x + \sqrt{2}y = y^3 - \sqrt{2}x + 3y & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ограничение: (системе есть $\sqrt{2}x, \sqrt{2}y, \sqrt{7-y} \Rightarrow$)
 $\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}$

$$(2) x^3 + 3x + \sqrt{2}x = y^3 + 3y + \sqrt{2}y \\ x, y \geq 0 \quad (\text{из ограничения})$$

Обозначим, что $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2}x$ строго возрастает на $x \in [0; +\infty)$

$$\begin{cases} f(x) = f(y) \\ x \in [0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = y \quad (\text{т.к. } \# \text{ знач. аргумента соотв. ровно одн. знач.} \quad q-\text{чан})$$

$$(1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \quad (0 \leq x \leq 7)$$

$$1) \text{ Используем } \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t \Rightarrow t^2 = x+2 + 7-x - 2\sqrt{14+5x-x^2} \\ 2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-t^2$$

$$2) t+7 = 9-t^2, \quad t^2+t-2=0$$

$$\begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1 \\ 0 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$3) \text{ Обратная замена: } 1. \quad 2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-1 = 8 \quad (0 \leq x \leq 7)$$

$$14+5x-x^2 = 16$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0; \quad D = 25 - 8 = 17$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \quad (x > 0; \sqrt{17} < \sqrt{15} = 5 \Rightarrow x < \frac{5+5}{2} = 5 < 7) \\ x = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \quad (5 > \sqrt{17} \Rightarrow x > 0; 5 < 7 \Rightarrow x < 7) \end{cases} \Rightarrow \text{решения } \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$2. \quad 2\sqrt{14+5x-x^2} = 5 \quad (0 \leq x \leq 7)$$

$$4(14+5x-x^2) = 25$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0; \quad D = 400 + 486 = 886 = 16 \cdot 55 \Rightarrow x = \frac{20 \pm 4\sqrt{55}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{55}}{2}$$

$$x = \frac{5+\sqrt{55}}{2}; \quad \sqrt{55} < \sqrt{64} = 8 \Rightarrow x < \frac{5+8}{2} = 6,5 \quad 5 < \sqrt{55} \Rightarrow 5 + \sqrt{55} > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$y = \frac{5-\sqrt{55}}{2}; \quad 5 < \sqrt{55} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \text{не получают}$$

$$\Rightarrow \text{Решения: } \left(\frac{5+\sqrt{55}}{2}, \frac{5-\sqrt{55}}{2} \right)$$

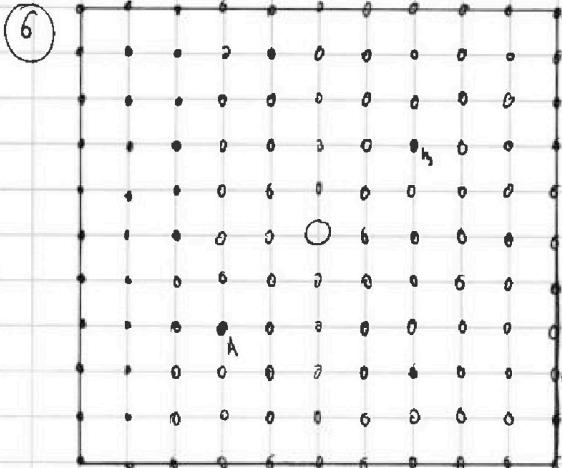
$$\text{Ответ: } \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2} \right); \quad \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right); \quad \left(\frac{5+\sqrt{55}}{2}, \frac{5-\sqrt{55}}{2} \right)$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов $(10+1)(10+1) = 121$ штука

\Rightarrow всего способов выбрать 2 узла из них

$C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2}$ - это количество раскрасок, которые могут отличаться друг от друга на поворот, но не сдвигают изображение

Если 2 узла сетки лежат на одинаковых расстояниях до центрального узла (отмечен

большими кругами) и ~~есть общая~~ на одной прямой с ним (все три точки на одной прямой) - например как точки v_1, v_2 на рисунке - то при повороте на 180° ~~не~~ вращает! v_1, v_2 ~~остаются~~ ~~раскраски~~ ~~такие~~, ~~но~~ не ~~изменяют~~ а $v_3 - v_4$ да. \Rightarrow Если v_1, v_2 не лежат под описанные выше условия, то ~~нет~~ нет такого поворота, при котором ~~одна~~ ~~раскраска~~ ~~изменяется~~ друг в друга (при этом ~~поворот~~ на 180° не сдвигает изображение). \Rightarrow Центр вращения, т.е. центрального узла)

\Rightarrow Итак, симметричные отк. центра вращения при подсчете C_{121}^2 дают по 2 раскраски в общей сумме (ост. 2 симметричные ~~раскраски~~ дают 1 пару), всего раскрасок, которые дают 2 точки - 4, т.к. 4 поворота: на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$). Остальные пары точек дают по 4 раскр.! общее число. Итак, будет суммарное кол-во пар.

Подсчитаем количество пар, которые дают по 2 раскраски. Это можно сделать по рисунку (различные пары считаются пары, у которых хотя бы одна из них имеет различия) \Rightarrow их 36. Но если любую из них повернуть на 90° , то получится пара, которая тоже входит в эти 36, \Rightarrow соответ. с усл. задачи эта 36 пар дают 18 различных раскрасок.

$\Rightarrow C_{121}^2 - 36 = 7224$ пар, которые дают по 4 раскраски \Rightarrow различных из них $\frac{7224}{4} = 1806 \Rightarrow$ всего расср. $1806 + 18 = 1824$. Ответ: 1824 разн. раскрасок



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик ①

$$Q_4 = 6 - 8x$$

$$Q_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$Q_{10} = 8x^2$$

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 6}{2} = Q_5 = 6 - 8x + d$$

$$Q_d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x - 6$$

$$Q_4 > Q_6 > Q_{10}$$

$$6 - 8x > 8x^2$$

$$\begin{cases} 6 - 8x > x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 > 8x^2 \end{cases}$$

$$y_x^2 + 8x - 6 < 0$$

$$-3 > d = 2$$

$$x^2(x-5)(x+1) > 0$$

$$\sqrt{3} < 6$$

$$1$$

$$x \rightarrow 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

$$(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$$

$$x = -3 \pm \sqrt{3}$$

$$9$$

$$d < 0; \quad \text{но } Q_{10} > 0$$

$$\Rightarrow 6 - 8x + 8d = 8x^2$$

$$x = -1; \quad Q_{10} = 15$$

$$6 - 8x > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$Q_6 = 9$$

$$Q_{10} = 9$$

$$6 \quad x \in [-1, \frac{1}{2}]$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x - 6) = 8x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 8x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x = 1; \quad 1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0 \quad (x-1)^2 \subset x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 6x - 4 \\ \hline x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

$$\frac{56}{4} = 14$$

$$\begin{array}{r} -2x^3 + 6x \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x \\ \hline -4x^2 - 8x - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 896 \\ 52 \\ \hline 326 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 896 \\ 80 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$56 = 8 \cdot 7 =$$

$$16 \cdot 4 = 64 = 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 &= 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^2 + 3x - \cancel{\sqrt{2y}} &= y^2 - \sqrt{2x+3y} \\ x^2 + 3x + \sqrt{2x} &= y^2 + 3y + \sqrt{2y} \end{aligned}$$

Это же строка нер. φ -чии
($x \geq 0, y \geq 0$)

$$\Rightarrow x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} \quad (x+2)(7-x) = 14+5x-x^2$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 &= x+2+7-x - 2\sqrt{14+5x-x^2} \\ 2\sqrt{14+5x-x^2} &= -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 121-60= \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7260 \\ - 36 \\ \hline 7224 \end{array}$$

$$9-t^2 = t+7 \Rightarrow t^2+t-2=0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{x+2} &= x+7-x \\ x+2 &= 1+2-x+2\sqrt{2x} \\ x+2+7-x+2\sqrt{14+5x-x^2} &= 1 \\ 2\sqrt{14+5x-x^2} &= 3 \\ 14+5x-x^2 &= 16 \\ x^2-5x+2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 7224 \\ - 1806 \\ \hline 5418 \end{array}$$

$$0 \leq x \leq 7$$

$$0=25-8=17$$

$$x^2-4x-5$$

$$\begin{aligned} ②) \alpha_4 &= 6-4x \\ \alpha_4 &= (x^2-2x)^2 \\ \alpha_4 &= 4x^2 \\ x &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2+3x-6 &: 6 \\ 3x^2+3x-2 &: 2 \\ 3x(x+1) &: 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2+x+5x+3 & \\ x^4-4x^3-5x^2 &: 4 \\ x^2(x+1)(x-5) &: 4 \\ 2=1+4 \cdot \frac{1}{2}=2+2=4 & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3x-6=6d \\ 3x^2+3x-2=2d \\ x^4-4x^3-5x^2=4d \end{cases}$$

$$x^4-4x^3+4x^2+3x-7=2d \quad 1) x:2; 2) x:2; 3) x:4$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33+24d}}{6}$$

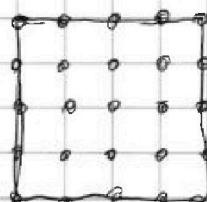
$$\begin{array}{r} 25 \\ - 12 \\ \hline 13 \\ - 10 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 250 \\ - 150 \\ \hline 100 \\ - 50 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 250 \\ - 150 \\ \hline 100 \\ - 50 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$(x+1)^2 \quad 1) \text{ наименьшее значение: } 4 \text{ см.}$$

1) если точки находят друг 1 друга (обе) или находятся ~~одинаково~~, то находят 2 саби расстр \rightarrow таких пар 12



2) если нет, то 4

$$C_{15}^2 = \frac{25 \cdot 24}{2} \quad \text{н. выбрать 2 точки}$$

(некрасиво)

$$300-24=276 \quad \begin{array}{r} 64 \\ + 12 \\ \hline 82 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ - 74 \\ \hline 202 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ - 74 \\ \hline 202 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ - 74 \\ \hline 202 \end{array}$$

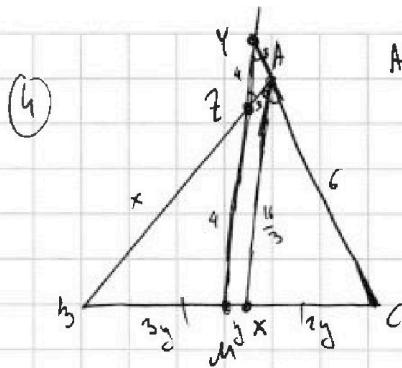
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 6 \quad \frac{h_M}{h_X} = \frac{x}{3} \Rightarrow$$

$$YZ = 6$$

$$h_M \cdot h = xy; h_X = 3y \Rightarrow h_X = (x+3) \cdot y$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ - 3 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ - 2 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\frac{h_X}{h_C} = \frac{h_A}{AC} = \frac{x+3}{6} \quad \frac{256}{y} = 8(9-y^2)$$

$$32 = 81 - 8y^2; y^2 = 4y; y = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow h_C = 6y = 7 \cdot 2 = 14$$

$$6h_X = (x+3) \cdot XC; \quad h_X(x+3) = (x+3) \cdot XC$$

$$AX^2 = 12 \cdot 6 - 8y^2 = 8(9-y^2) \quad \Rightarrow \quad XC = 6y$$

$$h_C = (x+3) \cdot y \quad \frac{h_X}{2h_X+4} = \frac{2}{3}; \quad \frac{h_X}{2h_X} = \frac{4}{3} \quad 3h_X = 2h_X + 4 \quad \Rightarrow \quad 2h_X = 4$$

$$3h_X = 2h_X + 4 \quad \Rightarrow \quad h_X = \frac{16}{3}$$

$$AX^2 = A h_3 - h_C \cdot XC = 6x + 18 - y^2(6x + 18) = 6(x+3)(1-y^2) \quad h_M = y$$

$$h_X = 2$$

$$\frac{h_X}{h_M} = \frac{2}{3} \Rightarrow h_M = \frac{3h_X}{2} = 4 + 2h_X \quad \frac{h_X}{2h_X} = \frac{x+3}{x} \quad p = \frac{6+4}{2} = 5$$

$$h_X = \frac{2h_X+8}{3}$$

$$S_{Ayz} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 1} = 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

$$AXh_M : \frac{1}{2}(AX + 2h_M + 4) \cdot h = \frac{1}{2}(AX + 2h_M) \cdot h + S_{Ayz} \quad \frac{XC}{XC+h_M} = \frac{2}{3}; \quad \frac{y-2}{y} = \frac{2}{3}$$

$$(AX + 2h_M + 4) \cdot h = (AX + 2h_M) \cdot h + 4\sqrt{5}$$

$$\frac{h_M}{h_M+h_X} = \frac{3}{4} \quad \frac{y}{y+2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2(2h_M+4)}{32M} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 2x(2h_M+4) = 32M \cdot x + 8M \quad \frac{2h_M+x-32M}{x} = 0 \quad 2h_M - x + 4h_M = 8x$$

$$2h_M = \frac{8x}{x-8}$$

$$2h_M = \frac{8x}{x+8}$$

$$\frac{y-2}{y+2} = \frac{1}{2}$$

$$AX = \frac{\frac{16x}{x+8} + 8}{3} = \frac{24x+72}{3(x+8)} = \frac{8x+24}{x+8} = \frac{8(x+3)}{x+8} \quad \left| \begin{array}{l} x=y \Rightarrow h_3=12 \\ \frac{XC}{h_X} = \frac{2}{1}; \quad \frac{h_M}{h_X} = \frac{3}{1} \end{array} \right.$$

$$6(x+3)(1-y^2) = \frac{64(x+3)^2}{(x+8)^2}$$

$$6(x+y)^2(1-y^2) = 6(x+3)$$

$$3(x+8)^2(1-y^2) = 32(x+3)$$

$$\frac{h_X}{3} = \frac{XC}{6} \quad \frac{XC}{6} = \frac{h_M}{X} \quad \frac{h_X}{h_M} = \frac{1}{2} \Rightarrow g_M X = h_C; \quad h_X = \frac{1}{3} h_M$$

$$\frac{h_X}{3} = \frac{h_M}{X}$$

$$\frac{h_X}{h_M} = \frac{h_X}{h_M} = \frac{3}{X} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{X} \Rightarrow X = 9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $m+2n-7 \vdash 11$

$$(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$$

$$m+2n-7 \vdash p^2 \Rightarrow p = 7 \quad (m+2n=1)$$

$$m+2n-7 \vdash p \Rightarrow p = 7 \quad (\text{одн} : p \Rightarrow p-7 \vdash p)$$

$$\Rightarrow m+2n-7 \vdash 7 \quad \Rightarrow$$

$$m+2n = 7$$

$$m+2n \vdash p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 11$$

$$m+2n = 18 \vdash p^2 \Rightarrow$$

$$\star mn(m+2n+g) = 11p^2$$

1) $m=1 : n(2n+10) = 11p^2$

$$2(n+5) \cdot n = 11p^2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n(5+n) = 22$$

$$2 \vdash 11 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ \times 11 \\ \hline 121 \\ + 11 \\ \hline 1321 \\ \div 11 \\ \hline 121 \\ + 11 \\ \hline 11 \end{array}$$

2) $n=1 : m(m+11) = 11p^2$

⇒ одн : 11 или одн / ⇒ $m \vdash 11 \Rightarrow m+11 \vdash 11$

$$\Rightarrow m(m+11) = 11^2 \Rightarrow$$

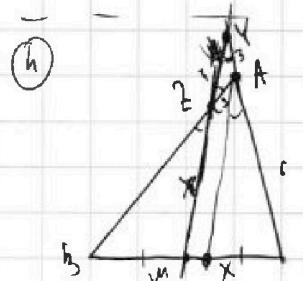
3) $m+1; n \neq 1 \Rightarrow$ при $\text{одн} \text{ или } \text{одн} \text{ } 11, p^2, p \text{ } m+2n+g > m, n \Rightarrow$

$$m+2n+g \geq 11 \text{ (здесь } N\text{)}$$

$$\Rightarrow m+2n+g = 11 \Rightarrow m+2n = 2$$

$$m=n=p$$

$$\begin{array}{l} h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \end{array}$$



$$AC = 6; \angle A = 30^\circ; \angle B = 40^\circ$$

$$BC = ? \quad \angle C = 80^\circ$$

$$\frac{\angle C}{\angle A} = \frac{80}{30} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{8x}{3x} = \frac{8}{3} \Rightarrow BC = \frac{8}{3} AC \Rightarrow BC = 8 \quad h^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{3a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{AC}{BC} &= \frac{1x}{4x} \quad \frac{2}{3} = \frac{1x}{4+x} \quad \frac{b^2}{b^2+3} = \frac{2x}{1x} = \frac{3x}{2(x+4)} = \frac{3x}{bx} \\ &\frac{1x}{4x} = \frac{1x}{4+x} \quad \frac{b^2}{b^2+3} = \frac{2x}{1x} = \frac{3x}{2(x+4)} = \frac{3x}{bx} \quad \frac{x/4}{x/6} = \frac{56}{25} \end{aligned}$$

$$AC^2 = AC \cdot AB - 3x \cdot xC$$

$$AC^2 = 8x^2 + 2x^2$$

$$AC^2 = \frac{6(x+4)}{8-x}$$

$$2x \cdot 4x + 8x^2 = 8x + 3x \cdot 4x$$

$$x \cdot 4x - 8x^2 + 3x = 0$$

$$4x^2 - \frac{8x}{x-8} = \frac{yx}{8-x} \Rightarrow AC = \frac{5x}{8-x}, BC = \frac{6x+24}{8-x}$$

$$\frac{3x}{x-8} = \frac{846}{228}$$

$$\frac{16}{31}$$

$$\frac{186}{31}$$

$$\frac{846}{228} = 2.28 \quad \frac{228}{4} = 57 \quad \frac{57}{3} = 19$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1) Члены

Члены

$$a_1, a_2, a_3, b_1, \dots \quad a_4 = 6 - 9x \\ a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ a_{10} = 9x^2$$

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{3^2}{3^2}$$

$$a_6 = a_4 + 2d \\ a_{10} = a_6 + 4d \\ a_{10} = a_4 + 6d \\ 9x^2 = 6 - 9x + 6d \\ 3x^2 + 3x - 2 - 2d = 0 \\ D = 9 + 3 \cdot 4 \cdot 2(1+d) = 9 + 24 + 24d = 33 + 24d$$

$$9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4d \\ x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4d = 0 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

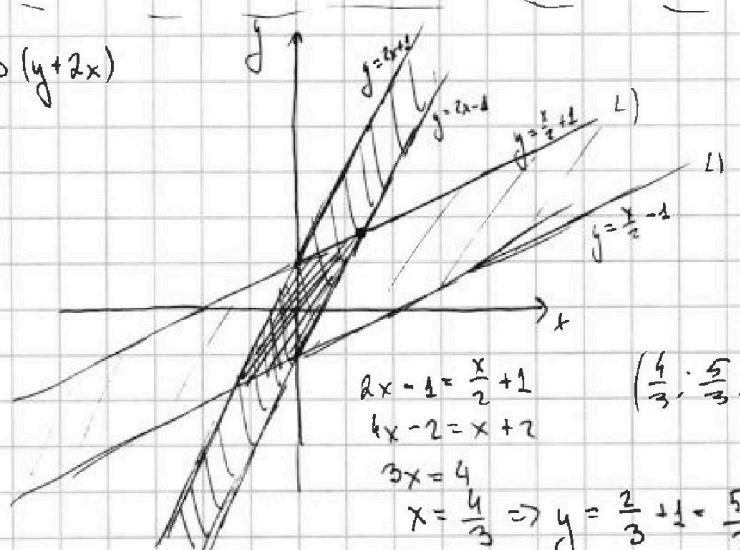
(2) $\max (3y + 6x) = 3(y+2x)$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$-2 \leq x-2y \leq 2$$

$$\begin{cases} -2 \leq x-2y \\ 2 \geq x-2y \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \geq \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq 2x-y \\ 1 \geq 2x-y \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 2x+1 \\ y \geq 2x-1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \frac{x}{2} + 1 & \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \\ 4x - 2 &= x + 2 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$3\left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3}\right) = 13$$

(3) $(m, n) \in \mathbb{N}$ $A = m^2 + 6mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 3mn = mn(m+2n+3)$$

Одно из p^2 , другое $75q^2$ (p, q - простые) $75 = 5 \cdot 5 \cdot 3$

1) $A = 1/p^2 \rightarrow \{m+2n : 11\}$ (така же не могут) 1) $m+2n : 11 \rightarrow x = 11, 22, 33, 44$
 $\{m+2n : p^2\} \rightarrow m+2n-7 = 1 \Rightarrow y$

$$m+2n : p^2 \Rightarrow p = 2$$

$$m+2n = 7 \Rightarrow m+2n-7 = 0 \Rightarrow y$$

$$m+2n-7 = p^2 \quad m+2n-7 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$m+2n = 11$ (тако же проявляет B, значит невозможно)

1-