



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть разность данной арифм. прогрессии d .

Тогда
$$\begin{cases} (x^2+2x)^2 - 3x - 3 = 2d \\ 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 4d \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2((x^2+2x)^2 - 3x - 3)$$

$\Rightarrow -x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$

Подставим $x = -1$: $1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ - корень

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x+1 \\ -x^4 + x^3 & \\ \hline 3x^3 + 3x^2 & \\ -3x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Подставим $x = -1$ в $x^3 + 3x^2 - 2$: $-1 + 3 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2 & x+1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline 2x^2 + 0x & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

т.е. $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2+2x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases}$

(2): $D = 4 + 8 = 12$. $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$

Проверим все 3 возможных значения x (здесь и далее - a_i - i -й член арифм. прогрессии)

① $x = -1$: $a_3 = 3x + 3 = -3 + 3 = 0$, $a_5 = (1-2)^2 = 1$, $a_9 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$

получим, что $d = 0,5$, такая прогрессия существует.

② $x = -1 - \sqrt{3}$: $a_3 = 3(-1 - \sqrt{3}) + 3 = -3\sqrt{3}$, $a_5 = ((-1 - \sqrt{3})^2 + 2(-1 - \sqrt{3}))^2 = 4(1 + 2\sqrt{3} + 3) + 2(-2 - 2\sqrt{3}) = 4(4 + 2\sqrt{3}) - 4 - 4\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3} - 4 - 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}$

$a_9 = 3(-1 - \sqrt{3})^2 = 3(4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$

замечаем, что $a_5 > a_3$, но $a_5 < a_9$, следовательно, все $x = -1 \pm \sqrt{3}$ не подходят.

получим, что $d = 2 + 1,5\sqrt{3}$, такая прогрессия существует.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (продолжение)

$$\textcircled{3} X = -1 + \sqrt{3} : a_3 = 3(-1 + \sqrt{3}) + 3 = 3\sqrt{3}, a_5 = ((-1 + \sqrt{3})^2 + 2(-1 + \sqrt{3}))^2 =$$

$$= (4 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3})^2 = 4$$

$$a_9 = 3(-1 + \sqrt{3})^2 = 3(4 + 2\sqrt{3})^2 = 12 - 6\sqrt{3}$$

получим, что $d = 2 - 1,5\sqrt{3}$, такая прогрессия сущ.

Ответ: $-1; -1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}$.

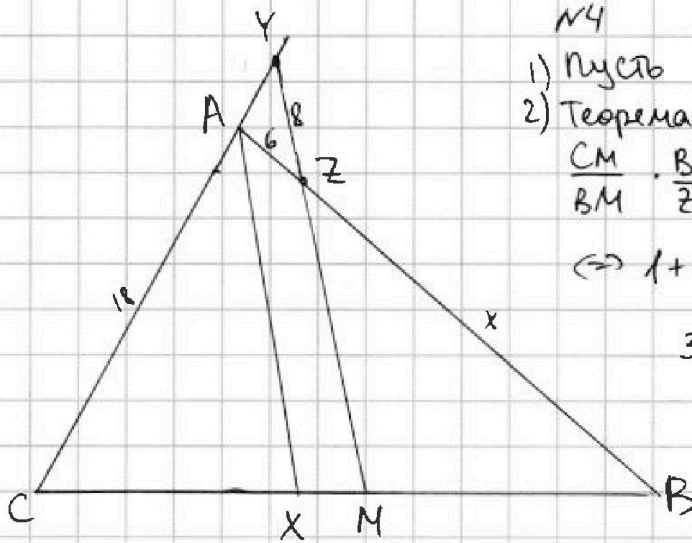


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть $BZ = x$
 2) Теорема Менелая для $\triangle ABC$ и пр. YM :

$$\frac{CM}{BM} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{6} \cdot \frac{AY}{AY+AC} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{AC}{AY} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{AC}{AY} = \frac{x-6}{6}$$

3) По обобщ. т. Фалеса для $\angle ABC$ и пр. AX и ZM :

$$\frac{XM}{MB} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{XM}{XB} = \frac{6}{x+6}$$

4) По обобщ. т. Фалеса для $\angle ACB$ и пр. AX и YM :

$$\frac{XM}{XC} = \frac{AY}{AC} = \frac{6}{x-6} \quad (\text{из (2)})$$

5) Из (3), (4) $\Rightarrow \frac{XB}{XC} = \frac{x+6}{6} \cdot \frac{6}{x-6} = \frac{x+6}{x-6}$

6) Так же по об-ву бис-сы $\frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6+x}{18}$, (5) \Rightarrow
 $\Rightarrow \frac{x+6}{x-6} = \frac{x+6}{18} \Rightarrow x=24$

7) $\frac{AC}{AY} = \frac{x-6}{6} \Rightarrow \frac{18}{AY} = \frac{18}{6} \Rightarrow AY=6$

8) Теорема Менелая для $\triangle CYM$ и пр. AB : $\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MB}{BC} = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{YZ}{ZM} = \frac{2}{3} \Rightarrow ZM = 8:2 \cdot 3 = 12$

9) $\triangle AXB \sim \triangle ZMB$, т.к. $AX \parallel ZM \Rightarrow \angle XBA - \text{обш} \Rightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{ZM}{AB} = \frac{ZM}{AX}$
 $\frac{ZM}{AX} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow AX = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15$

10) Пусть $\angle CAH = \angle BAH = \alpha$, $CX = 3k$. Т.к. $\frac{CX}{XM} = \frac{AC}{AY} = 3$, то $XM = k$
 Т.к. $CM = BM$, то $BM = 4k$

11) Теор. косинусов в $\triangle CAH$: $9k^2 = 324 + 225 - 2 \cdot 270 \cos \alpha = 549 - 2 \cdot 270 \cdot \cos \alpha$

12) Теор. косинусов в $\triangle BAH$: $25k^2 = 900 + 225 - 2 \cdot 450 \cos \alpha = 1125 - 2 \cdot 450 \cdot \cos \alpha$

13) $(12) \cdot 3 + (11) \cdot 5: 120k^2 = 6120 \Rightarrow k^2 = 51$, т.е. $k = \sqrt{51}$, т.к. $k > 0$

14) $BC = 8k = 8\sqrt{51}$

Ответ: $8\sqrt{51}$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2): (x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

~~f(x) = x^4~~ на $[0; +\infty)$
~~g(x) = x^2~~ на $[0; +\infty)$
~~h(x) = \sqrt{x}~~ на $[0; +\infty)$

$$x, y \geq 0$$

$$f(t) = t^4 \uparrow \text{ на } [0; +\infty)$$

$$g(t) = t^2 \uparrow \text{ на } [0; +\infty)$$

$$h(t) = \sqrt{t} \uparrow \text{ на } [0; +\infty)$$

т.е. при $x > y$: $x^4 - y^4 > 0$, $x^2 - y^2 > 0$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$, т.е.
 $(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) > 0$, противореч.

при $x < y$: $x^4 - y^4 < 0$, $x^2 - y^2 < 0$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$, т.е.
 $(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) < 0$, противореч.

Значит: $x = y$.

$$(1): \text{Подставим } x=y: \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+5x+6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5, \quad x \in [0; 6], \text{ т.к. } \sqrt{x}, \sqrt{x+1}, \sqrt{6-x} \text{ определены.}$$

Возведём обе части в квадрат: ~~$\sqrt{x+1} + 6 - x = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$~~

$$\begin{cases} x+1+6-x-2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x)+25-20\sqrt{(x+1)(6-x)} & (3) \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \text{ и } 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \text{ одного знака, } x \in [0; 6] \end{cases}$$

$$(3): 4(x+1)(6-x) - 18\sqrt{(x+1)(6-x)} + 18 = 0$$

Пусть $k = \sqrt{(x+1)(6-x)}$. Тогда $\begin{cases} 2k^2 - 9k + 9 = 0 \\ k > 0 \end{cases}$

$$D = 81 - 72 = 9$$

$$k = \frac{9 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 (продолжение)

① При $k=3$: $(x+1)(6-x) = 9 \Leftrightarrow -x^2 + 5x + 6 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\frac{5 - \sqrt{13}}{2} > \frac{5 - 4}{2} > 0$, $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < \frac{5 + 4}{2} < 6$, т.е.
оба корня лежат в $[0; 6]$

Проверим, одного ли знака $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$ и

При $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$: $2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5$

$x+1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$, $6-x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$

$x+1 < 6-x \Rightarrow \sqrt{x+1} < \sqrt{6-x} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} < 0$

$2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 = 6 - 5 > 0$

Противоречие $\Rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ — посторонний корень

При $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$

$x+1 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$, $6-x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+1 > 6-x \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} > 0$

$2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 = 6 - 5 > 0$

т.е. $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ — подходит

② При $k = \frac{3}{2}$: $(x+1)(6-x) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow -4x^2 + 20x + 24 - 9 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x^2 - 20x - 15 = 0$

$\frac{D}{4} = 100 + 60 = 160$, $x = \frac{10 \pm 4\sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$

$\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} < \frac{5 - 2 \cdot 3}{2} < 0$, т.е. $x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$ — посторонний корень



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS (продолжение)

$$\frac{5+2\sqrt{10}}{2} > 0, \quad \frac{5+2\sqrt{10}}{2} < \frac{5+2 \cdot 3,5}{2} = 6, \quad \text{т.е.}$$

$$x = \frac{5+2\sqrt{10}}{2} \in [0, 6]$$

Проверим, одного ли знака $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$ и $2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5$

$$x+1 = \frac{7+2\sqrt{10}}{2}, \quad 6-x = \frac{7-2\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{т.е. } x+1 > 6-x \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} > 0.$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 = 2 \cdot 1,5 - 5 < 0$$

$$\text{т.е. } x = \frac{5+2\sqrt{10}}{2} \text{ — посторонний корень}$$

Итак, получим, что единственный корень:

$$x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{т.к. } x=y, \text{ то } y = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right).$$



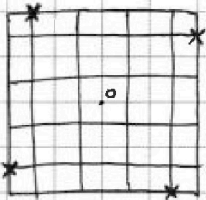
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6



1) Заметим, что все узлы, кроме центрального (т.о на рисунке) можно разбить на группы по 4 узла, которые при поворотах переходят друг в друга и больше ни в кого (одна такая группа отмечена * на рисунке)

2) Кол-во сп. перекрасить 2 узла из одной группы в белый*: $\frac{80 \cdot 3}{2}$, т.к. узлов, принадлежащих какой-то группе 80, $\frac{3}{2}$ каждого 3 "согруппника"

*: без учета поворотов
Но при этом, если учитывать повороты, каждый способ посчитается $C_4^2 = 6$ раз

Итого кол-во способов покрасить 2 узла из одной группы в белый с учетом поворотов: $\frac{80 \cdot 3}{2 \cdot 6} = 20$

3) Кол-во сп. перекрасить 2 узла из разных групп (т.е. здесь центральный узел мы не красим) в белый без учета поворотов: $\frac{80 \cdot 74}{2}$ (т.к. узлов 80, для каждого узла кол-во

нецентральных и не соседних с ним по группе - 74)
при этом каждый способ будет посчитан $4 \cdot 4 = 16$ раз (т.к. в каждой из двух выбранных групп по 4 узла)

Итого кол-во способов покрасить 2 узла из разных групп в белый ~~без учета поворотов~~ с учетом поворотов:

$$\frac{80 \cdot 74}{2 \cdot 16} = 190.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

4) Кол-во сп. покрасить 2 узла, один из которых центральный, без учета поворотов: 80 (т.к. один покрашенный узел фиксированный, остальных 80)

Каждый способ будет считан 4 раза (т.к. в группе 4 узла)

Итого кол-во способов покрасить 2 узла, один из которых центральный, с учетом поворотов: $80 : 4 = 20$

5) Других вариантов покраски двух узлов нет \Rightarrow
 \Rightarrow кол-во сп. покрасить какие-то 2 узла с учетом поворотов: $20 + 190 + 20 = 230$.

Ответ: 230 способов.

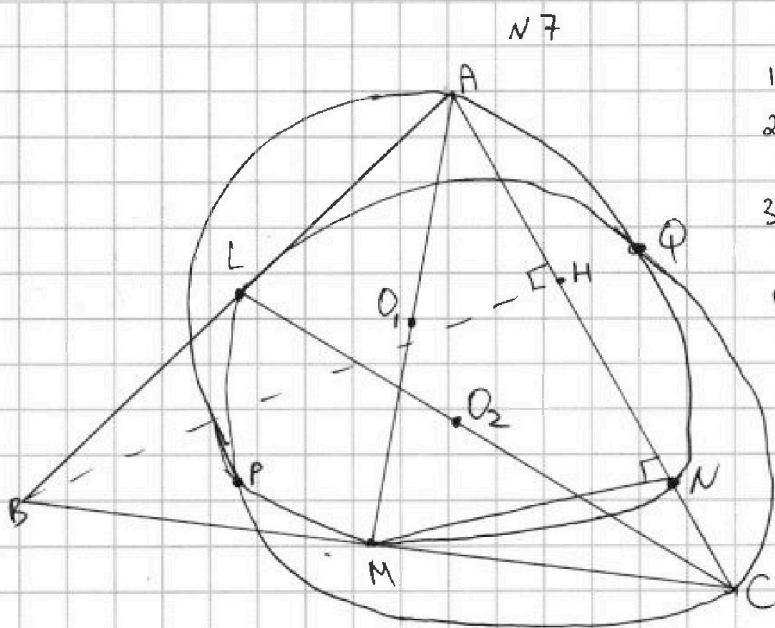
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) BH - высота из B на AC
- 2) $BH \perp AC$, $PQ \parallel BH \Rightarrow PQ \perp AC$
- 3) O_1 - середина AM , т.е. центр ω
- 4) O_2 - середина CL , т.е. центр Ω
- 5) $PQ \perp O_1O_2$, т.к. PQ - рад. ось Ω и ω
- 6) (5), (2) $\Rightarrow O_1O_2 \parallel AC$
- 7) В $MLAC$: $O_1O_2 \parallel AC$ и O_1, O_2 - середины диагоналей $\Rightarrow O_1O_2 \parallel ML$, $ML \parallel AC$

- 8) $ML \parallel AC$, M - середина $BC \Rightarrow ML$ - средняя линия $\Rightarrow L$ - середина $AB \Rightarrow CL$ - бис-са и медиана $\Rightarrow AC = BC$
- 9) $\angle MNA = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр $\Rightarrow MN \parallel BH$
- 10) по т. Фалеса для $\angle ACB$ и пр BH и MN : $HN = CN$
- 11) Пусть $AN = x$. Тогда $HN = 8 - x = CN \Rightarrow BC = AC = 16 - x$
- 12) т. Пифагора в $\triangle BAN$: $BH^2 = 100 - x^2$
- 13) т. Пифагора в $\triangle CAN$: $BH^2 = (16 - x)^2 - ((8 - x) \cdot 2)^2 = 32x - 3x^2$
- 14) (12), (13) $\Rightarrow 100 - x^2 = 32x - 3x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 32x + 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 50 = 0$.

$$\frac{D}{4} = 64 - 50 = 14, \quad x = 8 \pm \sqrt{14}$$

- 15) При $x = 8 + \sqrt{14}$: $AC = BC = 16 - 8 - \sqrt{14} = 8 - \sqrt{14}$, $AC + BC = 16 - 2\sqrt{14}$.
т.к. $2\sqrt{14} > 2 \cdot 3 = 6$, $16 - 2\sqrt{14} < 10 = AB$, противоречие с неравенством треугольника, т.е. $x = 8 + \sqrt{14}$ - посторонний корень
- 16) Аналогично, это $x = 8 - \sqrt{14} = 2AC = BC$
 $AC + BC = 16 - 2\sqrt{14} < 10 = AB$, противореч. с неравенством $\Delta \Rightarrow x = 8 + \sqrt{14}$ - посторонний корень
- 16) Итак, $x = 8 + \sqrt{14} \Rightarrow AC = BC = 16 - (8 + \sqrt{14}) = 8 + \sqrt{14}$

Ответ: $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ОСМ: mp AB

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} = \frac{MB}{BC} = 1$$

$$3 \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{YZ}{ZM} = \frac{2}{3} \Rightarrow ZM = 12$$

$$\frac{3K}{5K} = \frac{18}{30}$$

$$\frac{AX}{ZM} = \frac{30}{24} \Rightarrow AX = \frac{30 \cdot ZM}{24} = \frac{30 \cdot 12}{24} = 15$$

$$\frac{MB}{BC} = \frac{MB}{MB+}$$

$$3x+3 \quad (3)$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 \quad (5)$$

$$3x^2 \quad (9)$$

$$(9)-(3): 3x^2 - 3x + 3$$

$$(9)-(5): \cancel{3x^2} - 4x^3 - x^2$$

$$(5)-(3): x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3$$

$$\cancel{-4x^3 - x^2}$$

$$(5)-(3): 2d, (9)-(5): 4d, (9)-(3): 6d$$

$$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = -x^4 - 4x^3 - x^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$3x^4 + 12x^3 + 12x^2 - 9x - 9 = 3x^2 - 3x + 3 \quad (**)$$

$$\Rightarrow 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\frac{(9)-(5)}{(9)-(3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \neq$$

$$\begin{cases} 2d: 4+3\sqrt{3} \\ 4d: 8+6\sqrt{3} \\ 6d: 12+9\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 2d = 4-3\sqrt{3} \\ 4d = 8-6\sqrt{3} \\ 6d = 12-9\sqrt{3} \end{cases}$$

$$-3x^4 - 12x^3 - 3x^2 = 6x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$3 \quad -12 \quad +9 \quad +6 \quad -6 \rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline -3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ \hline x^3 + 3x^2 - 2 \end{array}$$

$$4 + 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} =$$

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 3x^2 \\ -3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x - 2 \end{array}$$

$$-1: -1 + 3 - 2$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline 2x^2 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x+1 \\ \hline x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline -2x^2 + 0x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ \hline x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 0x - 2 \\ -2x^2 + 2x \\ \hline -2x - 2 \end{array}$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (-1-\sqrt{3})^2 &= 4 + 2\sqrt{3} \\ 4 + 2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} &= 3 + \sqrt{3} \\ 12 + 6\sqrt{3} & \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(-1-\sqrt{3}) \quad -3 - 3\sqrt{3} + 3 = -3\sqrt{3} \quad) 9\sqrt{3}$$

$$\frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

$$4 + 2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} = 12 + 6\sqrt{3} = 36$$

$$16 \cdot 3 = 48$$

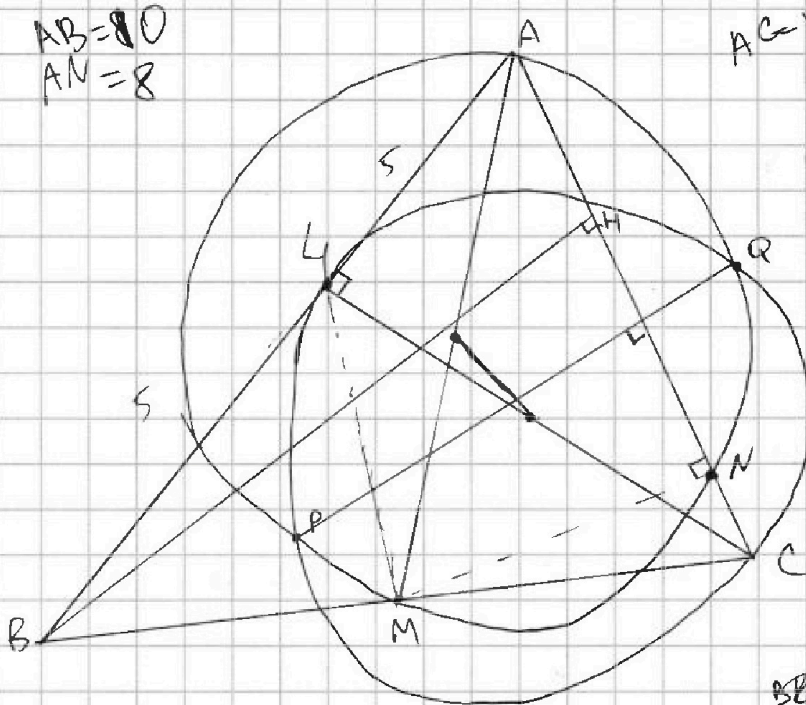


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

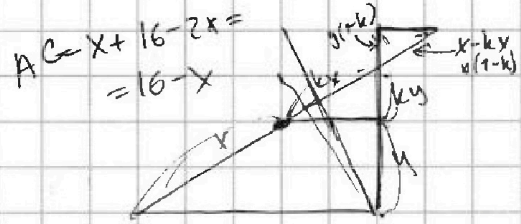
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 80$$

$$AM = 8$$



$LM \parallel AC$
L - середина AB
 $AC = BC$
AA

$$LM = \frac{1}{2} AC$$

$$CN = NH$$

Пусть $AH = x \Rightarrow NH = 8 - x$
 $\Rightarrow NH = CN = 8 - x$

$$BH^2 = (16-x)^2 - (16-2x)^2 =$$

$$= -32x + x^2 + 64x - 4x^2$$

$$= 32x - 3x^2 = 100 - x^2$$

Т. косинусов в $\triangle CAX$:

$$9k^2 = 324 + 225 - 2 \cdot 270 \cos \alpha$$

$$160 + 90 = 270 \quad \triangle BAX: 25k^2 = 900 + 225 - 2 \cdot 450 \cos \alpha$$

$$30 \cdot 15 = 450 \quad 9k^2 = 549 - 2 \cdot 270 \cos \alpha \quad (1)$$

$$25k^2 = 1025 - 2 \cdot 450 \cos \alpha \quad (2)$$

$$(1) \cdot 3 + (2) \cdot 5:$$

$$75k^2 + 45k^2 = 3375 + 2745$$

$$120k^2 = 6120$$

$$k^2 = 51$$

$$k = \sqrt{51} \quad 8\sqrt{51}$$

$$32x - 3x^2 = 100 - x^2$$

$$2x^2 - 32x + 100 = 0$$

$$x^2 - 16x + 50 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 50 = 14$$

$$x = 8 \pm \sqrt{14} \leftarrow \text{камень}$$

$$16 - 2\sqrt{14} < 16 - 8 = 10$$

$$\frac{450}{270} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$$

$$450 \cdot 3 = 1350$$

$$270 \cdot 5 = \frac{2700}{2} = 1350$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ \times 3 \\ \hline 3375 \\ \times 549 \\ \hline 2745 \\ \hline 6120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1120 \\ \div 51 \\ \hline 22 \\ \times 51 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\sqrt{14} > 3$$

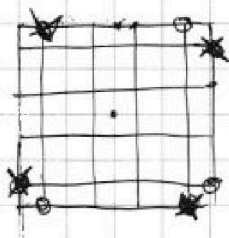


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



вызову условий: $|x - 3y| \leq 3$

$9 \cdot 5 = 45$ $|3x - y| \leq 1$

всего сп:

$\frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40 = 3240$

При фиксированном x :

$3y \leq x + 3 \Rightarrow y \leq \frac{x+3}{3}$

Т.е. все выраж-е: $\leq \frac{24x + 4x + 12}{3} = \frac{28x}{3} + 4$

При фиксированном y :

$3x \leq y + 1 \Rightarrow x \leq \frac{y+1}{3} \Rightarrow 8x \leq \frac{8y+8}{3}$

$4y + 8x \leq \frac{12y + 8y + 8}{3} = \frac{20y}{3} + \frac{8}{3}$

Максимум: $\min\left(\frac{28x}{3} + 4, \frac{20y}{3} + \frac{8}{3}\right)$

$x, y > 0$. Пусть $x > 3y$. Тогда $x \leq 3y + 3$,

$3x - y \leq 9y + 9 \leq 1$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 549 \\ \hline 2745 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ \times 3 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$6120 : 120 = 51$

~~1200~~
Способ без центральной; способ с центральной.

$5 \cdot \frac{26}{2} = 5 \cdot 13 = 65$

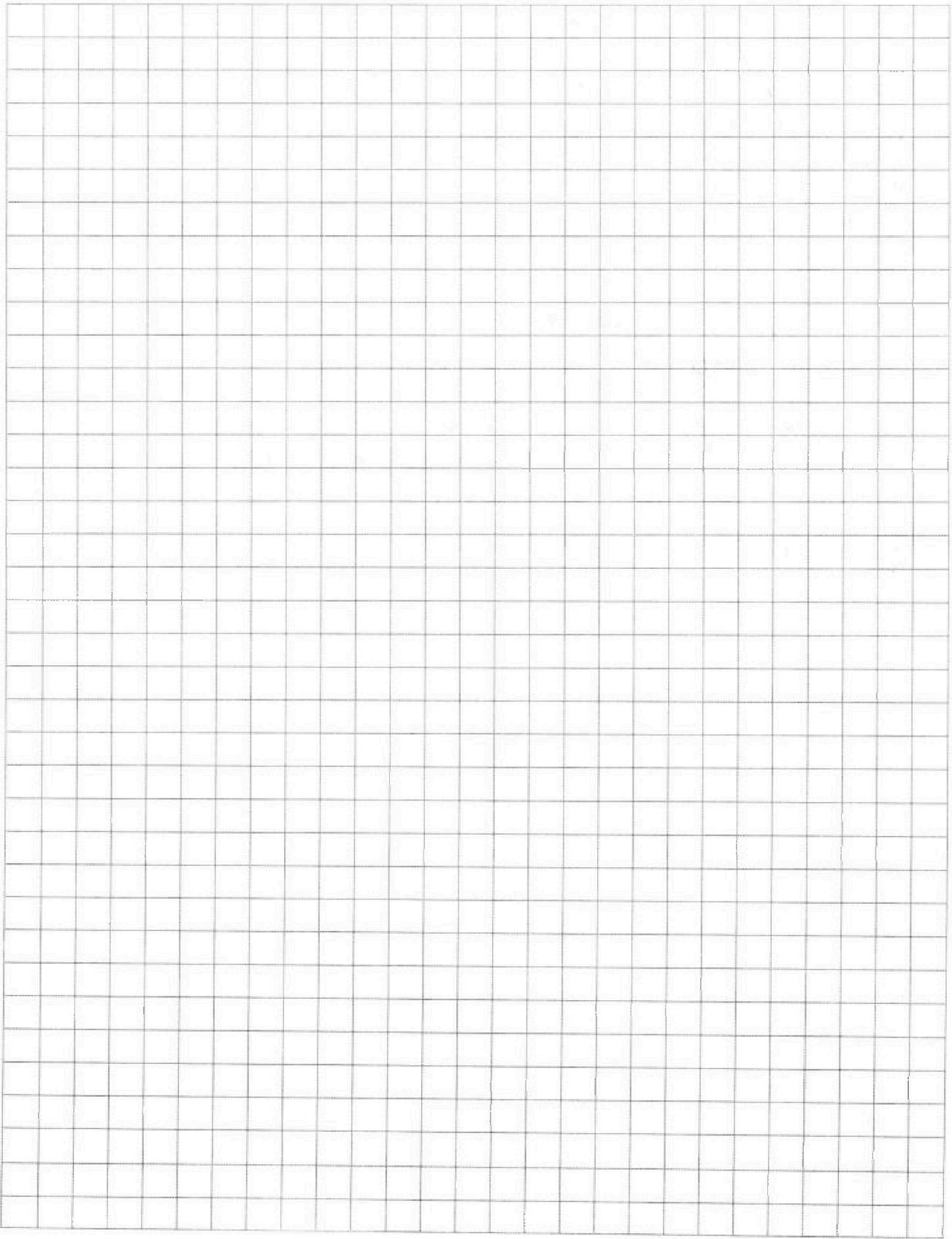


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{x+1}\sqrt{6-x} - 5 \quad | x > 0, x \leq 6$$

$$\sqrt{x+1} + 6 - x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x) + 25 - 20\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$18\sqrt{\dots} \quad 4t^2 - 18t + 18 = 0, \quad 2t^2 - 9t + 9 = 0.$$

$$D = 81 - 72 = 9. \quad t = \frac{9 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

$$t^2 = 9 : (x+1)(6-x) = 9 : -x^2 + 5x + 6 - 9 = 0$$

$$-x^2 + 5x - 3 = 0, \quad x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \quad 3 < \sqrt{13} < 4$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 4,5 \quad (\checkmark) \quad \frac{5 - \sqrt{13}}{2} > 0.$$

$$t^2 = \frac{9}{4} : (x+1)(6-x) = \frac{9}{4} : -x^2 + 5x + 6 - \frac{9}{4} = 0$$

$$4x^2 - 20x - 24 + 9 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100 + 60 = 160.$$

$$x = \frac{10 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$6 < 2\sqrt{10} < 8$$

$$\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} < 0$$

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < \frac{5+7}{2}$$

$$\sqrt{10} \approx 3,15$$

$$(3,15)^2 =$$

$$\begin{array}{r} 3,15 \\ \times 3,15 \\ \hline 1575 \\ 3150 \\ \hline 10500 \\ \hline 12225 \end{array}$$

$$1575$$

$$3150$$

$$10500$$

$$12225$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3\bar{u} : 3x+3, 5\bar{u} : 3x+3+2d = (x^2+2x)^2, 9\bar{u} : 3x^2 = 3x+3+6d = (x^2+2x)^2 + 4d$$

$$3x^2 - (x^2+2x)^2 = (3x^2 - x^2 - 2x)(3x^2 + x^2 + 2x) = (2x^2 - 2x)(4x^2 + 2x) = 4d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 4x^3 - 4x^2 = 4d \Leftrightarrow d = 2x^2 - x^3 - x^2$$

$$3x+3 + 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

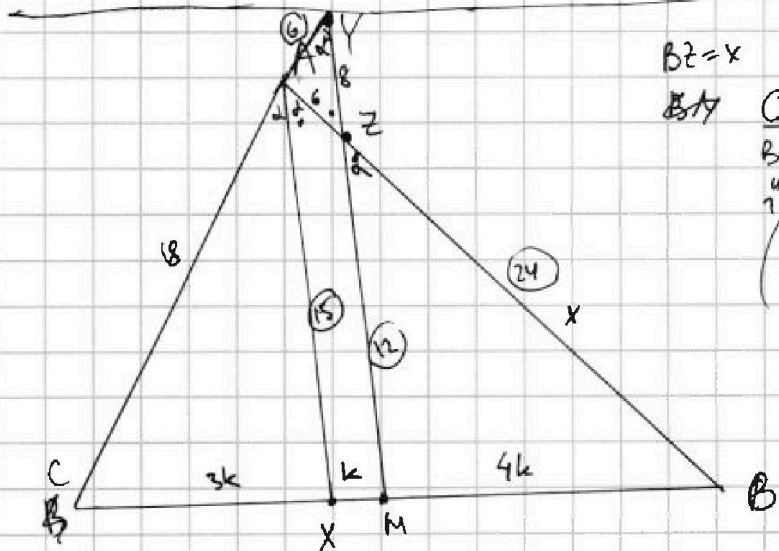
$$3x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$-2x^2(x+1) + x(x^3+1) + 1$$

$$3x^2 - 3x - 3 = 6d \Leftrightarrow 2d = x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \quad (2)$$

$$(2) - (1) : 6x^3 + 5x^2 - 3x - 3 = 0$$



$BZ = x$

By $\frac{CY}{BU} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$

$\left(\frac{x}{6}\right)^4 = \frac{AY}{AY+18} = \frac{6}{x}$

$1 + \frac{AY}{18} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{AY}{18} = \frac{6-x}{x}$

$6(AY+18) = x \cdot AY$

$AY(x-6) = 6 \cdot 18$

$AY = \frac{6 \cdot 18}{x-6}$

$\frac{XM}{MB} = \frac{6}{x}, \frac{XM}{XC} = \frac{AY}{18} = \frac{6 \cdot 18}{(x-6) \cdot 18} = \frac{6}{x-6} \quad (2)$

$\frac{18}{x-6} \cdot \frac{XM}{XB} = \frac{XM}{XM+MB} = 1 + \frac{XM}{MB} = \frac{x+6}{6} \quad (1)$

$\frac{18}{x-6} \cdot \frac{XC}{XB} = \frac{(1)}{(2)} = \frac{(x+6) \cdot (x-6)}{6 \cdot 6} = \frac{x^2-36}{36}$

$\frac{18}{x+6} = \frac{x^2-36}{36}$

$\frac{6}{x} = \frac{AY}{AY+AC} \Leftrightarrow \frac{AY+AC}{AY} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{AC}{AY} = \frac{x-6}{6} \Rightarrow \frac{AY}{AC} = \frac{6}{x-6}$

$* \frac{x+6}{18} = \frac{x+6}{x-6} \Rightarrow x = 18+6 = 24$

$\frac{AY}{AC} = \frac{6}{x-6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow AY = 6$

$18x + 108 = x^2 + 12x + 36$

$x^2 - 6x + 144 = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 144$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \quad (1)$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \quad (2)$$

$$(2): x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0, \sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$$

$$\sqrt{\quad} \quad a^8 - b^8 + 5(a^4 - b^4) + (a - b) = 0$$

Пусть $x > y$. Тогда $x^4 - y^4 > 0, x^2 - y^2 > 0, \sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$
Аналогично при $x < y$.

т.е. $x = y$.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2 + 5x + 6} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+1} = a$$

$$\sqrt{6-x} = b$$

$$a - b + 5 = 2ab \Rightarrow a(2b-1) = -b+5$$

$$a = \frac{-b+5}{2b-1}$$

$$\sqrt{x+1} = \frac{-\sqrt{6-x} + 5}{2\sqrt{6-x} - 1}, \quad x+1 = \frac{6-x+25-10\sqrt{6-x}}{4(6-x)+1-4\sqrt{6-x}}$$

$$x+1 = \frac{31-x-10\sqrt{6-x}}{25-4x-4\sqrt{6-x}}$$

$$25x - 4x^2 - 4x\sqrt{6-x} + 25 - 4x - 4\sqrt{6-x} = 31 - x - 10\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{6-x} (10 - 4x - 4) = 31 - x - 25x + 4x^2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+1)(6-x)} + 2 + 5 = 0$$

$$\sqrt{x+1} (1 - \sqrt{6-x}) - \sqrt{6-x} (1 + \sqrt{x+1}) + 5 = 0$$

$$x \in [-1; 6]$$

$$x = 4$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x} - 5$$

$$x+1 + 6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25 - 20\sqrt{\dots}$$

$$18 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 18 + 2(x+1)(6-x), \quad 9\sqrt{\dots} = 9 + \dots$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = t \quad \therefore t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 81 - 36 = 45$$