



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = \cancel{3x} + (x^2 + 2x)^2 \quad a_9 = 3x^2$$

$$a_3 + 6d = a_9$$

$$3x + 3 + 6d = 3x^2$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$a_3 + 2d = a_5$$

$$3x + 3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x)^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^2 + 4x^3$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$ подходит \Rightarrow делим на (БЕЗУ)

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ - x^4 + x^3 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \\ - 3x^3 + 3x^2 \\ \hline 0 - 2x \\ - 0 \quad 0 \\ \hline -2x - 2 \\ - -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

Рассмотрим $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ $x = -1$ подходит \Rightarrow

по БЕЗУ



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 & x+1 \\ -x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \hline 2x^2 + 0x & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(x+1)(x^2+2x-2)=0$$

Рассмотрим $x^2+2x-2=0$

$$D = 4 + 4 - 2 = 12$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

$$(x+1)^2 \cdot (x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

Докажем

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Докажем, что $A \neq 75q^2$

$$(m+n)(m+n-9) = 75q^2$$

Если $m+n \not\div 3 \Rightarrow m+n-9 \not\div 3 \Rightarrow$

$$(m+n)(m+n-9) \not\div 3, \quad 75q^2 = 3 \cdot 25q^2$$

Получили противоречие

Если $m+n \div 3 \Rightarrow m+n-9 \div 3 \Rightarrow$

$$(m+n)(m+n-9) \div 9 \quad A = 9k$$

$$75q^2 = 9k$$

$$25q^2 = 3k \Rightarrow q \div 3 \Rightarrow q = 3$$

$$(m+n)(m+n-9) = 75 \cdot 9 \quad] \quad m+n = x$$

$$x(x-9) = 75 \cdot 9$$

$$x^2 - 9x - 3^3 \cdot 5^2 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 3^4 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 3^3(3 + 2^2 \cdot 5^2) =$$

$$= 3^3 \cdot 103 = 3^2 \cdot 309 \quad \sqrt{D} = 3\sqrt{309}$$

$$x_1 = \frac{9 + 3\sqrt{309}}{2}$$

$$x_2 = \frac{9 - 3\sqrt{309}}{2}$$

но m и n натур. $\Rightarrow m+n$ тоже натур, x - натур,
а x_1 и x_2 явно не натуральные. Получили Противоречие



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow A \neq 75q^2 \Rightarrow A = 13p^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 \quad (\text{У } 13p^2 \text{ всего 6 делителей})$$

$$13^1 \cdot p^2 \Rightarrow k = (1+1)(2+1) = 6$$

Переберем все делители $13p^2$ и подставим

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$1 \quad 13p^2 \Rightarrow 13p^2 + 9 = 1 \quad p^2 = -\frac{8}{13} \quad p = \pm \sqrt{-\frac{8}{13}} \quad (?!)$$

$$13 \quad p^2 \Rightarrow p^2 + 9 = 13 \quad p^2 = 4 \quad p = 2 \quad (✓)$$

$$p \quad 13p \Rightarrow 13p + 9 = p \quad p = -\frac{9}{12} \quad p = -\frac{3}{4} \quad (?!)$$

$$p^2 \quad 13 \Rightarrow 13 + 9 = p^2 \quad p = \pm \sqrt{22} \quad (?!)$$

$$13p \quad p \Rightarrow p + 9 = 13p \quad p = \frac{9}{12} \quad p = \frac{3}{4} \quad (?!)$$

$$13p^2 \quad 1 \Rightarrow 1 + 9 = 13p^2 \quad p^2 = \frac{10}{13} \quad p = \sqrt{\frac{10}{13}} \quad (?!)$$

$$\Rightarrow p = 2 \quad m+n = 13$$

$$B = 75q^2 \quad mn(m+n-3) = 75q^2 \quad \frac{10mn}{:2} = \frac{75q^2}{:2}$$

$$\Rightarrow 75q^2 : 2 \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q = 2 \quad 10mn = 75 \cdot 4 \quad mn = 30$$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \\ (m-n)^2 = (m+n)^2 - 4mn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \\ (m-n)^2 = 169 - 120 = 49 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \\ |m-n|=7 \end{cases} \quad (\text{НЧО } m \geq n) \Rightarrow \begin{cases} m+n=13 \\ m-n=7 \end{cases} \Rightarrow 2m=20 \quad m=10$$

$$n = 13 - m = 13 - 10 = 3 \quad n = 3$$

$$n = 10$$

Ответ: подходит только пара 3 и 10.



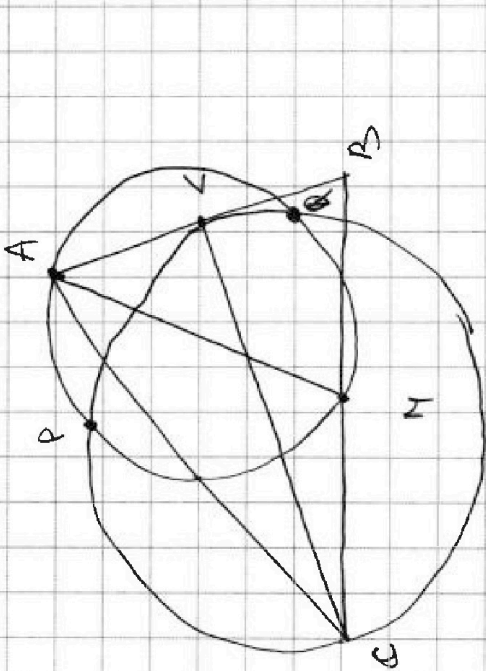
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

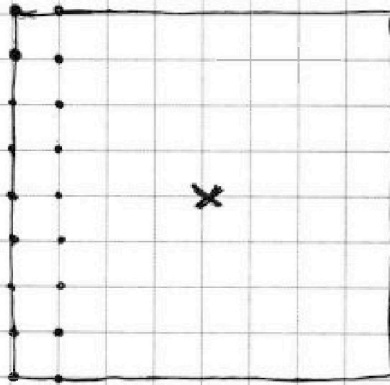
Также, рассмотрим пара с центральной точкой
То же получили 4 разные картинку



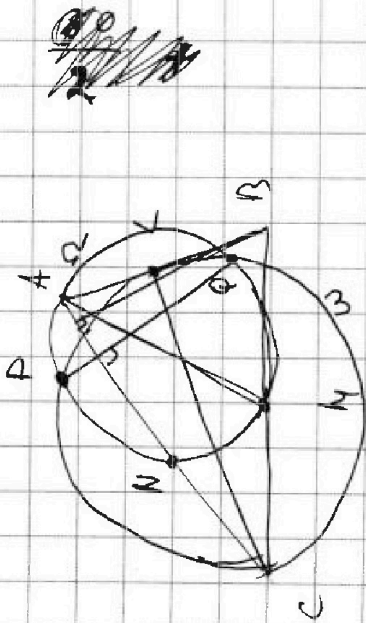
$$\frac{80}{2} = 40$$

$$80 \cdot 77$$

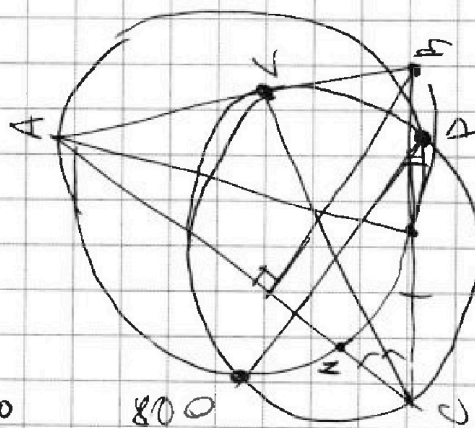
$$\frac{80 \cdot 77}{4} = 20 \cdot 77$$



$$\frac{(80 \cdot 77)}{2} \cdot 4$$



$$\frac{40}{2} + \frac{80 \cdot 77}{4}$$



$$\frac{80 \cdot 77}{4} + \frac{(80 \cdot 77)}{2}$$

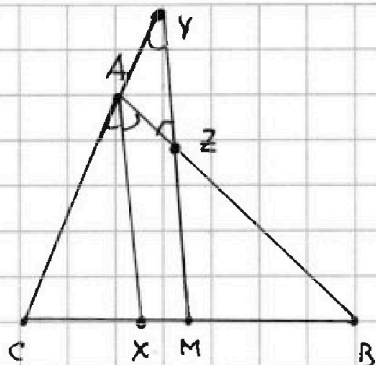
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 154

Дано: $\triangle ABC$
 AX — биссек. $\angle A$
 M — сер. BC
 $AX \parallel ZM$
 $Z = AB$
 $Y = AC$
 $Y = AC \cap ZM$

$$AC = 18$$

$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

Найти BC

Решение: Заметим, что $\angle CAX = \angle BAX = \angle AZY = \alpha$
 (биссек.) (параллельности)

$$\angle AZY + \angle AYZ = \angle CAZ \text{ (внешн.)}$$

$$\angle AYZ = \angle CAX + \angle BAX - \angle AZY = \alpha + \alpha - \alpha = \alpha$$

$\rightarrow AYZ$ равнобедрен $\Rightarrow AY = AZ = 6$

По Т. Фалеса $\frac{AY}{AC} = \frac{XM}{CB} \quad \frac{XM}{CB} = \frac{AY}{AC} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

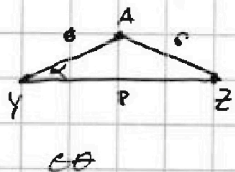
$$XM = a \quad CX = 3a \quad CM = XM + CM = 4a = \frac{BC}{2} \text{ (мсер.)} \Rightarrow$$

$$BC = 8a \quad XB = BC - CX = 8a - 3a = 5a \quad MB = CM = 4a \quad XM = a$$

По Т. Фалеса $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BM}{XM} = \frac{4a}{a} = 4$

$$BZ = 4AZ = 4 \cdot 6 = 24 \quad AB = AZ + BZ = 6 + 24 = 30$$

Рассмотрим $\triangle AYZ$ По Т. косинусов



$$\cos \alpha = \frac{AY^2 + AZ^2 - YZ^2}{2 \cdot AY \cdot AZ}$$

$$36 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 6 \cdot 6 \cos \alpha = 36$$

$$3 \cos \alpha = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

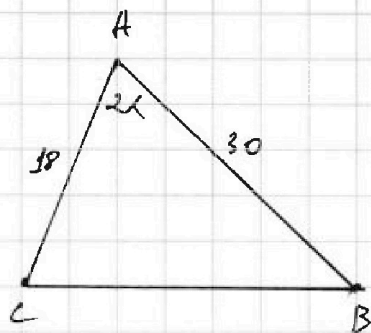
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2\alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$



Рассмотрим $\triangle ABC$

$$AC = 18 \quad AB = 30$$

$$\angle CAB = 2\alpha$$

По т. Косинусов $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(2\alpha)$

$$= 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) =$$

$$= 2^2 \cdot 3^4 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 =$$

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot (3^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5) =$$

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot (27 + 75 + 10) =$$

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 112 = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot 7 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$$

$$BC = 2^3 \cdot \sqrt{3 \cdot 7} = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

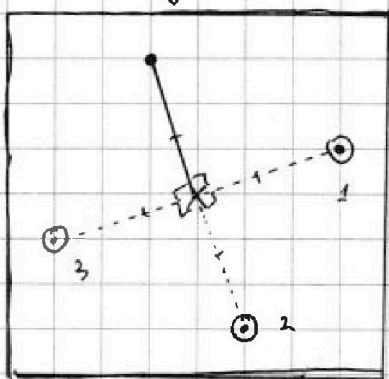
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

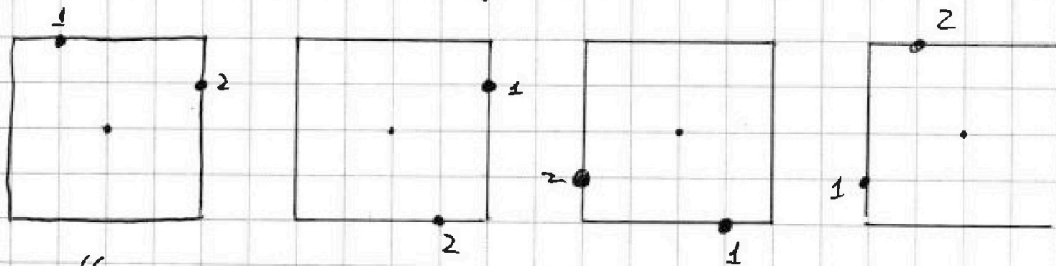
Ответ: 820

Решение: Давайте рассмотрим случай, когда при повороте карточки, какие-то стороны совпадут. Рассмотрим точку, и три места ^{расположения}, куда она перейдет при повороте (кроме центральной).



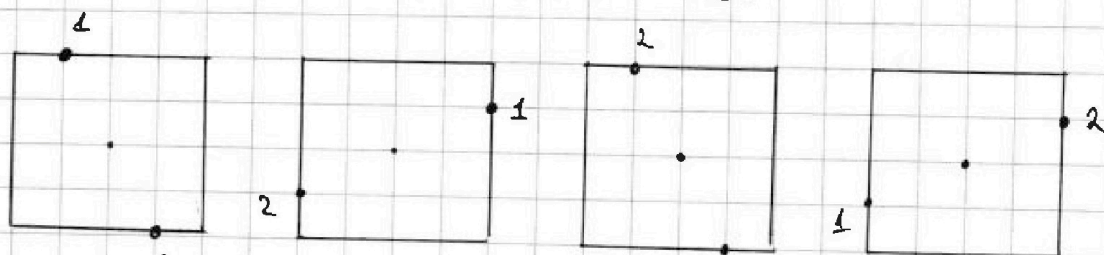
Заметим, что если я хочу, то я в дальнейшем карточка совпадала, ну и то, что я сейчас 2-ая точка стояла на одной из этих 3 позиций. (иначе

дальнейшие карточки не совпадут с центральной)
Если точка №2 в позиции 1 или 3:



Это 4 разные карточки.

Если 2-ая точка в позиции 2:



Тут всего 2 разные карточки.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

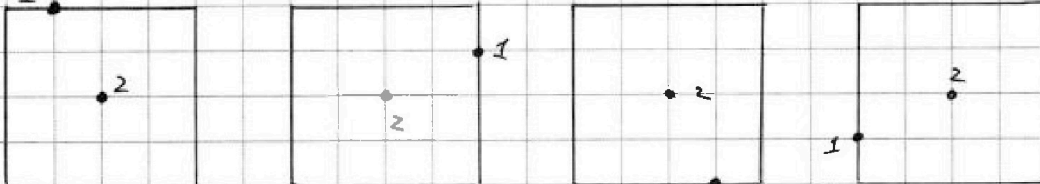
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Точки, рассмотрим пара с центральной

точкой.



Тут тоже получили 4 разные картиночки.

Заметим, что в остальных случаях будет 4 разные картиночки (т.к. точка не 2-ая точка будет не 1 или 2 или 3 по ⁴ углам)

Теперь считаем возможные раскраски:

С центральной: 80 вар. выбора ~~к~~ 2-ой точки, ч

$$\frac{80}{4} \text{ с учетом повтора при повороте: Итого} = 20$$

С симметричной: 80 вар. выбора 1-ой точки, вторая определяется по первой. $\frac{80}{2} = 40$ возможных пар.

$$\frac{40}{2} = 20, \text{ с учетом поворота} \text{ при повороте. Итого: } 20$$

С другой: 80 вар. выбора 1-ой точки, 78 вар. выбора 2-ой точки (80 - 2-ая точка - центр. точка - сим. точка)

$$\frac{80 \cdot 78}{2} \text{ пар} \cdot \frac{40 \cdot 78}{4} \text{ - с учетом повтора при повороте.}$$

$$10 \cdot 78 = 780$$

$$780 + 20 + 20 = 820$$

Ответ: 820



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2y^2 + 5x^2y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y}$
 $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$
 $-(y^4 + 5y^2 + \sqrt{y})$

$x - 3y \leq 3$
 $3x - y \leq 1$
 $x \geq 3y$
 $3x \geq y$

$x - 3y \leq 3$
 $3x - y \leq 1$
 $x \geq 3y$

$4y + 8x$
 PQ
 $AB = 40$
 $AN = 8$

AC, BC, \dots



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$|x-3y| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x-y \leq 1$$

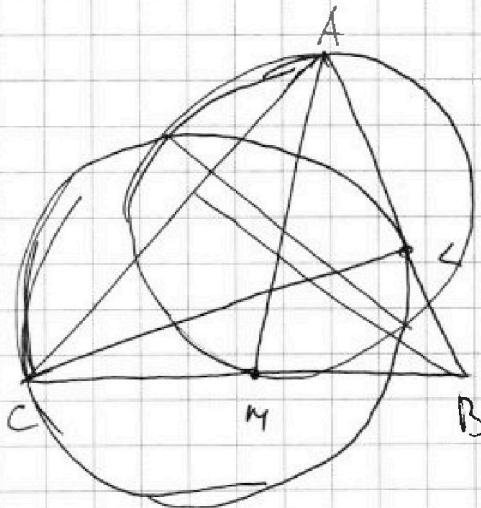
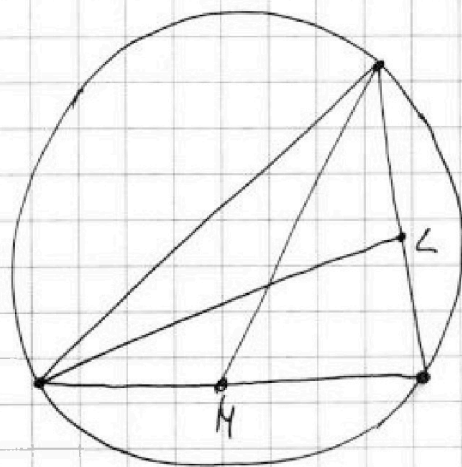
$$|3x-y| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3y-x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1+y$$

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ 3x \geq y \\ x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 1+y \\ y+1 \geq 3y \\ 2y \leq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

- 1 +
- 2 0
- 3 +
- 4 +
- 5 0
- 6 +
- 7 0



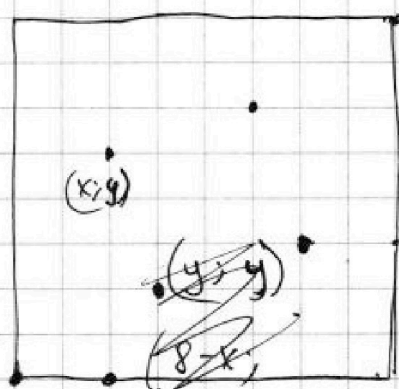
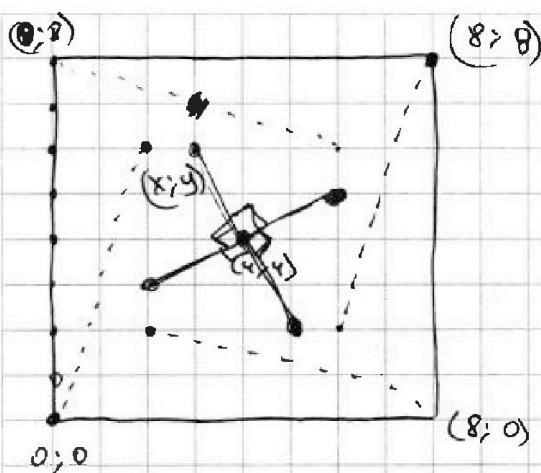


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

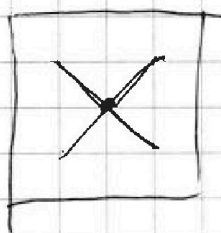
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



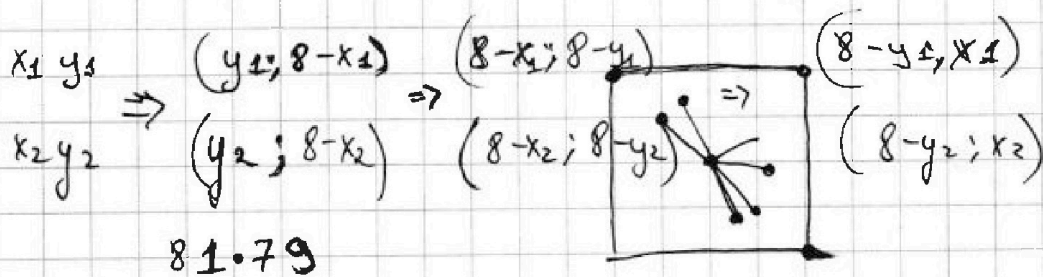
- 1) 3
- 2) 4
- 3) 5
- 4) 5
- 5) 4
- 6) 4
- 7) 6



$$(y; 8-x)$$

$$(8-x; 8-y)$$

$$(8-y; x)$$



$$\frac{80}{2} + 80 + \frac{80 \cdot 77}{4} = 40 + 80 + 20 \cdot 77 = 20(2 + 4 + 77) = 20 \cdot 83 = 1660$$



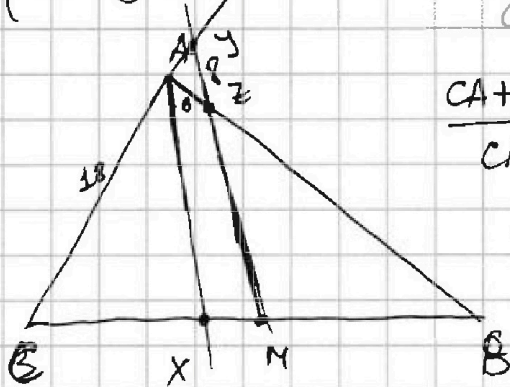
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$



$$\frac{CY}{CA} = \frac{CM}{CB}$$

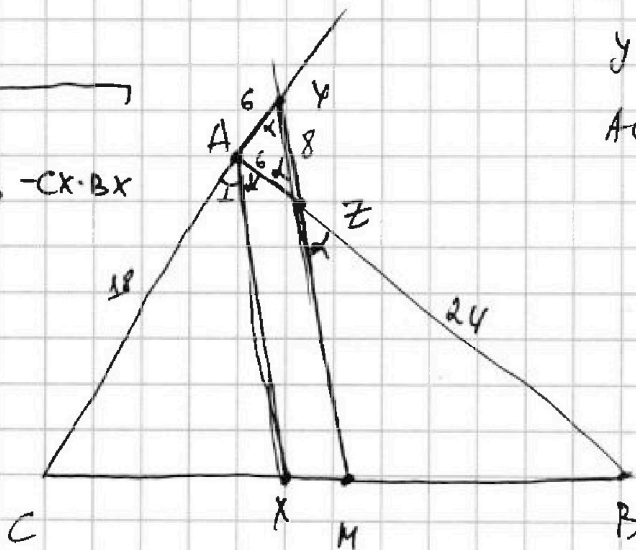
$$\frac{CA + AY}{CA} = \frac{CX + XM}{CB} \quad AY = AZ = 6$$

$$\frac{AY}{CA} = \frac{XM}{CB}$$

$$\begin{aligned} AZ &= 6 \\ YZ &= 8 \\ AC &= 18 \end{aligned}$$

$$AX = \sqrt{CX \cdot CB - AC \cdot AB}$$

~~18 \cdot 24~~



$$\frac{CX}{XB} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{KB} = \frac{3}{5}$$

$$XM = a$$

$$CX = 3a$$

$$AB = \frac{5 \cdot AC}{3} = \frac{5 \cdot 18}{3} = 30$$

$$\frac{AY}{AC} = \frac{XM}{XC}$$

$$6 \cdot 4$$

$$3 \cdot 8$$

$$3 \cdot 2^2$$

$$4a = CX + XM = CM = \frac{CB}{2}$$

$$CB = 8a$$

$$BX = CB - CX = 8a - 3a = 5a$$

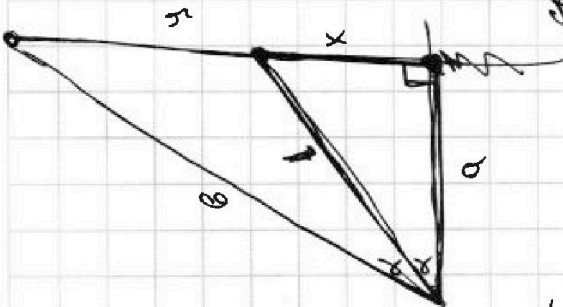


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~2a \cdot MY = 2b~~

$2a \cdot MY = 15 - 2M$

$\cos \alpha = \frac{x}{a}$

$\frac{y}{a}$

$\cos 2\alpha = \frac{a \cdot MY}{b}$

$AX =$

$\frac{5 - 2M}{4}$

$AX =$

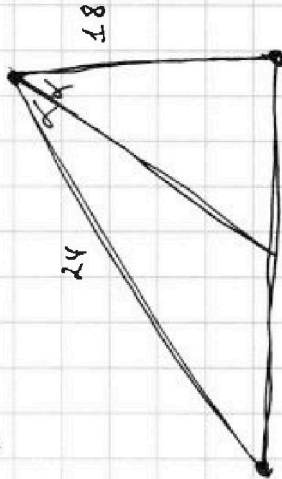
$\frac{a \cdot MY}{6} = \frac{5 - 2M}{4}$

~~$\frac{MY}{AX} =$~~

$\cos(2\alpha) \frac{MY}{AX} = \frac{CY}{CM} = \frac{24}{49} = \frac{6}{9}$

$\cos(2\alpha)$

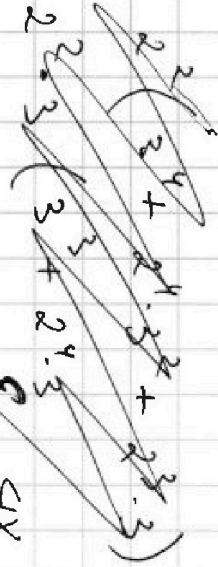
~~$\cos \alpha = \frac{x}{a}$~~
 ~~$\cos 2\alpha = \frac{y}{b}$~~



~~$\frac{MB}{XB} = \frac{4}{5}$~~

$\frac{ZM}{AX} = \frac{4}{5}$

$\frac{ZM}{AX} = \frac{4}{5}$



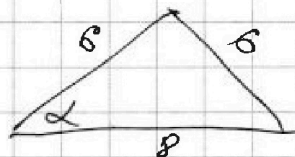
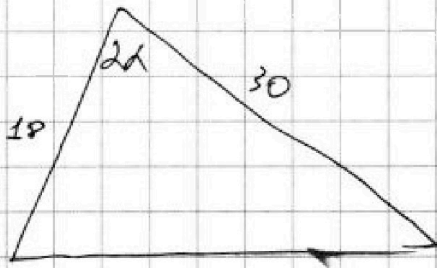
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$BC^2 = 18^2 + 30^2 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} =$$

~~$$= 324 + 900 + 2 \cdot 2 \cdot 30$$~~
~~$$= 1224 + 900 + 3$$~~

$$3^4 \cdot 2^2 + 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$2^2 \cdot 3 (3^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5)$$

$$2 \cdot 56$$

$$2^2 \cdot 3 \cdot (27 + 75 + 10)$$

$$2 \cdot 2 \cdot 28$$

$$= 2^3 \cdot 3 \cdot 112$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 14$$

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot 7$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$= 2^6 \cdot 3 \cdot 7$$

$$BC = 2^3 \sqrt{21} = 8 \sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\cos \alpha =$$

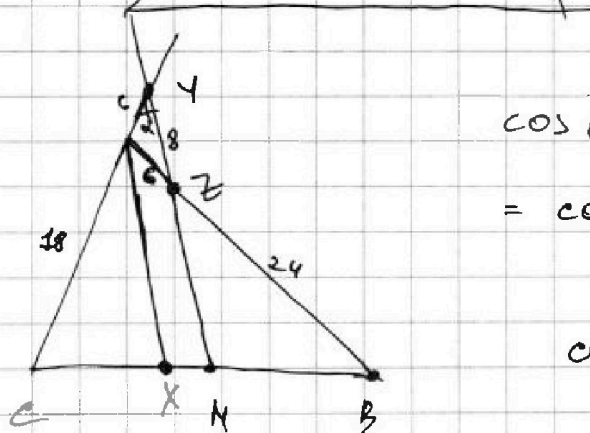
$$2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 64$$

$$3 \cos \alpha = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$36 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$36 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$



$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos$$

$$\cos 60^\circ = \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 90^\circ = \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= 0$$

(?)

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 18^2 + 24^2 - 2 \cdot 18 \cdot 24 \cdot -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 3^4 \cdot 2^2 + 2^6 \cdot 3^2 - 2^5 \cdot 3^3 \cdot -\frac{1}{9} = 3^4 \cdot 2^2 + 2^6 \cdot 3^2 + 2^5 \cdot 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} -64 + 3 \cdot 16 + 2 \\ -8 + 12 + 2 \\ 3x + 3 \end{aligned}$$

$$(x^2 + 3x^2 + 2)(x+1) = 0$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$3x + 3 + 6d = 3x^2$$

$$x^4 + 2x^2 + 4x^3 = 3x + 3 + 2d$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 2x^2 + 4x^3 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1)$$

$$x^4 + 2x^2 + 4x^3 = 2x + x^2 + 2$$

$$+ 2(x+1)$$

$$x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

-1

~~$$1 - 4 + 3 + 2 = 2$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$~~

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_4 = 3x^2$$

$$3x + 3 + 6d = 3x^2$$

$$3x + 3 + x^2 - x - 1 =$$

$$x + 1 + 2d = x^2$$

$$= (x^2 + 2x)^2$$

$$x^2 - x - 1 = 2d$$

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2$$

$$1 - 4 + 3 - 2 + 2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^2 + 4x^3$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \\ - x^4 + x^3 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} x+1 \\ x^3+ \end{array} \right.$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1) \left(\text{scribble} \right)$$

$$(x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 8 + 4 = 12 \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

$$(x+1)^2 (x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad x+1 \\ -x^3 + x^2 \quad \quad \quad | \\ \hline 2x^2 + 0x \quad \quad \quad | \\ +2x^2 + 2x \quad \quad \quad | \\ \hline -2x - 2 \quad \quad \quad | \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \quad | \quad x+1 \\ -x^3 + x^2 \quad \quad \quad | \\ \hline 2x^2 + 0x \quad \quad \quad | \\ +2x^2 + 2x \quad \quad \quad | \\ \hline -2x - 2 \quad \quad \quad | \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m+n)(m+n-9) = 75q^2$$

$75q^2$	1	-	$75q^2$
$25q^2$	3	=	
$15q^2$	5	=	
$5q^2$	15	=	
$3q^2$	25	=	
q^2	75	=	

$$(mn)(m+n-3) = 13p^2$$

1	$13p^2$
p	$43p$
p^2	13
13	p^2
$43p$	p
$13p^2$	1

$75q$	q	-
$25q$	$3q$	=
$15q$	$5q$	=
$5q$	$15q$	=
$3q$	$25q$	=
q	$75q$	=

$$(m+n)(m+n-9) \neq 75q^2$$

Если $m+n \div 3 \Rightarrow$

$$m+n-9 \div 3 \Rightarrow$$

$$(m+n)(m+n-9) \div 9$$

75	q^2	-	$q^2+9=75 \quad q^2=64 \quad q=8$, q должно быть кратно
25	$3q^2$	=	$3q^2+9=25$
15	$5q^2$	=	$5q^2+9=25$
5	$15q^2$	=	$15q^2+9=25$
3	$25q^2$	=	$25q^2+9=25$
1	$75q^2$	=	

Если $m+n \not\div 3 \Rightarrow$

$$m+n-9 \not\div 3 \Rightarrow$$

$$(m+n)(m+n-9) \not\div 3,$$

$$\text{но } 75q^2 = 3 \cdot 25q^2,$$

то $собр \div 3$



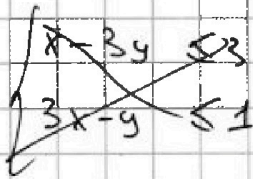


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$m(13-m) = 30$$

$$p^2 = 22$$

$$13m - m^2$$

$$13 + 9 = 22$$

$$13p + 9 = p$$

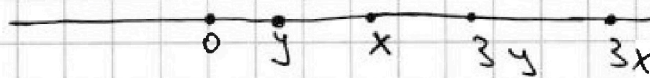
$$9 = 12p$$

$$x, y > 0$$

$$13p^2 + 9 = 1$$

$$p^2 + 9 = 13$$

$$x > y$$



$$x < y$$

$$x = y$$

$$169 - 60 = 109$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) =$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn^2 + mn^2 - 3mn = m \cdot n \cdot (m+n-3)$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$m \cdot n \cdot (m+n-3) = 75p^2$$

$$13p^2$$

$$1$$

$$13p$$

$$p$$

$$13$$

$$p^2 \quad \vee \quad p=2$$

$$p^2$$

$$13$$

$$p$$

$$13p$$

$$1$$

$$13p^2$$

$$m \cdot n \cdot 10 = 75p^2$$

$$m \cdot n \cdot 10 = 75 \cdot 4$$

$$m \cdot n = 15 \cdot 2$$

$$m \cdot n = 30$$

$$m+n = 13$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(m+n)(m+n-9) = 75 \cdot 3^2$$

$$x(x-9) = 3^3 \cdot 5^2$$

$$x^2 - 9x - 3^3 \cdot 5^2 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 =$$

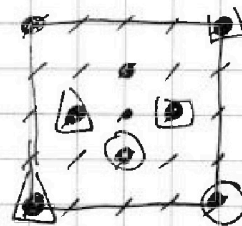
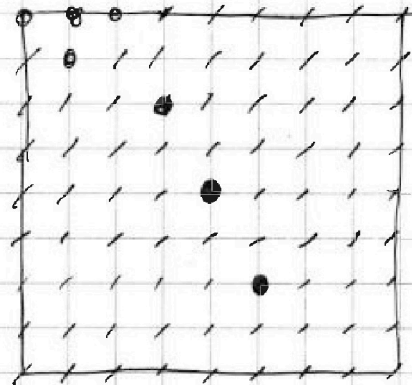
$$= 3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 =$$

$$= 3^3 (3 + 4 \cdot 5^2) = 3^3 \cdot (3 + 100) = 3^3 \cdot 103$$

$$3\sqrt{309}$$

$$x_1 = \frac{9 + 3\sqrt{309}}{2}$$

$$x_2 = \frac{9 - 3\sqrt{309}}{2}$$



но $x = m+n$, и они натуральные.

$$x(x-9) = 75 \cdot 9$$

$$x^2 - 9x = 3^3 \cdot 5^2$$

$$x^2 - 9x - 3^3 \cdot 5^2$$

$$D = 81 + 4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 =$$

$$= 3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 =$$

$$= 3^3 (3 + 4 \cdot 5^2) =$$

$$= 3^3 \cdot 103$$

$$\sqrt{D} = 3\sqrt{309}$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{309}}{2}$$

x.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m+n)(m+n+9) = 13p^2$$

1	$13p^2$	$13p^2 + 9 = 1$	$13p^2 = -9$	$(?!)$ $p^2 = -\frac{9}{13}$
13	p^2	$p^2 + 9 = 13$	$p^2 = 4$ $p = 2$	(\checkmark)
p	$13p$	$13p + 9 = p$	$9 = -12p$	$(?!)$ $p = -\frac{3}{4}$
p^2	13	$13 + 9 = p^2$	$p^2 = 22$	$(?!)$ $p = \sqrt{22}$
$13p$	p	$p + 9 = 13p$	$12p = 9$	$p = \frac{3}{4}$ $(?!)$
$13p^2$	1	$1 + 9 = 13p^2$	$p^2 = \frac{10}{13}$	$p = \sqrt{\frac{10}{13}}$ $(?!)$

$$p = 2$$

$$m+n = 13 \quad \text{НЕ ПРАВИЛЬНО}$$

$$B = 75g^2$$

$$m+n = 13$$

$$mn = 30$$

$$13^2 - 4 \cdot 30 = (m-n)^2$$

$$169 - 120 = 49$$

$$m-n = 7$$