



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

{a<sub>n</sub>} - арифм. прогрессия

d - разность двух соседних членов прогрессии

Тогда по определению прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

первый член прогрессии

тогда

$$a_3 = a_1 + 2d \leq 3x+3$$

$$a_5 = a_1 + 4d \leq (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d \leq 3x^2$$

$$6d \leq 3x^2 - 3x - 3$$

$$2d \leq x^2 - x - 1$$

$$a_1 \leq 3x+3 - 2d \leq 3x+3 - x^2 + x + 1 - x^2 + 4x + 4$$

$$-x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 2x - 2 \leq x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \leq 0 (*)$$

$$\begin{array}{r} 1 \mid 4 & | 3 & | -2 & | -2 \\ -1 \mid 1 & | 3 & | 0 & | 0 \\ \hline 1 & | 3 & | 0 & | 0 \end{array} \Rightarrow x = -1 \text{ - корень} \Rightarrow (*)(x+1)(x^3+3x^2-2) \leq 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 \leq 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \mid 3 & | 0 & | 2 \\ 1 \mid 2 & | -2 & | 0 \\ \hline 1 & | 2 & | 0 & | 0 \end{array} \Rightarrow x = -1 \text{ - корень}$$

$$(*) \leq (x+1)^2 (x^2 + 2x - 2) \leq 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Если  $x = -1$ :

- арифм. прогрессия

$$a_1 = 1$$

$$d = 0,8$$

$$a_5 = 1$$

$$a_9 = ?$$

$$\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{3} \\ d = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = -1,6\sqrt{3} \end{array}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-1 - \sqrt{3}, -1, -1 + \sqrt{3}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чёрновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

$$4y + 8x \leq 6$$

Изобразим графиком:

Лин. Члн.  $4y + 8x = 6$

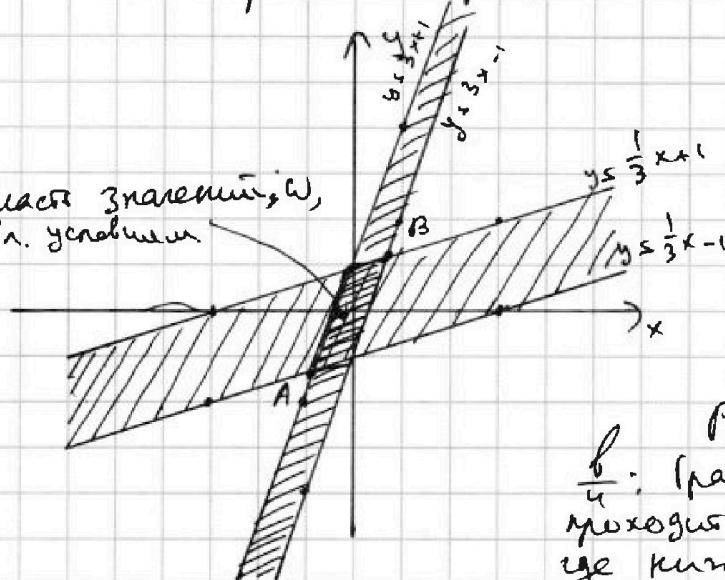
$$y \leq \frac{6}{8} - 2x \quad (*)$$

$\frac{6}{8}$  — член с  $y$

пересечение с осью  $Oy$ .

составляем  $y = \frac{6}{8} - 2x$ , где  
член с  $x$  —  $-2$ , где  
должно значение

$$4y + 8x = 6.$$



Рассм. область значений  $\frac{6}{8}$ : график  $y \leq \frac{6}{8} - 2x$  ( $*$ )  
проходит через область  $W$ ,  
где касание точка  $A$ ,

точка  $B \Rightarrow$  максимальное

значение  $\frac{6}{8}$  будет, если ( $*$ ) проходит через  
B, т.е. при координатах  $x_B, y_B$ . Найдем  $x_B, y_B$  — пересеч.

$$y \leq \frac{1}{3}x + 1 \text{ и } y \geq 3x - 1;$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - 1 \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ \frac{8}{3}x \leq 2 \quad x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

$4y + 8x = 6 \Rightarrow P = 5 + G = 11$  — это и есть максим.  
значение выражения.

Ответ: кандидат значение  
выражения  $4y + 8x + b$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NB

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n + 5(m+n)^2 - 9(m+n) \leq \underline{5(m+n)(m+n-9)}$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn + mn \leq \underline{(m+n-3)}.$$

1) Нужна  $A \leq 13p^2$ :  $(m+n)(m+n-9) \leq 13p^2$ ,  $p$ -простое

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9 \leq p^2 \end{cases} \quad \text{a) Решим (1):}$$

$$\begin{cases} m+n \leq p^2 \\ m+n-9 \leq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \leq p^2 \Rightarrow p=2-\text{простое} \\ \text{нарн } m+n: \text{речи} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn=13p \\ m+n-9 \leq p \end{cases} \quad \begin{cases} (12;1) & (5;7) \\ (11;2) & (3;8) \\ (10;3) & (4;9) \\ (9;4) & (3;10) \\ (8;5) & (2;11) \\ (7;6) & (1;12) \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} m+n \leq p^2 \\ m+n-9 \leq 13p \\ mn=22 \end{cases} \quad \text{кейс}$$

$$\text{б) } \begin{cases} mn=13p \\ m+n-9 \leq p^2 \\ mn=22 \end{cases} \quad \text{кейс}$$

$$\begin{cases} mn=13p \\ m+n-9 \leq 13p \\ mn=22 \end{cases} \quad \begin{matrix} 12m+12n=117 \\ :12 \quad :12 \quad /12 \\ \underline{\underline{m,n \in \mathbb{N}}} \end{matrix}$$

$$2) \begin{cases} m+n \leq p \\ m+n-9 \leq 13p \end{cases}$$

$$m+n-9 \leq 13n+13m \Rightarrow 12m+12n \leq -9$$

г) Решим  $B \leq$

Если  $A \leq 13p^2$ , то  $B \leq 75q^2$ ,  $p, q$ -простые.

$$B \leq mn(m+n-3) \leq 75q^2$$

Проделаем нари  $m+n$  (т.к.  $B \leq mn(m+n-3)$ , то будем пользоваться нари  $m+n$  для  $B$  в парах  $(12;1)$  и  $(1;12)$  не ищем)

$$(12;1) \Rightarrow B \leq 12 \cdot 10 \leq 120 \leq 75q^2 \quad \text{разрешен.}$$

$\frac{q}{p} \rightarrow m, n \in \mathbb{N}$

$$(11;2) \Rightarrow B \leq 22 \cdot 10 \leq 220 \leq 75q^2$$

$\frac{q}{p} \rightarrow m, n \in \mathbb{N}$

$$(10;3) \Rightarrow B \leq 30 \cdot 10 \leq 300 \leq 75q^2 \quad \begin{matrix} \text{пара } (10;3) \text{ и } (2;10) \\ \text{засл. уч.} \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(8;4) \Rightarrow B = 36 \cdot 10 = 360 \Rightarrow 75q^2 \Rightarrow q \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}.$$

$$(8;5) \Rightarrow B = 40 \cdot 10 = 400 \Rightarrow 75q^2 \Rightarrow q \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}.$$

$$(7;6) \Rightarrow B = 42 \cdot 10 = 420 \Rightarrow 75q^2 \Rightarrow q \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}.$$

2)  $A = 75q^2$ , тогда  $B = 13p^2$   $p, q$  - простые,  $m, n$  -

$$mn(m+n-3) = 13p^2 \quad (*)$$

$$(m+n)(mn-9)$$

a) Каноничные пары  $m, n$ ,  $g \in \mathbb{N}$  | #1:

$$\begin{cases} mn = 13 \\ m+n-9 = p^2 \quad 1 \\ mn = p^2 \\ m+n-9 = 13 \quad 2 \\ mn = 13p \\ m+n-9 > 0 \quad 3 \\ mn = p \\ m+n-9 = 13p \quad 4 \end{cases}$$

б) Рассмотрим  $\boxed{1}$ :  $m$  подходит пары  $(13;1), (1;13)$ , т.к.  $13$  - простое

$$m+n = 14$$

$$14 - g > p^2 \\ 5 > p^2 \Rightarrow p \in \mathbb{Q}; m, n \in \mathbb{N}$$

б) Рассмотрим  $\boxed{2}$ :  $mn = p^2$  либо  $m = n = p$

$$m+n = 22$$

$$\begin{cases} mn = p^2 \\ m = 1, n = 13p \text{ аналогично} \\ p^2 + 1 = 22 \\ mn = n^2 \\ 2p = 22 \\ p = 11 \\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn = p^2 \\ m = 1, n = 13p \text{ аналогично} \\ p^2 + 1 = 22 \\ mn = n^2 \\ 2p = 22 \\ p = 11 \\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2) Рассмотрим  $\boxed{3}$ :

$$\begin{cases} mn = 13p \\ m+n = p+q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 13p \\ n = 1, h = 13p \text{ аналогично} \\ 13p + 1 = p + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 13 \\ n = p, h = 13 \text{ аналогично} \\ p + 1 = p + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{N} \\ p + \frac{2}{3} > p + q \\ 4 > 0 \Rightarrow m, n, p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

г) Рассмотрим  $\boxed{4}$ :

$$\begin{cases} mn = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases}$$

$m = p$  т.к.  $p$  - простое,  $m = 1, n = p$  - аналогично

2)  $A = 75q^2 \leq (m+n)(mn-9)$  Максимум  $m=11, n=11$

$$75q^2 \leq 22 \cdot 13 = 286 \Rightarrow q \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}$$

Будем рассмотреть все возможные случаи, используя тот факт, что  $250$  простое, а если изменение местами  $m$  и  $n$ , то ничего не будет изменяться.

Ответ:  $(10;3), (3;10)$ .



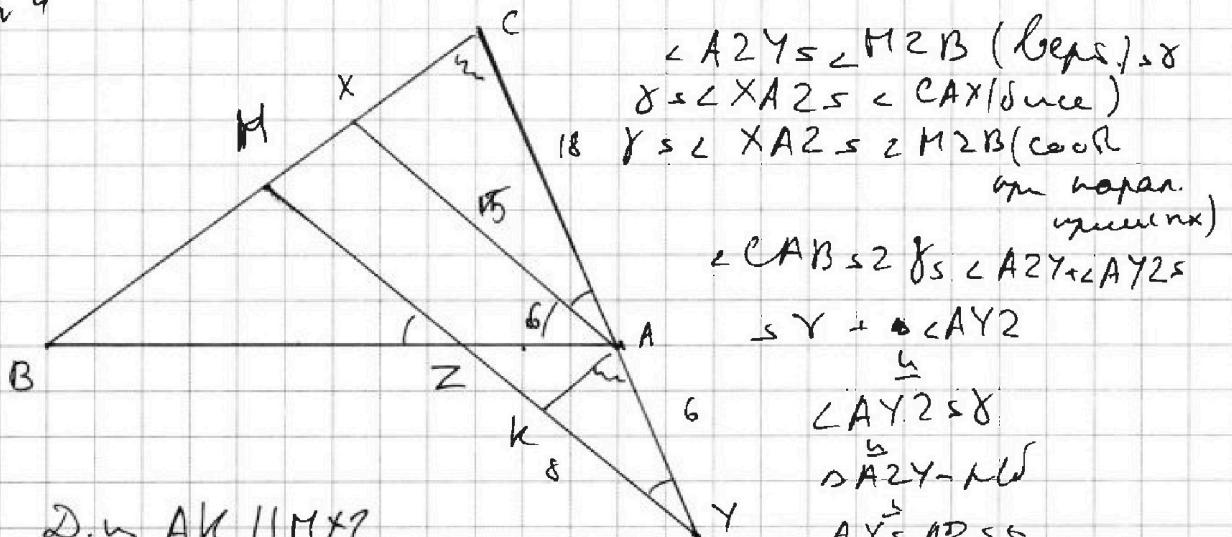
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



Д.н.  $AK \parallel MX$

$MK \parallel AX$

$\Rightarrow MKX - \text{паралл}$

$AK \parallel MX, MK \parallel AX$

$\angle KAY = \angle MCY$  (состр.),  $\angle B \parallel 2 \angle KAC$  (состр.).

$\Delta AKY \sim \Delta CAK$  (по 2 угла)  $\Rightarrow \frac{AK}{AY} = \frac{XA}{XY} \Rightarrow KY = \frac{X}{3}$ .

$\Delta KNA \sim \Delta BAC$  (по 2 угла)  $\Rightarrow \frac{AK}{AY} = \frac{XC}{KA} \Rightarrow KA = \frac{1}{3} XC \parallel MX$ .

Несколько  $X$  (5 асс)  $KY = \frac{1}{3} a$

$M$ -сер.  $BC \Rightarrow BM = MC = \frac{1}{2} a$   $\Rightarrow \frac{BM}{KA} = \frac{BZ}{ZA} = \frac{M2}{2A} = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$

$\Delta KNA \sim \Delta BAC$  (по 2 угла)  $\Rightarrow \frac{KA}{YA} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a = \frac{1}{6} a$

$BZ = 2A \cdot 7 = 24$

Но для этого решения требуется:  $BA = 30$ ,  $M2 = 42k$

~~$AZ = 25$~~   $\rightarrow AB \cdot AC = BX \cdot XC$

~~$AZ$~~

$M2 + 2KA \Rightarrow 2k = \frac{1}{5} x$

$M2 = 42k \Rightarrow 2k = \frac{1}{5} x \Rightarrow x = 15 \Rightarrow AX$

$2KA + KY = \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} x \Rightarrow \frac{8}{15} x = 8, x = 15 \Rightarrow AX$

Но определение длинны диагонали

$AX^2 = AB^2 + AB \cdot AC - BX \cdot XC$

$$225 = 5a^2 - \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)a \cdot a$$

$$\frac{5}{3}a^2 = 315 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3 \cdot 315}{5}} = \sqrt{189} \Rightarrow BC = MB + MC = \frac{8}{3}a = \boxed{8\sqrt{21}}$$

Ответ:  $BC = 8\sqrt{21}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 \leq 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} \leq y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \\ \sqrt{x+1} \sim 2\sqrt{6+5x} \quad \sqrt{x+1} \sim \sqrt{6-y} \sim \sqrt{6-y} + 5 \geq 0 \\ x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0 \\ (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x-y)(x+y) + \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0 \\ (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x-y)(x+y) + \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0 \\ ((x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + (x-\sqrt{y}) \leq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} ((x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 1) \geq 0 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

единственное решение:

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow (1):$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 \leq 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x = y \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \leq 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad (2) \\ x = y \\ x+1 \geq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

1) Реш  $\square$ :

запись  $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{6-x} \Rightarrow a^2 + b^2 = 7$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \leq 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+1} - 5 \quad a-b \leq 2ab$$

$$7 - 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+1} \leq 4(6-x)(x+1) - 20\sqrt{6-x}\sqrt{x+1} + 25$$

запись  $t = \sqrt{6-x}\sqrt{x+1}$

$$4t^2 - 18t + 18 \leq 0$$

$t = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$  но  $t \geq 0$ , т.е.  $t \geq \frac{5-\sqrt{13}}{2}$

запись:

$$a) \sqrt{6-x}\sqrt{x+1} \leq 3 \quad t^2 \leq 9$$

$$b) 8x \leq 6+5x-y^2 \leq 9$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 6 \\ x^2 - 5x + 3 \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ -1 \leq x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \leq \frac{5+\sqrt{13}}{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \sqrt{6+5x-x^2} \leq 1,5 \quad |^2$$

$$6+5x-x^2 \leq 2,25$$

$$x^2 - 5x - 3,75 \leq 0$$

$$D \leq 25 + 15 = 40 > 0$$

$$\begin{cases} x_1,2 \leq \frac{5 \pm \sqrt{40}}{2}, \\ -5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \leq 2,5 \pm \sqrt{10}$$

2) Вершины линий:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y \leq \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ x \geq \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ y \geq \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x \leq 2,5 \pm \sqrt{10} \\ y \leq 2,5 \pm \sqrt{10} \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ y \leq \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ x \geq \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ y \geq \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x \leq 2,5 + \sqrt{10} \\ y \leq 2,5 + \sqrt{10} \end{array} \right.$$

Решение:  $(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2})$ ,  $(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2})$ ,  $(2,5 + \sqrt{10}; 2,5 + \sqrt{10})$ ,  $(2,5 - \sqrt{10}; 2,5 - \sqrt{10})$ .



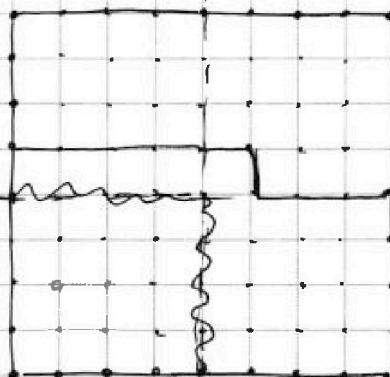
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



ans 25.24.

Рассмотрим вначале  
один из вариантов:  
Если снять коридоры на  
каждом шаге - то для  
узлов и покраски, то  
при повторениях будет еще 3  
такие же коридоры раскраски.  
Найдем, сколько таких соседей  
имеет квадрат в нем для узлов:  
было бы он состоять из 25 узлов,

то есть 24. Так как в квадрате  
и других в фигуре, сделанных смежных  
шагов - она состоит из 25 узлов, тогда  
получится коридоров 24, то есть 25.40.  
Так при других вариантах раскраски  
это коридоров будет получено те же  
самые коридоры, но при трех коридорах  
абсолютно одинаковых узлов, находящих-  
ся на всех смежных: чтобы убрать  
три коридоры, т.е. узлы, находящиеся  
на всех смежных ~~всех~~ шагах могут  
быть получены и соседями а не 2,  
или все остальные 24 узла в коридоры,  
значит нужно вычесть такие коридоры  
из общего количества. Тогда две узла  
на квадрате - 9, число же узлов на фигуре,  
сделанной смежными коридорами - 8  $\Rightarrow$  8.9  
то есть, получим 72, то есть 1528 коридоров  
то есть № задачи 1528 коридоров.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

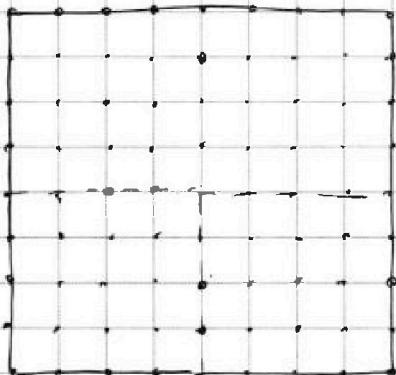
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$25 \cdot 24 + 25 \cdot 40 * - 9 \cdot 8$$

$$9 \cdot 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

The page features a large grid of squares for working out the task. The grid consists of approximately 30 columns and 20 rows of small squares, providing ample space for calculations or drawings.

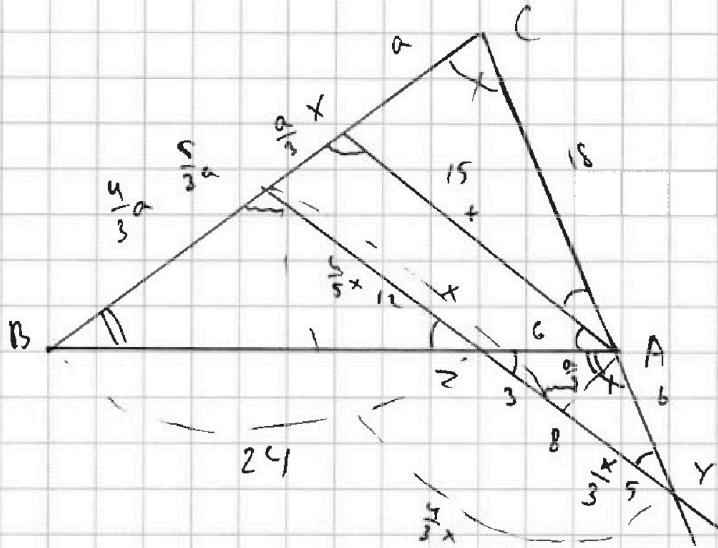
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2}{3} \alpha x = \frac{4}{5} a$$

$$y = \frac{5}{7} x$$

$$\frac{1}{5} x + \frac{x}{3} = 8$$

$$\frac{8}{15} x = 8$$

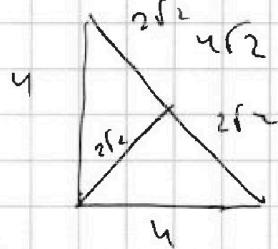
$$x = 15$$

$$15^2 = 30 \cdot 18 - \frac{5}{3} a \cdot a$$

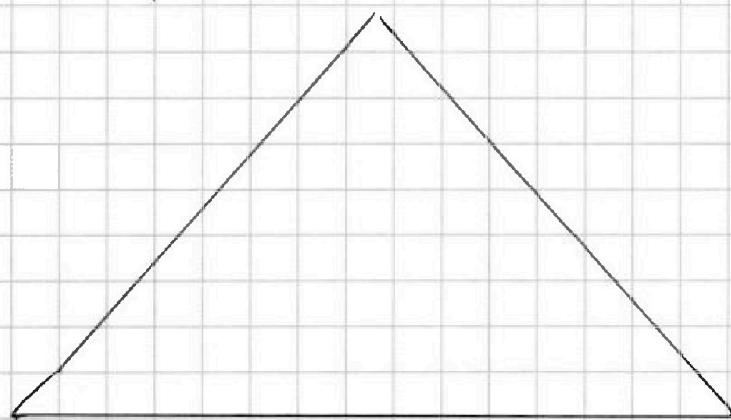
$$225 = 540 - \frac{5}{3} a^2$$

$$315 = \frac{5}{3} a^2$$

$$189 = a^2$$



$$8 = 16 - 8$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 25 \leq 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+1} - 5 \quad |^2$$

$$x+1+6-x-2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$7-2\sqrt{(6-x)}\sqrt{x+1} \leq 4 \cdot (6-x)(x+1) + 25 - 20\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$4(6-x)(x+1) - 18\sqrt{(6-x)(x+1)} + 18 \leq 0$$

$$4t^2 - 18t + 18 \leq 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 \leq 0$$

$$4s^2 - 8t + 8 \geq 0$$

$$t_1, t_2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - 5x + 3 \leq 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$2,5 \approx \sqrt{10} \Rightarrow 1$$

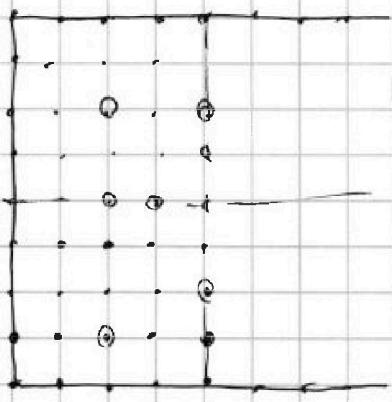
$$3,5 \Rightarrow \sqrt{10} \approx 11$$

$$14,5 \Rightarrow 10$$

$$4,5 \quad 2,5 + \sqrt{10} < 6$$

$$3,25 + 10 < 3,5$$

$$5 + \sqrt{13} \quad 12$$



16. Десерт

25.24 ·  $\text{пирожок } \frac{1}{4}$

$$32 \times 21 + 21 \times 7 \leq 81.$$

$$81 \cdot 80$$

$$16 \cdot 45 + 16 \cdot 16$$

$$25 \cdot 24 = 25 \cdot 20 + 16$$

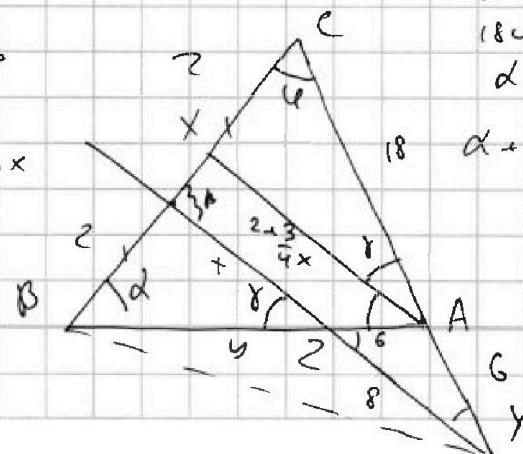
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$180 - 135 + \gamma$$

$$\alpha + \gamma = 180 - 28$$

$$2 \times \frac{3}{4}x \rightarrow \frac{3}{2}x$$

$$2y + \frac{3}{4}xy \leq xy + 6x$$



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$180 - 135 + \gamma$$

$$\alpha + \gamma = 180 - 28$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\frac{24}{18} = \frac{8+x}{5}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \cdot 6$$

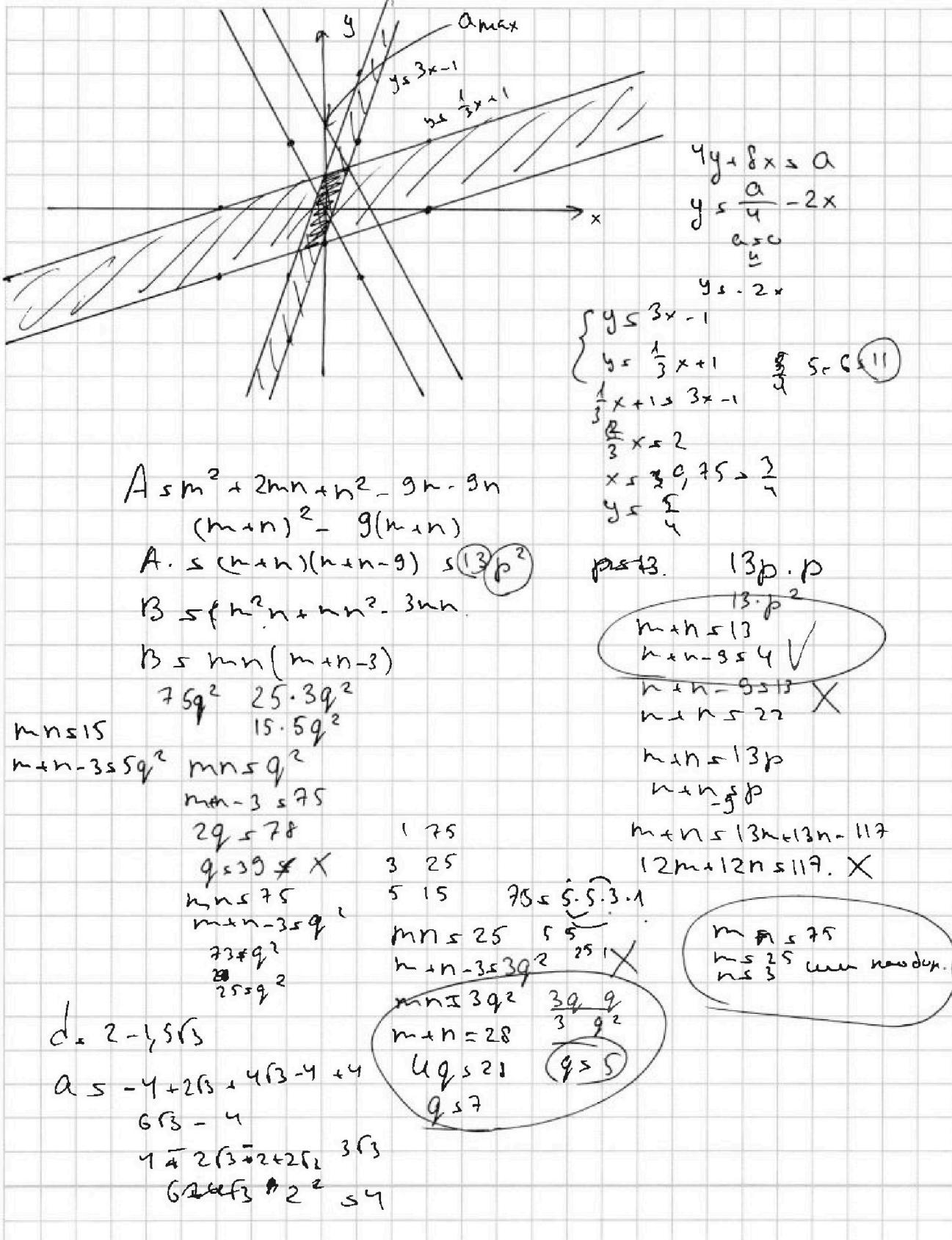


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = a$$

$$a_3 \leq a + 2d \leq 3x + 3$$

$$a_5 \leq (x^2 + 2x)^2 \leq a + 4d$$

$$a_7 \leq 3x^2 \leq a + 8d$$

$$6d \leq 3x^2 - 3x - 3$$

$$2d \leq x^2 - x - 1$$

3

$$x^6 - 2x^4 + 4x^2 + 3x^3 \leq a + 2x^3 - 2x - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \leq a$$

$$3x^2 \leq x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 2x + 2 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$3x^2 \leq x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2$$

$$x^4 + x^3 + (x^2 - 2x - 2) \leq 0$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} -2 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 8 \end{array}$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$1 & 1 & 5 & 8 & 6$$

$$\begin{array}{r|rr} -1 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$16 - 32 + 12 + 4 - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$(-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 2(-2) - 2$$

$$16 - 32 + 12 + 4$$

$$3x^2 \leq x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

$$1 & 4 & 3 & -2 & -2$$

$$-1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0$$

$$(x+1)(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2)$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2)$$

$$0 \leq 4 + 8 \leq 12$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{array} \right.$$

$$x - 3y \leq 3$$

$$\begin{array}{r|rr} x & 3 & -3 \\ \hline y & 0 & -2 \end{array}$$

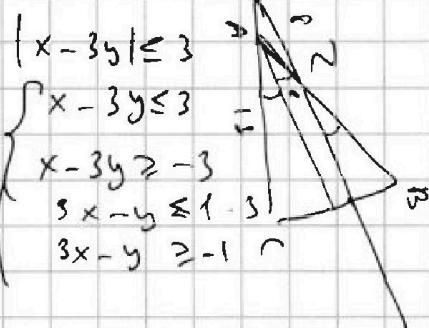
$$3y \geq x - 3$$

$$y \geq \frac{1}{3}x - 1$$

$$y \leq \frac{1}{3}x + 1$$

$$1 & 3 & 0 & -2$$

$$-1 & 1 & 2 & -2 & 0$$



$$9x - 3y \leq 3$$

$$x - 3y \leq 3$$

$$3x - y \leq 1$$

$$y \geq 3x - 1$$

$$\begin{array}{r|rr} x & 1 & -1 \\ \hline 2 & -4 \end{array}$$

$$y \leq 3x + 1$$