



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$a_2 = a_1 + k = 12 - 12x \quad (1)$$

$$a_4 = a_1 + 3k = (x^2 + 4x)^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \quad (2)$$

$$a_8 = a_1 + 7k = -6x^2 \quad (3)$$

$$(3) - (1) \quad 6k = -6x^2 - 12 + 12x \Rightarrow k = 2x - 2 - x^2$$

$$(2) - (1): \quad 2k = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 = -2x^2 + 4x - 4$$
$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(3) - (2): \quad 4k = -6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2 = -4x^2 + 8x - 8$$
$$-x^4 - 8x^3 - 18x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$2^4 + 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 8 = 16 - 64 + 72 - 16 - 8 = 72 - 72 = 0$$

~~x~~ $x = -2$ корень

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0 \quad x = -2 \text{ корень}$$
$$-2^3 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = -8 + 24 - 12 - 4 = 0$$

$$(x+2)(x+2)(x^2 + 4x - 2) = 0$$
$$D = 4^2 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 6 \quad x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Ответ: $x = -2$, $x = -2 + \sqrt{6}$, $x = -2 - \sqrt{6}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

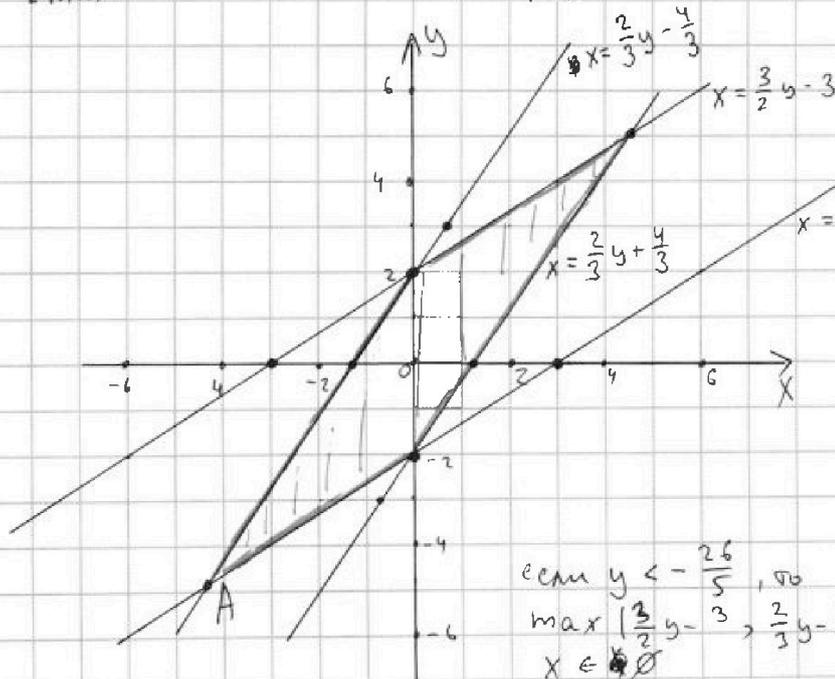
$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 & ① \\ |3x - 2y| \leq 4 & ② \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ① |2x - 3y| \leq 6 &\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y < 0 \\ 2x - 3y \geq -6 \\ 2x - 3y \geq 0 \\ 2x - 3y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2}y \\ x \geq \frac{3}{2}y - 3 \\ x \geq \frac{3}{2}y \\ x \leq \frac{3}{2}y + 3 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}y - 3, \frac{3}{2}y + 3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② |3x - 2y| \leq 4 &\Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y < 0 \\ 3x - 2y \geq -4 \\ 3x - 2y \geq 0 \\ 3x - 2y < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}y - \frac{4}{3}, \frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \right] \end{aligned}$$

~~max~~ $\frac{7}{3}$ ~~min~~

$$x \in \left[\begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix} \left(\frac{3}{2}y - 3, \frac{2}{3}y - \frac{4}{3} \right); \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix} \left(\frac{3}{2}y + 3, \frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \right) \right]$$



$\triangle A$, точка пересечения
 $\frac{2}{3}y - \frac{4}{3}$ и $\frac{3}{2}y + 3$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}y - \frac{4}{3} &= \frac{3}{2}y + 3 \\ 4y - 8 &= 9y + 18 \\ 5y &= -26 \\ y &= -5\frac{1}{5} = -\frac{26}{5} \\ x &= -\frac{3 \cdot 26}{2 \cdot 5} + 3 = -4,8 \end{aligned}$$

если $y < -\frac{26}{5}$, то
 $\max \left(\frac{3}{2}y - 3, \frac{2}{3}y - \frac{4}{3} \right) > \min \left(\frac{3}{2}y + 3, \frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \right)$
 $x \in \emptyset$

Тогда $\min(10x + 5y)$ при $x = -4,8$, $y = -\frac{26}{5}$

$$10x + 5y = -48 - 26 = -74$$

Ответ: -74 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2n - 2m^2 - 2mn = mn(m^2 - 2n^2 - 2)$$

① сызгас $A = 17p^2$ $B = 15q^2$

~~$B = 15q^2$~~

① $m = 3$	$n = 5$	$m^2 - 2n^2 - 2 < 0$
② $m = 5$	$n = 3$	$m^2 - 2n^2 - 2 = 5 \neq q^2$
③ $m = 1$	$n = 15$	аналогично ①
④ $m = 15$	$n = 1$	$m^2 - 2n^2 - 2 = 221 \neq q^2$
⑤ $m = 9$	$n = 3$	
	$m = 3$	$n = 9$

$$A = 17p^2 = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

одна скобка 17, вторая p^2
или одна $17p$, вторая p

$$\begin{aligned} m - 2n &= 17 & m - 2n + 13 &= 30 \neq p^2 \\ m - 2n &= p^2 & m - 2n + 13 &= p^2 + 13 = 17 \quad |p=2| \quad |m - 2n = 4| \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m - 2n &= 17p & 17p + 13 &= p \quad \text{неверно, так } p \text{ простое.} \\ m - 2n &= p & p + 13 &= 17p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m - 2n &= 4 & m &= 4 + 2n & m > n \\ mn(m^2 - 2n^2 - 2) &= (4 + 2n)n((4 + 2n)^2 - 2n^2 - 2) = \\ &= (4n + 2n^2)(16 + 8n + 4n^2 - 2n^2 - 2) \end{aligned}$$

$$B = 15q^2 = mn(m^2 - 2n^2 - 2)$$

$= 3 \cdot 5 \cdot q \cdot q$ $n = 1$ $m = 17q = 1, 3, 5, 9, 15, 17, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99, 105, 111, 117, 123, 129, 135, 141, 147, 153, 159, 165, 171, 177, 183, 189, 195, 201, 207, 213, 219, 225, 231, 237, 243, 249, 255, 261, 267, 273, 279, 285, 291, 297, 303, 309, 315, 321, 327, 333, 339, 345, 351, 357, 363, 369, 375, 381, 387, 393, 399, 405, 411, 417, 423, 429, 435, 441, 447, 453, 459, 465, 471, 477, 483, 489, 495, 501, 507, 513, 519, 525, 531, 537, 543, 549, 555, 561, 567, 573, 579, 585, 591, 597, 603, 609, 615, 621, 627, 633, 639, 645, 651, 657, 663, 669, 675, 681, 687, 693, 699, 705, 711, 717, 723, 729, 735, 741, 747, 753, 759, 765, 771, 777, 783, 789, 795, 801, 807, 813, 819, 825, 831, 837, 843, 849, 855, 861, 867, 873, 879, 885, 891, 897, 903, 909, 915, 921, 927, 933, 939, 945, 951, 957, 963, 969, 975, 981, 987, 993, 999$

② $n = 3$	$m = 10$	$m^2 - 2n^2 - 2 = 1$ или 5 или 9 или 13 или 17 или 21 или 25 или 29 или 33 или 37 или 41 или 45 или 49 или 53 или 57 или 61 или 65 или 69 или 73 или 77 или 81 или 85 или 89 или 93 или 97 или 101 или 105 или 109 или 113 или 117 или 121 или 125 или 129 или 133 или 137 или 141 или 145 или 149 или 153 или 157 или 161 или 165 или 169 или 173 или 177 или 181 или 185 или 189 или 193 или 197 или 201 или 205 или 209 или 213 или 217 или 221 или 225 или 229 или 233 или 237 или 241 или 245 или 249 или 253 или 257 или 261 или 265 или 269 или 273 или 277 или 281 или 285 или 289 или 293 или 297 или 301 или 305 или 309 или 313 или 317 или 321 или 325 или 329 или 333 или 337 или 341 или 345 или 349 или 353 или 357 или 361 или 365 или 369 или 373 или 377 или 381 или 385 или 389 или 393 или 397 или 401 или 405 или 409 или 413 или 417 или 421 или 425 или 429 или 433 или 437 или 441 или 445 или 449 или 453 или 457 или 461 или 465 или 469 или 473 или 477 или 481 или 485 или 489 или 493 или 497 или 501 или 505 или 509 или 513 или 517 или 521 или 525 или 529 или 533 или 537 или 541 или 545 или 549 или 553 или 557 или 561 или 565 или 569 или 573 или 577 или 581 или 585 или 589 или 593 или 597 или 601 или 605 или 609 или 613 или 617 или 621 или 625 или 629 или 633 или 637 или 641 или 645 или 649 или 653 или 657 или 661 или 665 или 669 или 673 или 677 или 681 или 685 или 689 или 693 или 697 или 701 или 705 или 709 или 713 или 717 или 721 или 725 или 729 или 733 или 737 или 741 или 745 или 749 или 753 или 757 или 761 или 765 или 769 или 773 или 777 или 781 или 785 или 789 или 793 или 797 или 801 или 805 или 809 или 813 или 817 или 821 или 825 или 829 или 833 или 837 или 841 или 845 или 849 или 853 или 857 или 861 или 865 или 869 или 873 или 877 или 881 или 885 или 889 или 893 или 897 или 901 или 905 или 909 или 913 или 917 или 921 или 925 или 929 или 933 или 937 или 941 или 945 или 949 или 953 или 957 или 961 или 965 или 969 или 973 или 977 или 981 или 985 или 989 или 993 или 997
③ $n = 5$	$m = 14$	$m^2 - 2n^2 - 2 = 1$ или 5 или 9 или 13 или 17 или 21 или 25 или 29 или 33 или 37 или 41 или 45 или 49 или 53 или 57 или 61 или 65 или 69 или 73 или 77 или 81 или 85 или 89 или 93 или 97 или 101 или 105 или 109 или 113 или 117 или 121 или 125 или 129 или 133 или 137 или 141 или 145 или 149 или 153 или 157 или 161 или 165 или 169 или 173 или 177 или 181 или 185 или 189 или 193 или 197 или 201 или 205 или 209 или 213 или 217 или 221 или 225 или 229 или 233 или 237 или 241 или 245 или 249 или 253 или 257 или 261 или 265 или 269 или 273 или 277 или 281 или 285 или 289 или 293 или 297 или 301 или 305 или 309 или 313 или 317 или 321 или 325 или 329 или 333 или 337 или 341 или 345 или 349 или 353 или 357 или 361 или 365 или 369 или 373 или 377 или 381 или 385 или 389 или 393 или 397 или 401 или 405 или 409 или 413 или 417 или 421 или 425 или 429 или 433 или 437 или 441 или 445 или 449 или 453 или 457 или 461 или 465 или 469 или 473 или 477 или 481 или 485 или 489 или 493 или 497 или 501 или 505 или 509 или 513 или 517 или 521 или 525 или 529 или 533 или 537 или 541 или 545 или 549 или 553 или 557 или 561 или 565 или 569 или 573 или 577 или 581 или 585 или 589 или 593 или 597 или 601 или 605 или 609 или 613 или 617 или 621 или 625 или 629 или 633 или 637 или 641 или 645 или 649 или 653 или 657 или 661 или 665 или 669 или 673 или 677 или 681 или 685 или 689 или 693 или 697 или 701 или 705 или 709 или 713 или 717 или 721 или 725 или 729 или 733 или 737 или 741 или 745 или 749 или 753 или 757 или 761 или 765 или 769 или 773 или 777 или 781 или 785 или 789 или 793 или 797 или 801 или 805 или 809 или 813 или 817 или 821 или 825 или 829 или 833 или 837 или 841 или 845 или 849 или 853 или 857 или 861 или 865 или 869 или 873 или 877 или 881 или 885 или 889 или 893 или 897 или 901 или 905 или 909 или 913 или 917 или 921 или 925 или 929 или 933 или 937 или 941 или 945 или 949 или 953 или 957 или 961 или 965 или 969 или 973 или 977 или 981 или 985 или 989 или 993 или 997
④ $n = 15$	$m = 34$	$m^2 - 2n^2 - 2 = 1$ или 5 или 9 или 13 или 17 или 21 или 25 или 29 или 33 или 37 или 41 или 45 или 49 или 53 или 57 или 61 или 65 или 69 или 73 или 77 или 81 или 85 или 89 или 93 или 97 или 101 или 105 или 109 или 113 или 117 или 121 или 125 или 129 или 133 или 137 или 141 или 145 или 149 или 153 или 157 или 161 или 165 или 169 или 173 или 177 или 181 или 185 или 189 или 193 или 197 или 201 или 205 или 209 или 213 или 217 или 221 или 225 или 229 или 233 или 237 или 241 или 245 или 249 или 253 или 257 или 261 или 265 или 269 или 273 или 277 или 281 или 285 или 289 или 293 или 297 или 301 или 305 или 309 или 313 или 317 или 321 или 325 или 329 или 333 или 337 или 341 или 345 или 349 или 353 или 357 или 361 или 365 или 369 или 373 или 377 или 381 или 385 или 389 или 393 или 397 или 401 или 405 или 409 или 413 или 417 или 421 или 425 или 429 или 433 или 437 или 441 или 445 или 449 или 453 или 457 или 461 или 465 или 469 или 473 или 477 или 481 или 485 или 489 или 493 или 497 или 501 или 505 или 509 или 513 или 517 или 521 или 525 или 529 или 533 или 537 или 541 или 545 или 549 или 553 или 557 или 561 или 565 или 569 или 573 или 577 или 581 или 585 или 589 или 593 или 597 или 601 или 605 или 609 или 613 или 617 или 621 или 625 или 629 или 633 или 637 или 641 или 645 или 649 или 653 или 657 или 661 или 665 или 669 или 673 или 677 или 681 или 685 или 689 или 693 или 697 или 701 или 705 или 709 или 713 или 717 или 721 или 725 или 729 или 733 или 737 или 741 или 745 или 749 или 753 или 757 или 761 или 765 или 769 или 773 или 777 или 781 или 785 или 789 или 793 или 797 или 801 или 805 или 809 или 813 или 817 или 821 или 825 или 829 или 833 или 837 или 841 или 845 или 849 или 853 или 857 или 861 или 865 или 869 или 873 или 877 или 881 или 885 или 889 или 893 или 897 или 901 или 905 или 909 или 913 или 917 или 921 или 925 или 929 или 933 или 937 или 941 или 945 или 949 или 953 или 957 или 961 или 965 или 969 или 973 или 977 или 981 или 985 или 989 или 993 или 997
⑤ $n = 9$	$m = 4 + 2 \cdot 9 = 22$	$m^2 - 2n^2 - 2 = 1$ или 5 или 9 или 13 или 17 или 21 или 25 или 29 или 33 или 37 или 41 или 45 или 49 или 53 или 57 или 61 или 65 или 69 или 73 или 77 или 81 или 85 или 89 или 93 или 97 или 101 или 105 или 109 или 113 или 117 или 121 или 125 или 129 или 133 или 137 или 141 или 145 или 149 или 153 или 157 или 161 или 165 или 169 или 173 или 177 или 181 или 185 или 189 или 193 или 197 или 201 или 205 или 209 или 213 или 217 или 221 или 225 или 229 или 233 или 237 или 241 или 245 или 249 или 253 или 257 или 261 или 265 или 269 или 273 или 277 или 281 или 285 или 289 или 293 или 297 или 301 или 305 или 309 или 313 или 317 или 321 или 325 или 329 или 333 или 337 или 341 или 345 или 349 или 353 или 357 или 361 или 365 или 369 или 373 или 377 или 381 или 385 или 389 или 393 или 397 или 401 или 405 или 409 или 413 или 417 или 421 или 425 или 429 или 433 или 437 или 441 или 445 или 449 или 453 или 457 или 461 или 465 или 469 или 473 или 477 или 481 или 485 или 489 или 493 или 497 или 501 или 505 или 509 или 513 или 517 или 521 или 525 или 529 или 533 или 537 или 541 или 545 или 549 или 553 или 557 или 561 или 565 или 569 или 573 или 577 или 581 или 585 или 589 или 593 или 597 или 601 или 605 или 609 или 613 или 617 или 621 или 625 или 629 или 633 или 637 или 641 или 645 или 649 или 653 или 657 или 661 или 665 или 669 или 673 или 677 или 681 или 685 или 689 или 693 или 697 или 701 или 705 или 709 или 713 или 717 или 721 или 725 или 729 или 733 или 737 или 741 или 745 или 749 или 753 или 757 или 761 или 765 или 769 или 773 или 777 или 781 или 785 или 789 или 793 или 797 или 801 или 805 или 809 или 813 или 817 или 821 или 825 или 829 или 833 или 837 или 841 или 845 или 849 или 853 или 857 или 861 или 865 или 869 или 873 или 877 или 881 или 885 или 889



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$B = 15q^2 = m \cdot n \cdot (m^2 - 2n^2 - 2) \quad m = 4 + 2n$$

$$B = 15q^2$$

$$m \cdot n = 1$$

$$m \cdot n = 3$$

$$n = 5$$

$$n = 15$$

$$n = q$$

$$n = 3q$$

$$n = 5q$$

$$n = 15q$$

$$n = q^2$$

$$n = 3q^2$$

$$n = 5q^2$$

$$n = 15q^2$$

$$m = 6 = 2, 3q, 5q, q^2, 3q^2, 5q^2, 15q, \text{ или } 15q^2 \leftarrow \boxed{q=2}$$

$$m = 10 = 2, 5q, q^2 \text{ или } 5q^2 \quad 5q = 10 \leftarrow \boxed{q=2}$$

$$m = 14 = 2, 3q \text{ или } q^2 \text{ или } 3q^2 \text{ не простое или не целое}$$

$$m = 34 = 2 \text{ или } q^2 \text{ не простое}$$

$$m = 4 + 2q = 1, 3, 5, 15, 2, 3q, 5q \text{ или } 15q$$

$$m = 4 + 6q = 1, 5, q, \text{ или } 5q \text{ не подходит}$$

$$m = 4 + 10q = 1, 3 \text{ или } q \text{ не подходит}$$

$$m = 4 + 30q = q \text{ или } 1 \text{ не подходит}$$

$$m = 4 + 2q^2 = 1, 3, 5, \text{ или } 15 \text{ не подходит}$$

$$m = 4 + 6q^2 = 1 \text{ или } 5 \text{ не подходит}$$

$$m = 4 + 10q^2 = 1 \text{ или } 5 \text{ не подходит}$$

$$m = 4 + 30q^2 = 1 \text{ не подходит}$$

Во всех случаях q не целое или отрицательное

$$n = 1 \quad m = 6 \stackrel{3q}{=} q = 2$$

$$(36 - 2 - 2) = 5q$$

не подходит

$$n = 3 \quad m = 10 \stackrel{5q}{=} q = 2$$

$$(100 - 18 - 2) = 8q$$

$$\text{Если } A = 17p^2$$

$$B = 15q^2$$

каким нар (m, n) нет.

② случай

$$A = 15q^2$$

$$B = 17p^2$$

$$A = 15q^2 = (m - 2n)(m - 2n + 3)$$

$$m - 2n = 1$$

$$15q^2 = 14$$

$$3$$

$$5q^2 = 16$$

$$5$$

$$3q^2 = 18$$

$$q$$

$$15q = 13 + q$$

$$3q$$

$$5q = 13 + 3q$$

$$5q$$

$$3q = 13 + 5q$$

$$15q$$

$$q = 13 + 15q$$

$$q^2$$

$$15 = 13 + q^2$$

$$3q^2$$

$$5 = 13 + 3q^2$$

$$5q^2$$

$$3 = 13 + 5q^2$$

$$15q^2$$

$$1 = 13 + 15q^2$$

$$15$$

$$q^2 = 28$$

~~только это не подходит~~
 ~~$m - 2n = 1$~~
 ~~$m = 15 + 2n$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Всего $17q^2 = m^2 - 2n^2 - 2$ ~~мозгов~~~~

У $A = 15q^2 = (m - 2n)(m - 2n + 13)$ нет
ни одного корня $(m - 2n)$ и $(m - 2n + 13)$ равных
 $15q^2$

При $A = 15q^2$ $B = 17q^2$ нет ни одного корня
 (m, n)

Ответ: таких кор $(m; n)$ нет.

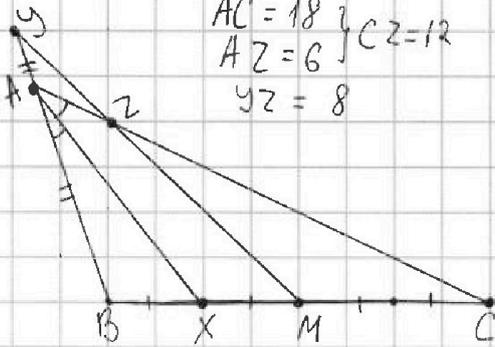


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



$$\begin{aligned} AC &= 18 \\ AZ &= 6 \\ YZ &= 8 \\ CZ &= 12 \end{aligned}$$

Пусть M' - середина AC , тогда
 $AY \parallel MM'$, YZ и $ZM \rightarrow 1$ черта
 AZ и $ZM' \rightarrow 1$ черта

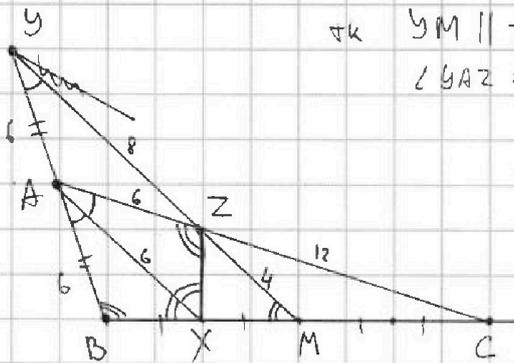
$$\begin{aligned} \triangle AYZ &\sim \triangle MM'Z \Rightarrow ZM = YZ \cdot \frac{ZM'}{AZ} = \\ &= 8 \cdot \frac{9-6}{6} = 4 \end{aligned}$$

тк $YM \parallel AX$, то $\frac{CM}{XM} = \frac{CZ}{AZ} = \frac{2}{1}$

$$MX = \frac{1}{2} CM = \frac{1}{2} BM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BX}{XM} = \frac{BA}{AY} = \frac{1}{1} \text{ и } \frac{AX}{YM} = \frac{BY}{BM} = \frac{1}{2}$$

$$AX = \frac{1}{2} YM = 6 \quad \triangle ZAX \text{ п/б}$$



тк $YM \parallel AX \Rightarrow \angle AYZ = \angle BAX$

$$\angle YAZ = 180^\circ - 2\angle BAX \Rightarrow \angle AZY = 180^\circ - 180^\circ + 2\angle BAX - \angle BAX =$$

$$= \angle BAX \Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AY = AZ = 6$$

Решение

$$AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2 \cdot AY \cdot YZ \cdot \cos \angle AYZ$$

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \angle AYZ$$

$$\cos \angle AYZ = \frac{8^2}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$BM^2 = BY^2 + MY^2 - 2 \cdot BY \cdot MY \cdot \cos \angle BYM$$

$$BM^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot 144 - \frac{4}{3} \cdot 144 = 144 \cdot \frac{2}{3}$$

$$BM = 12 \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$BC = 24 \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ответ: $BC = 24 \sqrt{\frac{2}{3}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

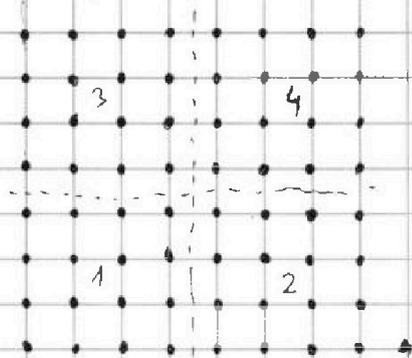


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



Разделим квадрат на 4 квадрата

В каждом квадрате 4×4 узлов.

Если 2 узла в одном квадрате, то есть $\frac{16 \cdot 15}{2}$ способов выбрать их, т.к. при повороте раскраски считаются одинаковыми.

Если 2 узла в соседних квадратах, то есть $16 \cdot 16$ выбрать 2 узла (первый из кв. 1, второй из кв. 2) (При этом не будет одинаковых раскрасок)

Если 2 узла в противоположных квадратах, то $\frac{16 \cdot 16 (\text{всего}) + 16 (1 \text{ центр. сим})}{2} = \frac{16 \cdot 17}{2}$ (центральная симметрия не имеет пары, которая получила бы поворотом на 180°)

Тогда всего $16 \cdot 16 + \frac{16 \cdot (15 + 17)}{2} = 16 \cdot 32 = 512$

Ответ: 512 способов перекрасить 2 узла

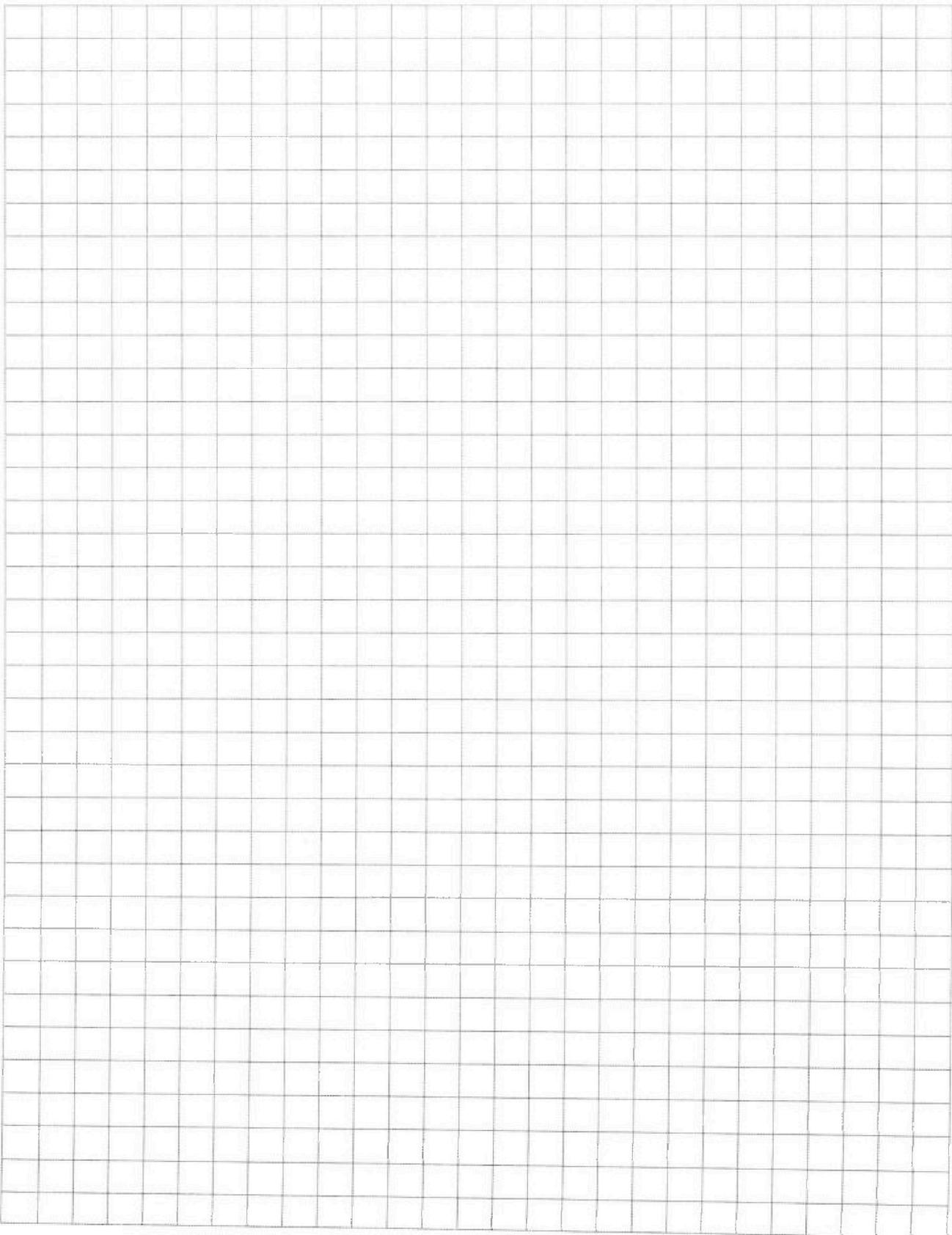


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$2x^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$
 $= 12^2 + (\frac{3}{2}y)^2 - 12 \cdot \frac{3}{2}y \cos \alpha$
 $\frac{1}{4}y^2 = x^2 + 6^2 - 2 \cdot x \cdot 6 \cos \alpha$
 $\frac{60 + x^2}{4} = x^2 + 6^2 - 12x \cos \alpha$
 $60 + x^2 = 4x^2 + 12^2 - 48x \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{3x^2 + 144 - 60}{48x} = \frac{3x^2 + 84}{48x}$
 $72 - 72 \cdot \frac{3x^2 + 84}{48x} = 144 + \frac{9}{4}(60 + x^2) - 2 \cdot 12 \cdot \frac{3}{2}y \cos \alpha$
 $72 - 72 \cdot \frac{3x^2 + 84}{48x} = 144 + \frac{9}{4}(60 + x^2) - 2 \cdot 12 \cdot \frac{3}{2}y \cos \alpha$
 $72 + 72 \cdot \frac{3x^2 + 84}{48x} = \frac{9}{4}(60 + x^2) + 36y \cos \alpha$

$\frac{DA}{AB} \cdot \frac{BC}{CM} = \frac{M_2}{25}$
 $\frac{16 \cdot 16}{2}$
 64
 128
 256
 512
 8×8

64 способ выбрать 1 из 8
 63 способа выбрать 2 из 8
 $\frac{16 \cdot 16}{2} + 16 \cdot 16 \cdot 2$
 $64 \cdot 63$ 32 симметричных пар
 $\frac{16 \cdot 16}{2} = 16 \cdot 16$
 $16 \cdot 32 + 16 \cdot 7,5$
 $16 \cdot 39,5$
 $x < \frac{2}{3}y \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}$
 $x > \frac{2}{3}y \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$
 $x \in [\frac{2}{3}y - \frac{4}{3}; \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}]$
 $x = -100$
 $y =$

16/31

$\sqrt{234567}$
 345446



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2 + 4x - 2) \sqrt{x^2 + 4x + 4} = (x+2)^2$
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x+2)^2$

$16 - 84 + 72 - 4x - 8 = 0$
 $184 - 72 - 4x - 8 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$
 $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$

$(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}) = (x^2 + 4x + 2)$
 $= (x^2 + 4x + \frac{16}{x^2 + 4x + 2}) \cdot \frac{32}{32}$
 $18^2 = \frac{32 \cdot 16}{564}$

$x^2 = 4y^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 2y \cos \angle C$
 $y^2 = 4^2 + 12^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cos \angle C$
 $x^2 = 64 + 8^2 - 2 \cdot 68 \cdot \cos \angle C$
 $x^2 - y^2 = 6^2 + 8^2 - 12^2 \cdot 4^2 = 36 + 64 - 144 - 16 = 160$
 $y^2 - x^2 = 60$
 $y^2 = 60 + x^2$
 $x^2 = 240 + 4x^2 + 324 - 72y \cos \angle C$
 $y \cos \angle C = \frac{24x^2 + 564}{72}$

$16 = \frac{y^2 + 144 - 2 \cdot 12 \cdot y \cdot \cos \angle C}{x^2 + 60}$
 $y \cos \angle C = \frac{x^2 + 60 + 144 - 16}{24}$
 $4x^2 = 72 + 96 - 2 \cdot 9 \cdot y \cos \angle C$
 $6^2 = (\frac{3}{2}y)^2 + 18^2 + 2 \cdot 18 \cdot \frac{3}{2}y \cos \angle C$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12 - 12x + 2k = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$12 - 12x + 6k = -6x^2 \quad \text{и} \quad 6k = -6x^2 \quad \text{или} \quad k = -x^2$$

$$4k = -x^4 - 8x^3 - 22x^2 \quad 2 \cdot 2x + k = -x^2 \quad k = -x^2 + 2x - 2$$

$$2k = -\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 - 11x^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$$

$$3x^4 - 2x^3 + 1,5x^4 + 12x^3 + 27x^2 + 12x - 12 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 16 - 8 = 0$$

$$32 - 64 + 72 - 16 - 8 = 0$$

$$4^4 - 8 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$2k = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 = -2x^2 + 4x - 4$$

$$3x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$\frac{3}{3^3} + \frac{8 \cdot 15}{3^3} + \frac{16 \cdot 12}{3^2} + \frac{8}{3} - 8 = 0$$

$$3 - 8 + 16 - 8 - 8 = 0$$

$$48 - 64 + 64 - 16 - 8 = 0$$

$$3 - 8 \cdot 3 + 16 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 8 = 0$$

$$3 - 24 + 144 - 24 - 8 = 0$$

$$k = 2x - 2 - x^2$$

$$(2x - 3y) \leq 6 \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 2x - 3y \geq -6 \\ 2x - 3y \geq 0 \\ 2x - 3y \leq 6 \end{cases}$$

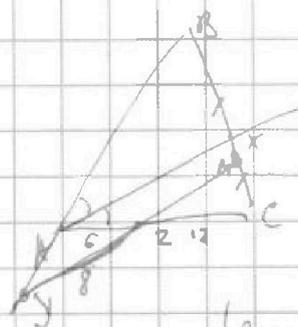
$$\begin{cases} x < \frac{3}{2}y \\ 2x \geq \frac{3}{2}y - 3 \\ x \geq \frac{3}{4}y \\ x \leq \frac{3}{4}y + 3 \end{cases}$$

$$4k = -6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2 = -(x^4 + 8x^3 + 22x^2) = -4x^2 + 8x - 8$$

$$12 - 12x + 8x - 4 - 2x^2 =$$

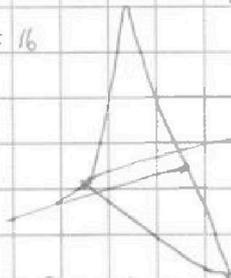
$$= -2x^2 - 8x + 8 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 4x^2 + 8x - 8 + 6x^2 =$$



$$(3x - 1)(x^3)$$

$$2^4 = 16$$



$$3 - 8 + 16 - 8 - 8 = 0$$

$$48 - 64 + 64 - 16 - 8 = 0$$

$$3 - 8 \cdot 3 + 16 \cdot 9 - 8 \cdot 3 - 8 = 0$$

$$3 - 24 + 144 - 24 - 8 = 0$$

$$k = 2x - 2 - x^2$$

$$12 - 12x + 8x - 4 - 2x^2 =$$

$$= -2x^2 - 8x + 8 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 4x^2 + 8x - 8 + 6x^2 =$$