



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



- [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
- [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

- [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
- [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
- [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$
- [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
- [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

{u.3 - исп. np.

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

x - ?

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 = a_3 + 2d$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2 = a_3 + 6d$$

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2 \\ 3x + 3 + 6d = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \\ x^2 - x - 1 - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{x^2 - x - 1}{2}$$

~~$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 + x^2 - x - 1 = 0$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 4x - 4 = 0$$~~

$\frac{x^4}{x^2}$
 $\frac{4x^3}{4x}$
 $\frac{5x^2}{5}$
 $\frac{-4x}{-4}$

~~$$26 - 32 + 20 + -1 : 4 - 4 + 5 + 4$$~~

+16

~~$$-2 : 26 - 32 + 20 - 4 = 0$$~~

~~$$-4 : 256 - 256 + 80 + 64 - 4$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 4x - 4$$~~

~~$$x^4 + 2x^3$$~~

~~$$2x^3 + 5x^2$$~~

~~$$2x^3 + 4x^2$$~~

~~$$x^2 - 4x$$~~

~~$$x^2 + 2x$$~~

~~$$-6x - 4$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 - x^2 + x + 1 = 0$$~~

~~$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$~~

~~$$-1 : 1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$~~

нужен. на стр. 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} -x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ \hline -3x^3 + 3x^2 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ \hline -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} x+1 \\ x^3 + 3x^2 + 0 - 2 \end{array}$$

$$-1 : -1 + 3 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 3x^2 + 0 - 2 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ \hline -2x^2 + 0 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ \hline -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} x+1 \\ x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta/4 = 1 + 2 = 3$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x = -1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 1 - \sqrt{3}; -1; 1 + \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x+1}{3} = 3x - 1 \mid \cdot 3$$

$$9x - x = 3 + 3$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{x}{9 \cdot 3} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$4y + 8x = \frac{5 \cdot 4}{4} + \frac{8 \cdot 3}{4} = 11$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \\ 3x - y \leq 1 \\ 3x - y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{3} - 1 \\ y \leq \frac{x}{3} + 1 \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

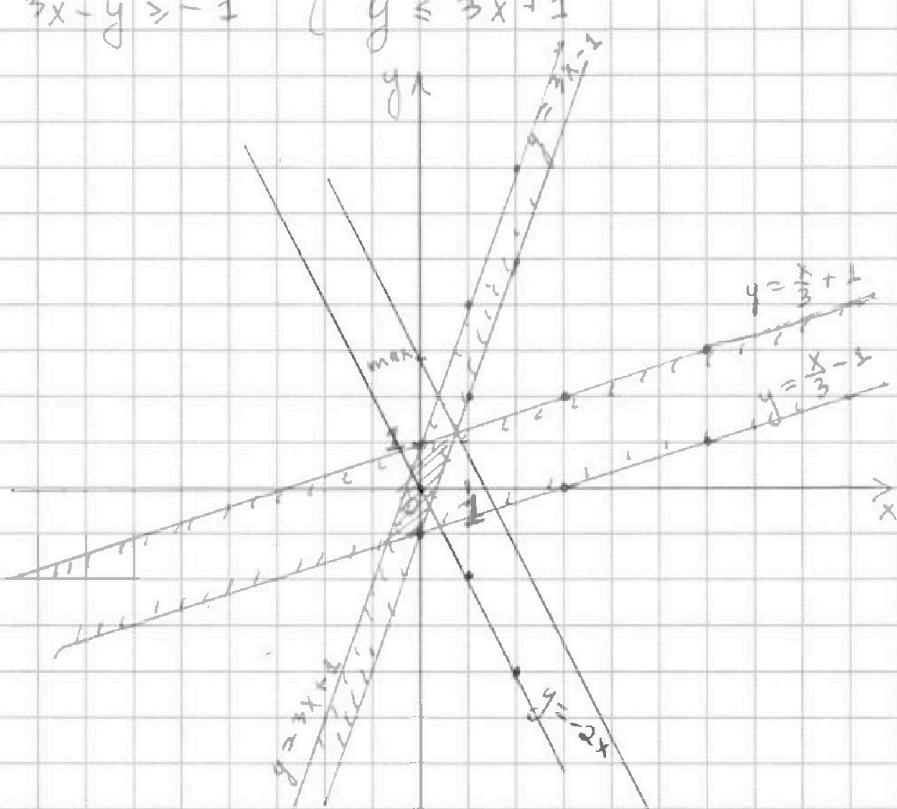
Границы:

$$y = \frac{x}{3} - 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{x}{3} + 1 \quad (2)$$

$$y = 3x - 1 \quad (3)$$

$$y = 3x + 1 \quad (4)$$



Пробные точки:

$$1) (0; 0): 0 \geq -1 - ga$$

$$2) (0; 0): 0 \leq 1 - ga$$

$$3) (0; 0): 0 \geq -1 - ga$$

$$4) (0; 0): 0 \leq 1 - ga$$

$$4y + 8x = 0$$

Построим прямую $4y = -8x$, $y = -2x$ и будем двигать вверх вниз, чтобы найти max значение $4y + 8x$

По графику max достигается в точке пересечения прямых $y = \frac{x}{3} + 1$ и $y = 3x - 1$. Продолж. на стр. 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
9 из 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9mn \cdot 9n = (m+n)^2 - 5(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$\in \mathbb{N}$ $\in \mathbb{Z}$

$$B = mn + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) \quad m+n \neq 1,$$

$\in \mathbb{N}$ $\in \mathbb{Z}$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 \quad (1) \quad 1) \ L m+n=13, \quad 13+9=p^2, \quad p=4 \ 2$$

$$mn(m+n-3) = 75q^2 \quad 2) \ L m+n=13p, \quad 13p-9=p, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$(m+n)(m+n-9) = 75q^2 \quad (2) \quad 3) \ L m+n=13p^2, \quad (13p)^2-9=p^2, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$mn(m+n-3) = 13p^2 \quad 4) \ L m+n=p, \quad p-9=13p, \quad p < 0$$

$$1) \ L m+n=13 \Rightarrow 10mn=75q^2$$

$$2mn=15q^2 \quad 13 \cdot 4 = 13 \cdot 4$$

$$mn=\frac{15q^2}{2} \Rightarrow q^2:2 \Rightarrow q=2$$

$$\begin{cases} mn=30 \Rightarrow (m,n)=(10,3), (3,10) \\ m+n=13 \end{cases}$$

$$(1;13); (13;1)$$

$$2) \ L mn=13 \Rightarrow m+n=14, \quad 13 \cdot 11=p^2, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$(13,p)(p,13)$$

$$mn=13p, \quad 13rp-3=p, \quad \emptyset$$

$m+n:$

$$mn=13p^2: \quad 13p+p-3=1 \quad 19p=4, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$13p^2+1-3=1 \quad 13p^2=3, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$13+p^2-3=1 \quad p^2=-9, \quad p \notin \mathbb{N}$$

$$(1;1)$$

$$mn=1: \quad 2-3=1=p^2, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

Ответ $(10,3); (3,10)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle YMC \sim \triangle AXC$, $\angle MYC = \angle XAC$, $\angle C$ -одинаковый \Rightarrow

$$\frac{YC}{AX} = \frac{YC}{AC} = \frac{MC}{XC} \Rightarrow \frac{4a}{3a}$$

$$\begin{aligned} & \text{Уч} \quad \text{Уч} \\ & \left\{ \begin{array}{l} A = (3p)^2 \\ B = 75q^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{24}{18} \\ \Rightarrow \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (3p)^2 \\ m^2 + mn^2 - 3mn = 75q^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (m+n)(m+n-9) = 9p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} A = 75q^2 \\ B = (3p)^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (m+n)^2 - 9(m+n) = 75q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$1) \quad m+n=13, \quad m+n-9=p^2 = (3-p)^2 = 9-p^2 = 4, \quad p=2, \quad (1, 2), (4, 9), (7, 6) / (10, 3)$$

$$(2, 11), (5, 8), (8, 5) / (11, 2)$$

$$(3, 10), (6, 7), (9, 4) / (12, 1)$$

$$m+n=13p, \quad m+n-9=p, \quad 12p=9, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$m+n=13p^2, \quad m+n-9=1, \quad 13p^2-9=1, \quad 13p^2=10, \quad p \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{нет корней}$$

$$2) \quad m+n=3, \quad m+n-3=25q^2 \quad \text{нет корней из } ①$$

$$mn=15, \quad m+n-3=5q^2 \quad \text{нет корней из } ①$$

$$mn=25, \quad 3q=5q^2 \quad \text{нет корней из } ①$$

$$mn=75, \quad m+n-3=q^2 \quad \text{нет корней из } ①$$

$$mn=225, \quad 15q^2=225 \quad q=15$$

$$mn=75q^2, \quad m+n-3=q \quad \text{нет корней из } ①$$

$$5 \cdot 5q = 225 \quad q=10$$

$$mn=75q^2, \quad m+n-3=q \quad \text{нет корней из } ①$$

$$5 \cdot 5q = 225 \quad q=10$$

$$mn=75q^2, \quad m+n-3=1$$

$$(x+1)(6-x)^2 + (x+1)(6-x)^2 - \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x}$$

$$mn=1$$

$$\sqrt{x+1}(\sqrt{6-x}-1) + (\sqrt{6-x})(\sqrt{x+1})$$

$$4(6+5x-x^2) + x+1 + 6-x$$

$$4a(x-a) + a + 7 - ax - 4a\sqrt{7-a} + 4(7-a)\sqrt{a} - 2\sqrt{a(7-a)} = 25$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
5 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$, AX -бисс., M -сер. BC , $YM \parallel AX$

$\angle YCM$

$$AC = 18, AZ = 6, YZ = 8, BC = ?$$

Решение:

$$\angle XAC = \angle BZM = \angle YZA, \text{ так как}$$

согласно теореме, $\angle BZM = \angle YZA$,

как вертикальные $\Rightarrow \angle YZA = \angle YZA \Rightarrow \angle YAZ - p/d \Rightarrow$

$$\angle A = \angle A = 6$$

По т. омеги для $\triangle ABC$ и получаем что:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{CY}{AY} = 1; \frac{6}{24} \cdot 1 \cdot \frac{6+8}{6} = 1$$

$$ZB = 24 \Rightarrow AB = 30; \text{ т.е. } AX \text{- бисс., т.о. } \frac{AX}{XC} = \frac{AB}{BC} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

$$Пусть BC = 8a, BM = MC = 4a, BX = 5a, XC = 3a$$

По т. омеги для $\triangle ABX$ и получаем что:

$$\frac{AZ}{ZY} \cdot \frac{YA}{AC} \cdot \frac{BC}{BM} = 1; \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{2}{1} = 1, \frac{AZ}{8} = \frac{3}{2}, AZ = 12$$

$\triangle BZY \sim \triangle ABX$, $\angle BZY = \angle BAX = \angle KAC$, $\angle B$ -общий

$$\frac{ZY}{AX} = \frac{BZ}{AB} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \quad \frac{12}{AX} = \frac{4}{5}, AX = 15$$

Продолж. на стр. 6.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
6 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7. Коинусов б здм ч а х а с:

$$\begin{cases} 16a^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cos \alpha \cdot 12 \cdot 24 \\ 9a^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cos \alpha \cdot 15 \cdot 18 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{24^2 + 12^2 - 16a^2}{2 \cdot 12 \cdot 24} \\ \cos \alpha = \frac{15^2 + 18^2 - 9a^2}{2 \cdot 15 \cdot 18} \end{cases}$$

$$\frac{24^2 + 12^2 - 16a^2}{16} = \frac{15^2 + 18^2 - 9a^2}{15}$$

$$15(12^2 + 12^2) - 240a^2 = 16(9 \cdot 5^2 + 9 \cdot 6^2) - 144a^2$$

$$96a^2 = 15 \cdot 144 \cdot 5 - 144(25+36) \quad | : 16$$

$$16a^2 = 6 \cdot 4 \cdot 75 - 6 \cdot 4 \cdot 61 \quad | : 8$$

$$3a^2 = 6 \cdot 75 - 6 \quad 2a^2 = 3 \cdot 75 - 3 \cdot 61 = 3(75-61) = 14$$
$$a^2 = 21$$

$$a = \sqrt{21} \Rightarrow BC = 8a = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$22 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6$ $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6$ $\begin{array}{r} 225 \\ 324 \\ \hline 549 \end{array}$ $\begin{array}{r} 144 \\ 24 \\ \hline 54 \end{array}$
 $2^3 \cdot 6^2$ $3 \cdot 5 \cdot 6^2$ $\begin{array}{r} 8 \\ \times 6 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 96 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ \times 5 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 40 \end{array}$
 $2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6$ 4392 9392 $\begin{array}{r} 900 \\ 4392 \\ \hline 6592 \end{array}$
 $(5 \cdot 12^2(16+1) - 8(15^2+18^2)) =$ $\begin{array}{r} 212 \cdot 12 \cdot 4 \\ 4392 \\ \hline 6592 \end{array}$
 $= 4(15 \cdot 36 + (7 - (2 \cdot 15^2 + 2 \cdot 18^2)))$
 $\begin{array}{r} 984 \\ - 9180 \\ \hline 1098 \end{array}$ $168 \mid 2424$ $6508 \mid 2$ $\begin{array}{r} 22 \\ 545 \\ \hline 5 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 1098 \\ - 8082 \\ \hline 8082 \end{array}$ $\begin{array}{r} 42 \\ \times 3 \\ \hline 126 \\ 126 \\ \hline 44917 \end{array}$ $3254 \mid 2$ $\begin{array}{r} 2725 \\ 1098 \\ \hline 1627 \end{array}$
 $8082 \mid 2$ $44917 \mid 2$ $1627 \mid 2$ $\begin{array}{r} 2725 \\ 1098 \\ \hline 1627 \end{array}$
 $4041 \mid 3$ $\begin{array}{r} 2 \cdot 3^2 \cdot 449 \\ 24 \cdot 4 \end{array}$ $144 \mid 2$ $\begin{array}{r} 2 \\ 1098 \\ \hline 1098 \end{array}$
 $1347 \mid 3$ $\begin{array}{r} 1627 \mid 42 \\ 126 \mid 13 \\ \hline 367 \end{array}$ $144 \mid 2$ $\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ \hline 18 \end{array}$
 449 $\begin{array}{r} 15 \\ 1350 \\ \hline 150 \\ - 150 \\ \hline 0 \end{array}$ $1627 \mid 42$ $\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ \hline 18 \end{array}$
 $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{array} \right.$ $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{y}$
 $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$ $\begin{array}{r} 4 \\ x=\sqrt{y} \end{array}$
 $x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$ $x^2(x^2+5) - \sqrt{y} = y^2(y^2+5) - \sqrt{x}$
 $\Delta = 25 + 24 = 49$ $\begin{array}{r} 144 \\ 147 \\ \hline 3 \\ 147 \\ \hline 0 \end{array}$ $2180(4+\sqrt{y}) - 8 \cdot 549$
 $x_1 = \frac{5+7}{2}; x_2 = -1$ $\begin{array}{r} 1720 \\ 147 \\ \hline 2180 \\ - 1350 \\ \hline 830 \end{array}$ $4(545 \cdot 5 - 2 \cdot 549)$
 $x_1 = 6$ $\begin{array}{r} 1720 \\ 147 \\ \hline 2180 \\ - 1350 \\ \hline 830 \end{array}$ $4 \cdot 1627 \mid \frac{267}{57} \mid 31$
 $\begin{array}{r} 1350 \\ - 549 \\ \hline 801 \end{array}$ $\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 16 \end{array}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
7 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1) \\ x^2 + 5x^2 - \sqrt{y} = y - \sqrt{x+5y^2} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$2) x^2y^2 + 5(x^2-y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(x^2+y^2)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{x}-\sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x^2+y^2)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 1 = 0$$

не м.д. р.к. Все скобки ≥ 0
с неравенствами

$$1) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = -(x+1)(x-6) = (x+1)(6-x) \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

$$x_1, 2 = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \cdot \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 6 - x + 25 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 10\sqrt{x+1} - 10\sqrt{6-x} = 4(x+1)(6-x)$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 5$$

$$24 + 20x - 4x^2 + x + 1 + 6 - x - 4(x+1)\sqrt{6-x} + 2(6-x)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} =$$

$$= 25 \quad \therefore 4x^2 - 20x + 4(x+1)\sqrt{6-x} + (6-x)\sqrt{x+1} + 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 5$$

$$a = x+1 \Rightarrow 6-x = 5-a \quad 2\sqrt{a}(2-a) - \sqrt{a} + \sqrt{5-a} = 5$$

~~$$28a - 4a^2 + 7 - 4a + 7a + 4(7-a)\sqrt{a} - 2\sqrt{a}(5-a) = 25$$~~

~~$$28a - 4a^2 = a(2a\sqrt{7-a} - 2(5-a)\sqrt{a} + \sqrt{a}(5-a)^2 + 9)$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
8 ИЗ 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$7a - 2a^2 = 2a\sqrt{7-a} - 2(7-a)\sqrt{a} + \sqrt{a}(7-a) + 9$$

$$7a - 2a^2 - 9 = \sqrt{7-a}(2a - 2\sqrt{a}(7-a) + \sqrt{a})$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 5$$

$$\sqrt{6-x}(2\sqrt{x+1} + 1) = 5 + \sqrt{x+1}$$

$$(6-x)(4\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x+1} + 1) = 25 + 10\sqrt{x+1} + x+1$$

$$24(x+1) - 24\sqrt{x+1} + 6 - 4x(x+1) - 4x\sqrt{x+1} - x = 25 + 10\sqrt{x+1} + x+1$$

$$f(x) = 2\sqrt{x+1}(6-x) \text{ возрастает}$$

$$f(x) = -\sqrt{6-x} \text{ убывает}$$

$$x+1=a, 2\sqrt{a}(7-a) - \sqrt{a} + \sqrt{7-a} = 5$$

$$\sqrt{7-a}=0 : \quad \sqrt{a}=5$$

$$\sqrt{x+1}=5$$

$$x+1=25$$

$$x=24$$

$$\sqrt{a}=5 : \sqrt{7-a}=5$$

$$\sqrt{6-x}=5$$

$$6-x=25$$

$$x=-19$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{7-a})^2 - a - 7+a - \sqrt{a} + \sqrt{7-a} = 5$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{7-a}) + \sqrt{7-a} - \sqrt{a} = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
40 ИЗ 40

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Способов закрасить симметрическим образом узла, лежащих на диагональных линиях квадрата: 4

Рассмотрим $\frac{1}{9}$ часть квадрата,

т.к. если делать раскраску на кай,

то на оставшихся трех аналогично

кол-во вариантов раскрасить 2 узла: $C_{16}^2 = \frac{16!}{2 \cdot 14!} =$

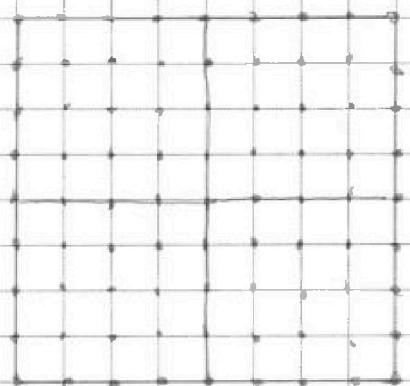
$$= 16 \cdot 15 = 240$$

$4 \cdot 240 = 960$ - кол. способов закрасить 2 узла, если они в 1 четверти.

Рассмотрим два противоположных квадрата 4×4 :

Способов воспринять оттуда 2 узла $C_{32}^2 = 32 \cdot 31 = 992$

$$\text{Ответ: } 4(992 + 240) = 4928$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дано

$$(x+1)(6-y) = 6x - xy + 6 - y \quad (x^2+y^2+5)$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) + 7x - 7y = 0 \quad (x+y)^2 - 2xy$$

ΔABC

$$(x^2+y^2)(x^2-y^2) + 5(x+y)(x-y) + 7x - 7y = 0$$

$$\text{дл-сеп. } BC \quad (x^2+y^2)(x+y)(x-y)(7x-7y) + 5(x+y)(\sqrt{x+y})(\sqrt{x-y}) \dots \\ (x-y)((x^2+y^2)(x+y)(x+y)(\sqrt{x+y}) + 5(x+y)(\sqrt{x+y})(\sqrt{x-y})) = 0$$

$$AC = 18, AZ = 6, YZ = 8$$

BC - ?

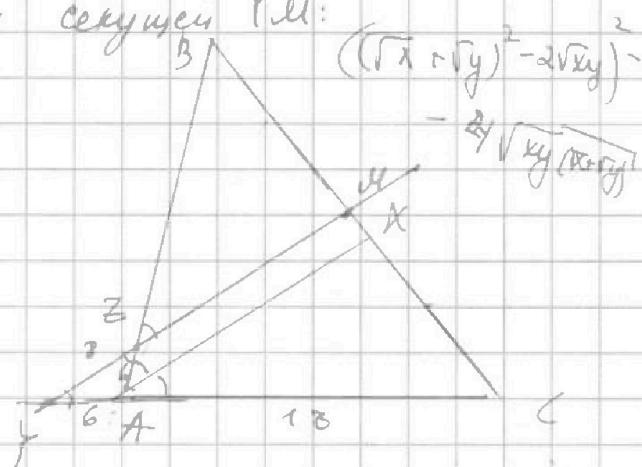


по т. Менелая $\triangle ABC$ и следующий ул:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{XA} = 1$$

$$\frac{6}{ZB} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{18+YA}{YA} = 1$$

$$\frac{6}{ZB} \cdot \left(\frac{18}{YA} + 1 \right) = 1$$



$\angle ZAX = \angle BZY$; $\angle ZYA = \angle XAC$, как соответственные,

$\angle BZY = \angle YZA$, как вертикальные, $\angle ZAX = \angle BZY = \angle YZA = \angle XAC = \angle YZA$,

т.к. AX -биссектриса $\Rightarrow \angle YZA = p/2 \Rightarrow \angle YA = \angle PA = 6$

из т. менелая

$$\frac{6}{ZB} \cdot 4 = 1 \quad \frac{24}{ZB} = 1, \quad ZB = 24 \Rightarrow AB = 24 + 6 = 30$$

т.к. AX -бисс., т.к. $\frac{AB}{AC} = \frac{AY}{YC} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$. Используя $BC = 8a$, тогда $AY = 4a$, $YC = 5a$, $AC = 9a$, $YC = 3a$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m+n=3, m+n-9=25 \quad \begin{array}{l} 2^2 \cdot 2 \cdot 4 \\ 2^2 \cdot 15 \\ 2^2 \cdot 25 \end{array}$$

$$m+n=15, m+n-9=59 \quad \begin{array}{l} 2^2 \cdot 5 \\ 2^2 \cdot 5 \\ 2^2 \cdot 5 \end{array}$$

$$m+n=25 \quad \begin{array}{l} 2^2 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 25 \end{array}$$

$$\frac{mz}{2Y} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad \begin{array}{l} 2^2 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 25 \end{array}$$

$$\frac{mz}{2Y} \cdot \frac{2}{3} = 1 \quad \begin{array}{l} 2^2 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 25 \\ 2^2 \cdot 25 \end{array}$$

$$\frac{mz}{2Y} - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{mz}{8} = \frac{3}{2}, mz = 12$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ABX: \frac{AB}{AB} = \frac{BX}{AX} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = \frac{12}{AX}$$

$$AX = 15$$

$$\Rightarrow 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cos \alpha = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12$$

$$\cos \alpha = \frac{24 \cdot 12 + 12 \cdot 6 - 89^2}{24 \cdot 12}$$

$$\Delta KAC: 9a^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{15^2 + 18^2 - 9a^2}{2 \cdot 15 \cdot 18}$$

$$\sqrt{17(24-4x-10)(24+6-4x-x-1)} = 25$$