



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\{a_n\}$  - ариф. пр.

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$x = ?$

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 = a_3 + 2d$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2 = a_3 + 6d$$

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2 \\ 3x + 3 + 6d = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \\ x^2 - x - 1 - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 - 2d = 0 \\ d = \frac{x^2 - x - 1}{2} \end{cases}$$

~~$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 + x^2 - x - 1 = 0$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 4x - 4 = 0$$~~

~~$$16 - 32 + 20 - 4 - 4 = 0$$~~

~~$$-2: 16 - 32 + 20 - 4 = 0$$~~

~~$$-4: 256 - 256 + 160 - 64 - 4 = 0$$~~

~~$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 4x - 4 \\ x^4 + 2x^3 \\ \hline 2x^3 + 5x^2 - 4x - 4 \\ 2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 - 4x - 4 \\ x^2 + 2x \\ \hline -6x - 4 \end{array}$$~~

~~$$1 + 4 + 5 - 4 - 4 = 0$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 - x^2 + x + 1 = 0$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$~~

~~$$-1: 1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$~~

прогр. на стр. 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 из 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{x^4 + x^3} \phantom{- 2x - 2} \\ -3x^3 + 3x^2 \phantom{- 2x - 2} \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \phantom{- 2x - 2} \\ 0 - 2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$-1: -1 + 3 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{x^3 + x^2} \phantom{- 2} \\ 2x^2 + 0x - 2 \\ \underline{2x^2 + 2x} \phantom{- 2} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$D/4 = 1 + 2 = 3$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ:  $1 - \sqrt{3}; -1; 1 + \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x}{3} + 1 = 3x - 1 \quad | \cdot 3$$

$$0x - x = 3 + 3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{x}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$4y + 8x = \frac{5 \cdot 4}{4} + \frac{8 \cdot 3}{4} = 11$$

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{3} - 1 \\ y \leq \frac{x}{3} + 1 \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

Границы:

$$y = \frac{x}{3} - 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{x}{3} + 1 \quad (2)$$

$$y = 3x - 1 \quad (3)$$

$$y = 3x + 1 \quad (4)$$

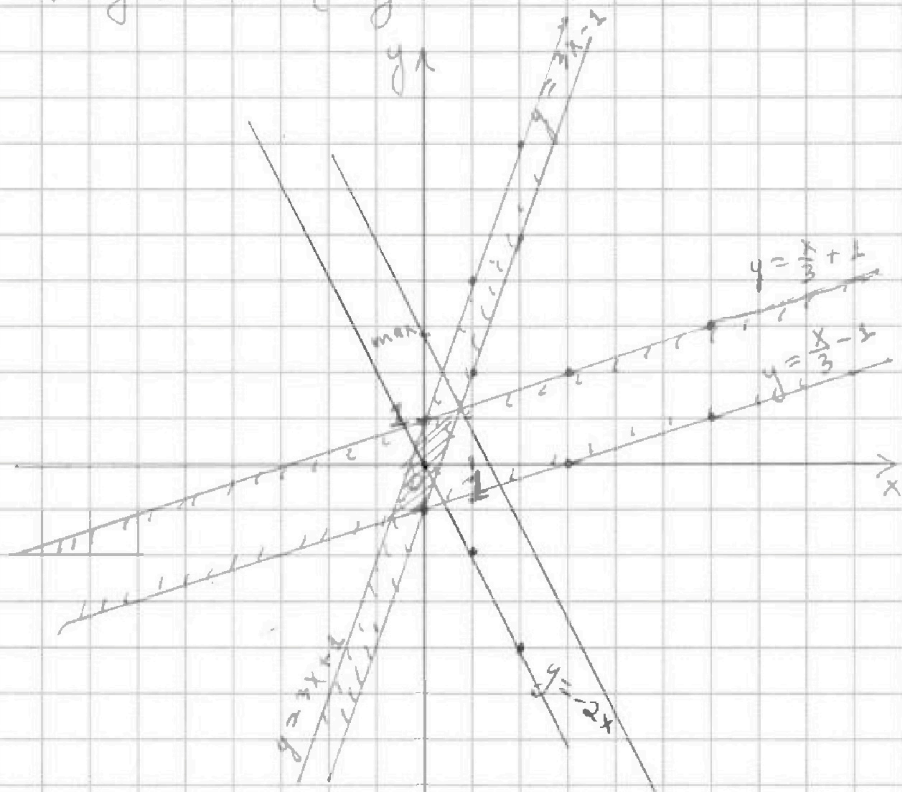
Пробные точки:

$$1) (0; 0): 0 \geq -1 - \text{да}$$

$$2) (0; 0): 0 \leq 1 - \text{да}$$

$$3) (0; 0): 0 \geq -1 - \text{да}$$

$$4) (0; 0): 0 \leq 1 - \text{да}$$



Построим прямую  $4y + 8x = 0$ ,  $y = -2x$  и будем двигать вверх вниз, чтобы найти max значение  $4y + 8x$

По графику max достигается в точке пересечения прямых  $y = \frac{x}{3} + 1$  и  $y = 3x - 1$  Продолж. на стр. 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = \underset{\in \mathbb{N}}{(m+n)} \underset{\in \mathbb{Z}}{(m+n-9)}$$

$$B = mn + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) \quad m+n \neq 1, \quad \underset{\in \mathbb{N}}{mn} \quad \underset{\in \mathbb{Z}}{(m+n-3)}$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 & (1) \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1. m+n=13, \quad 13-9=p^2, \quad p=4 \in \mathbb{Z} \\ 2. m+n=13p, \quad 13p-9=p, \quad p \notin \mathbb{Z} \\ 3. m+n=13p^2, \quad 13p^2-9=1, \quad p \notin \mathbb{Z} \\ 4. m+n=p, \quad p-9=13p, \quad p < 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 & (2) \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 & (2) \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 & (2) \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$1) \quad m+n=13 \Rightarrow 10mn = 75q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$13 \cdot 4 = 13 \cdot 4$$

$$30 \cdot 10 = 75 \cdot 4$$

$$mn = \frac{15q^2}{2} \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q=2$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (10, 3); (3, 10)$$

$$(1; 13); (13; 1)$$

$$2) \quad mn = 13 \Rightarrow m+n=14, \quad 13 \cdot 11 = p^2, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$(13p)(p, 13)$$

$$mn = 13p, \quad 13+p-3 = p, \quad \emptyset$$

$$m+n:$$

$$mn = 13p^2: \quad 13p+p-3 = 1$$

$$14p = 4, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$13p^2 + p - 3 = 4$$

$$13p^2 = 3, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$13 + p^2 - 3 = 1$$

$$p^2 = -9, \quad p \notin \mathbb{N}$$

$$(1; 1)$$

$$mn = 1: \quad 2-3 = 1 = p^2, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ } (10, 3); (3, 10)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta YMC \sim \Delta AXC, \angle MYC = \angle XAC, \angle C - \text{общий} \Rightarrow$$

$$\frac{YM}{AX} = \frac{YC}{AC} = \frac{MC}{XC} = \frac{4a}{3a}$$

$$\begin{cases} A = 13p^2 \\ b = 75q^2 \\ A = 75q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = 13p^2 \\ mn + m^2 - 3mn = 75q^2 \\ (m+n)^2 - 9(m+n) = 75q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases} \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{cases} \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \\ (m+n)(m+n-9) = 75q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$$

1)  $m+n=13, m+n-9=p^2=13-9=p^2=4, p=2$

$$m+n=13p, m+n-9=p, 13p-9=p, 12p=9, p \notin \mathbb{Z}$$

не и.б.:  $m+n=1, m+n-9=13p^2, -8=13p^2, p \notin \mathbb{R}$

2)  $mn=3, m+n-3=25q^2$  нет пар из  $\mathbb{N}$

$mn=15, m+n-3=5q^2$  нет пар из  $\mathbb{N}$

$mn=75, m+n-3=9q^2$  нет пар из  $\mathbb{N}$

$mn=75q^2, m+n-3=1$

$mn=1$  не и.б.,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$a=x+1, -a=-x-1, -x-1+7, 2\sqrt{a(7-a)} - \sqrt{a} + \sqrt{7-a} = 5$

$4a(7a-a^2) + a + 7 - a - 4a\sqrt{7-a} + 4(7-a)\sqrt{a} - 2\sqrt{a(7-a)} = 25$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$ ,  $AX$  - бисс.,  $M$  - сер.  $BC$ ,  $YM \parallel AX$   
 $Z \in YM$   
 $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ ,  $BC = ?$

Решение:

$\angle XAC = \angle BZM = \angle ZYC$ , как

соответственные,  $\angle BZM = \angle ZYA$ ,

как вертикальные  $\Rightarrow \angle ZYC = \angle ZYA \Rightarrow \triangle YAZ - p/d \Rightarrow$

$$ZA = YA = 6$$

По т. Менелая для  $\triangle ABC$  и секущей  $KM$ :

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{AY} = 1; \frac{6}{ZB} \cdot 1 \cdot \frac{6+18}{6} = 1$$

$$ZB = 24 \Rightarrow AB = 30; \text{ т.к. } AX - \text{бисс.}, \text{ то } \frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Пусть } BC = 8a, BM = MC = 4a, BX = 5a, XC = 3a$$

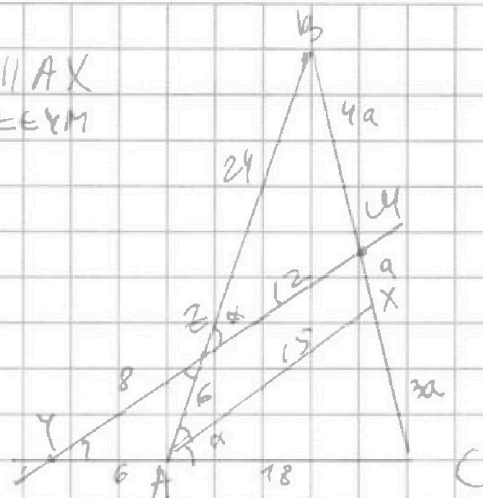
По т. Менелая  $\triangle ABC$  и секущей  $MZ$ :

$$\frac{MZ}{ZY} \cdot \frac{YA}{AC} \cdot \frac{BC}{BM} = 1; \frac{MZ}{8} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{8}{4} = 1, \frac{MZ}{8} = \frac{3}{2}, MZ = 12$$

$\triangle ZBM \sim \triangle ABX$ ,  $\angle BZM = \angle BAX = \angle XAC$ ,  $\angle B$  - общий

$$\frac{ZM}{AX} = \frac{ZB}{AB} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \quad \frac{12}{AX} = \frac{4}{5}, AX = 15$$

Продолжи на стр. 6.







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

6 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по 7. косинусов в  $\triangle BZM$  и  $\triangle XAC$ :

$$\begin{cases} 16a^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cos \alpha \cdot 12 \cdot 24 \\ 9a^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cos \alpha \cdot 15 \cdot 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{24^2 + 12^2 - 16a^2}{2 \cdot 12 \cdot 24} \\ \cos \alpha = \frac{15^2 + 18^2 - 9a^2}{2 \cdot 15 \cdot 18} \end{cases}$$

$$\frac{24^2 + 12^2 - 16a^2}{16} = \frac{15^2 + 18^2 - 9a^2}{15}$$

$$15(12 \cdot 4 + 12^2) - 240a^2 = 16(9 \cdot 5^2 + 9 \cdot 6^2) - 144a^2$$

$$96a^2 = 15 \cdot 144 \cdot 5 - 144(25 + 36) \quad | :6$$

$$16a^2 = 6 \cdot 4 \cdot 75 - 6 \cdot 4 \cdot 61 \quad | :8$$

$$4a^2 = 6 \cdot 75 - 6 \cdot 61 \quad 2a^2 = 3 \cdot 75 - 3 \cdot 61 = 3(75 - 61) =$$

$$a^2 = 24$$

$$a = \sqrt{24} \Rightarrow BC = 8a = 8\sqrt{24}$$

Ответ:  $8\sqrt{24}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6$   
 $2^2 \cdot 6^2$   
 $2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6$   
 $3 \cdot 5 \cdot 6^2$

$15 \cdot 2^2(16+1) - 8(15^2+18^2) =$   
 $= 4(15 \cdot 36 - (7 - (2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 18^2)))$

$98 \overline{) 9180}$   
 $\underline{1098}$   
 $8082$

$8082 \overline{) 2}$   
 $4041 \quad 3$   
 $1347 \quad 3$   
 $449$

$168 \overline{) 2424}$   
 $\underline{126}$   
 $126$   
 $449 \overline{) 7}$   
 $\underline{2916}$

$4 \cdot 2 \cdot 3^2 = 449$   
 $2 \cdot 7$

$225$   
 $\overline{) 324}$   
 $549$

$144 \overline{) 2}$   
 $09 \quad 72$

$12180$   
 $\overline{) 5}$   
 $10900$   
 $\underline{4392}$   
 $6508$

$6508 \overline{) 2}$   
 $3254 \quad 2$   
 $1627$

$144 \overline{) 2}$   
 $09 \quad 72$

$225$   
 $\overline{) 324}$   
 $549$

$2725$   
 $\overline{) 1098}$   
 $1627$   
 $549$   
 $1098$

$15$   
 $\overline{) 90}$   
 $1350$   
 $\underline{150}$   
 $15$

$142$   
 $\overline{) 1893}$

$225$   
 $\overline{) 324}$   
 $549$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$   
 $x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$   
 $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$   
 $x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$   
 $D = 25 + 24 = 49$   
 $x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2}; \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

$x^2(x^2+5) - \sqrt{y} = y^2(y^2+5) - \sqrt{x}$   
 $2180(4+1) = 8 \cdot 549$   
 $4(545 \cdot 5 - 2 \cdot 549)$   
 $4 \cdot 1627$   
 $\underline{26712}$   
 $57138$

$1350$   
 $\overline{) 549}$   
 $802$

$1627$   
 $\overline{) 168}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 из 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^2 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^2 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$2) x^2 y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})((x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ \Rightarrow x = y \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 = 0$$

не д.б., т.к. все скобки  $\geq 0$   
с перемножением

$$1) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = -(x+1)(x-6) = (x+1)(6-x) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x}$$

$$x+1+6-x+25 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 10\sqrt{x+1} - 10\sqrt{6-x} = 4(x+1)(6-x)$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 5$$

$$24 + 20x - 4x^2 + x+1+6-x - 4(x+1)\sqrt{6-x} + 2(6-x)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} =$$

$$= 25 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 4(x+1)\sqrt{6-x} + 2(6-x)\sqrt{x+1} + 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 5$$

$$a = x-1 \Rightarrow 6-x = 7-a \cdot 2\sqrt{a/2-a} - \sqrt{a} + \sqrt{7-a} = 5$$

$$28a - 4a^2 + 7 - 4a\sqrt{7-a} + 4(7-a)\sqrt{a} - 2\sqrt{a(7-a)} = 25$$

$$28a - 4a^2 = 2(2a\sqrt{7-a} - 2(7-a)\sqrt{a} + \sqrt{a(7-a)} + 9)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
8 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7a - 2a^2 = 2a\sqrt{7-a} - 2(7-a)\sqrt{a} + (a\sqrt{7-a})' + 9$$

$$7a - 2a^2 - 9 = \sqrt{7-a} (2a - 2\sqrt{a(7-a)}) + 7a$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 5$$

$$\sqrt{6-x} (\sqrt{x+1} + 1) = 5 + \sqrt{x+1}$$

$$(6-x)(\sqrt{x+1} + 1) = 25 + 10\sqrt{x+1} + x+1$$

$$24(x+1) + 24\sqrt{x+1} + 6 - 4x(x+1) - 4x\sqrt{x+1} - x = 25 + 10\sqrt{x+1} + x+1$$

$$f(x) = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \text{ возрастает}$$

$$f(x) = -\sqrt{x+1} \text{ убывает}$$

$$f(x) = \sqrt{6-x} \text{ возрастает, } f(x) = 5 \text{ монотонка} \Rightarrow 1 \text{ корень}$$

$$x+1=a, \quad 2\sqrt{a(7-a)} - \sqrt{a} + \sqrt{7-a} = 5$$

$$\sqrt{7-a} \neq 0: \quad \sqrt{a} = 5 \quad \sqrt{7-a} = 5$$

$$\sqrt{x+1} = 5$$

$$x+1 = 25$$

$$x = 24$$

$$\sqrt{6-x} = 5$$

$$6-x = 25$$

$$x = -19$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{7-a})^2 - a - 7 + a - \sqrt{a} + \sqrt{7-a} = 5$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{7-a})^2 + \sqrt{7-a} - \sqrt{a} = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
10 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Способов закрасить ~~смысл~~ ~~относит~~  
центра узла, лежащих на диагональ  
квадрата: 4

Рассмотрим  $1/4$  часть квадрата,  
т.е. если делать раскраски на ней,  
то на остальных трех аналогично

кол-во вариантов раскрасить 2 узла:  $C_{16}^2 = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = 16 \cdot 15 = 240$

$4 \cdot 240 = 960$  - кол. способов закрасить 2 узла, если они в  
1 четверти.

Рассмотрим два противоположных квадрата  $4 \times 4$ :

Способов выбрать отсюда 2 узла  $C_{32}^2 = 32 \cdot 31 = 992$

Ответ:  $4(992 + 240) = 4928$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано

$$(x+1)(6-y) = 6x - ky + 6 - y$$

$$(x^2 + y^2 + 5)$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}$$

$\triangle ABC$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + 5(x+y)(x-y) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$AX$ -бисс.

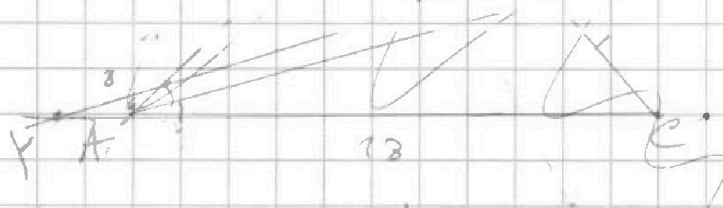
$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \dots$$

$M$ -сер.  $BC$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \dots = 0$$

$$AC = 18, AZ = 6, YE = 8$$

$BC = ?$

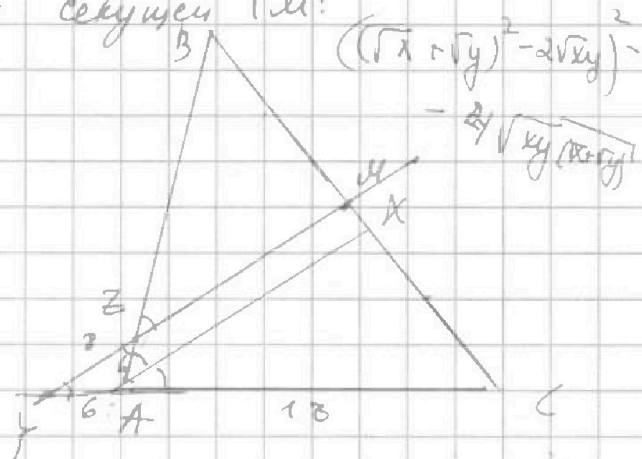


По т. Менелая  $\triangle ABC$  и секущей  $YEM$ :

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

$$\frac{6}{ZB} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{18 + YA}{YA} = 1$$

$$\frac{6}{ZB} \cdot (18 + 1) = 1$$



$\angle ZAX = \angle BZM$ ;  $\angle ZYA = \angle XAC$ , как соответственные,

$\angle BZM = \angle ZYA$ , как вертикальные,  $\angle ZAX = \angle BZM = \angle ZYA = \angle XAC = \angle YZA$ ,

т.к.  $AX$ -биссектриса  $\Rightarrow \triangle ZYA - p/d \Rightarrow ZA = YA = 6$

из т. Менелая

$$\frac{6}{ZB} \cdot 4 = 1 \quad \frac{24}{ZB} = 1 \Rightarrow ZB = 24 \Rightarrow AB = 24 + 6 = 30$$

т.к.  $AX$ -бисс., т  $\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ . Пусть  $BC = 8a$ , тогда  $BM = MC = 4a$ ,  $BX = 5a$ ,  $XC = 3a$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$m+n = 3, m+n-9 = 25q$   
 $m+n = 15, m+n-9 = 5q^2$   
 $m+n = 25$

$\frac{mZ}{ZY} \cdot \frac{YA}{AC} \cdot \frac{BC}{BX} = 1$   
 $\frac{mZ}{ZY} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$   
 $\frac{mZ}{ZY} \cdot \frac{2}{3} = 1$   
 $\frac{mZ}{ZY} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{mZ}{8} = \frac{3}{2}, mZ = 12$

$\triangle ZBK \sim \triangle ABX: \frac{ZB}{AB} = \frac{BK}{BX} = \frac{ZK}{AX} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = \frac{12}{AX}$   
 $AX = 15$

$\triangle ZBK: 16a^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cos \alpha \cdot 24 \cdot 12$   
 $\cos \alpha = \frac{24 \cdot 12 + 12 \cdot 6 - 8a^2}{24 \cdot 12}$

$\triangle KAC: 9a^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cos \alpha \cdot 15 \cdot 18$   
 $\cos \alpha = \frac{15^2 + 18^2 - 9a^2}{2 \cdot 15 \cdot 18}$

$\sqrt{x}(24-4x-10) + (x+1)(24+6-4x-x-1) = 25$   
 $14-4x \quad 29-5x$

Handwritten calculations and diagrams showing geometric relationships and algebraic steps. Includes a diagram of a triangle with points Z, B, K, A, B, X, C, K, A, C and various lengths and angles.