



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.

$$(x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

Если данная прогрессия — это  $a_1, a_2, \dots$ , то

$$a_9 - a_5 = a_9 - a_7 + a_7 - a_5 = (a_5 - a_3) \cdot 2 \Rightarrow a_9 + 2a_3 = 3a_5$$

$$3x^2 + 6x + 6 = 3x^4 + 12x^3 + 12x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-\sqrt{3}+1)(x+\sqrt{3}+1)=0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt{3} - 1 \\ x = -\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Ответ:  $-1; \sqrt{3}-1; -\sqrt{3}-1$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

Если  $y > 3x + 1$ , то  $y - 3x > 1 \Rightarrow 3x - y < 0 \Rightarrow \cancel{3x - y < 0}$

$|3x - y| = y - 3x > 3x + 1 - 3x = 1$ , что неверно по усн.  
неверно  $\Rightarrow y \leq 3x + 1$ .

Если  $y < 3x - 1$ , то  $3x - y > 0 \Rightarrow |3x - y| = 3x - y > 1$ ,

что ~~неверно~~ неверно по усн.  $\Rightarrow y > 3x - 1$ .

Если  $y > \frac{x}{3} + 1 \Rightarrow 3y > x + 3 \Rightarrow x - 3y < 0 \Rightarrow |x - 3y| = 3y - x > 3$ , что неверно по усн.  $\Rightarrow y \leq \frac{x}{3} + 1$ .

$3x - 1 \leq y \leq \frac{x}{3} + 1 \Rightarrow 3(3x - 1) \leq 3(\frac{x}{3} + 1) \Rightarrow 9x - 3 \leq x + 3$ .

$$8x \leq 6 \Rightarrow x \leq \frac{3}{4}$$

~~$8x + 4y \leq 12 \Rightarrow y \leq \frac{12 - 8x}{4} \Rightarrow y \leq \frac{x}{3} + 1 \leq \frac{5}{4}$~~

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x \leq 6 \\ 4y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 8x + 4y \leq 11.$$

При  $x = \frac{3}{4}; y = \frac{5}{4}$ :

$$|x - 3y| = 3 \leq 3$$

$$|3x - y| = 1 \leq 1$$

$$8x + 4y = 11$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9), B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3).$$

1. Пусть  $A = 13p^2$ , тогда есть 6 случаев:

$$1.1. m+n=1 \Rightarrow m+n-9=13p^2 \Rightarrow 13p^2 = 1-9 = -8, \text{н.п.}$$

$$1.2. m+n=p, m+n-9=13p \Rightarrow 12p = -9, \text{н.п.}, \text{м.к.} p-\text{простое}$$

$$1.3. m+n=p^2, m+n-9=13 \Rightarrow p^2 = 22, \text{н.п.}$$

$$1.4. m+n=13, m+n-9=p^2 \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p=2 = B = mn(m+n-3) = mn \cdot 10 \Rightarrow 15q^2 = 2mn \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q : 2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow 2mn = 60 \Rightarrow mn=30; m+n=13 \Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=10 \end{cases} \Rightarrow (m,n)=(3,10) \quad \begin{cases} n=10 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow (m,n)=(10,3).$$

$$1.5. m+n=13p, m+n-9=p \Rightarrow 12p = 9, \text{н.п.}$$

$$1.6. m+n=13p^2, m+n-9=1 \Rightarrow 13p^2 = 10 \Rightarrow p^2 = \frac{10}{13}, \text{н.п.}$$

2. Пусть  $A = 25q^2$ , тогда есть несколько случаев:

$$2.1. m+n=1, m+n-9=25q^2 = 1-9 = -8, \text{н.п.}$$

$$2.2. m+n=3, m+n-9=25q^2 = 3-9 = -6, \text{н.п.}$$

$$2.3. m+n=5, m+n-9=25q^2 = 5-9 = -4, \text{н.п.}$$

$$2.4. m+n=25, m+n-9=25q^2 = 25-9 = 16 \Rightarrow q^2 = \frac{16}{25}, \text{н.п.}$$

\* Здесь и дальше н.п. означает, что нет решений в простых натуральных числах для рациональных  $p$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2.5. m+n = 25, m+n-g = 3q^2 = 16 \Rightarrow q^2 = \frac{16}{3}, \text{н.п.}$$

$$2.6. m+n = 75, m+n-g = q^2 = 66, \text{н.п.}$$

$$2.7. m+n = q, m+n-g = 75q \Rightarrow 74q = -g, \text{н.п.}$$

$$2.8. m+n = 3q, m+n-g = 25q \Rightarrow 22q = -g, \text{н.п.}$$

$$2.9. m+n = 5q, m+n-g = 15q \Rightarrow 10q = -g, \text{н.п.}$$

$$2.10. m+n = 15q, m+n-g = 5q \Rightarrow 10q = g, \text{н.п.}$$

$$2.11. m+n = 25q, m+n-g = 3q \Rightarrow 22q = g, \text{н.п.}$$

$$2.12. m+n = 45q, m+n-g = q \Rightarrow 44q = g, \text{н.п.}$$

$$2.13. m+n = q^2, m+n-g = 45 \Rightarrow q^2 = 84, \text{н.п.}$$

$$2.14. m+n = 3q^2, m+n-g = 25 \Rightarrow 3q^2 = 34 \Rightarrow q^2 = \frac{34}{3}, \text{н.п.}$$

$$2.15. m+n = 5q^2, m+n-g = 15 \Rightarrow 5q^2 = 24 \Rightarrow q^2 = \frac{24}{5}, \text{н.п.}$$

$$2.16. m+n = 15q^2, m+n-g = 5 \Rightarrow 15q^2 = 19 \Rightarrow q^2 = \frac{19}{15}, \text{н.п.}$$

$$2.17. m+n = 25q^2, m+n-g = 3 \Rightarrow 25q^2 = 12 \Rightarrow q^2 = \frac{12}{25}, \text{н.п.}$$

$$2.18. m+n = 45q^2, m+n-g = 1 \Rightarrow 45q^2 = 10 \Rightarrow q^2 = \frac{10}{45}, \text{н.п.}$$

Ответ:  $(3; 10), (10; 3)$ .

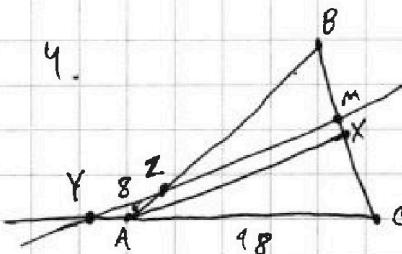


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чиривиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



4.

Пусть  $AB = x$ , тогда  $BM = \frac{BC}{2}$ ,  
 $BX = BC \cdot \frac{x}{x+18} \Rightarrow \frac{BM}{BX} = \frac{x+18}{2x}$ ,  $\triangle BAX$  ~  $\triangle BZM \Rightarrow \frac{BM}{BX} = \frac{BZ}{BA} \Rightarrow \frac{x+18}{2x} = \frac{x-6}{x}$

$$x^2 + 18x = 2x^2 - 12x \Rightarrow x^2 - 30x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=30 \end{cases} \text{, } x-6 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=30 \Rightarrow BA=30, BZ=30-6=24, \frac{BM}{BX} = \frac{BZ}{BA} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5},$$

из подобия  $\frac{ZM}{AX} = \frac{BM}{BX} = \frac{4}{5}$ .  ~~$AX^2 = AC \cdot AB = BX \cdot XC = AC \cdot AB$~~ .

~~$\rightarrow \left(1 - \frac{BC}{AC+AB}\right) = 540 \cdot \left(1 - \frac{8}{18}\right) = 540 - \frac{45}{4} BC \Leftrightarrow \frac{CX}{MC} = \frac{2MC-BX}{MC} =$~~

$$= 2 - \frac{BX}{MC} = 2 - \frac{BX}{MB} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CA}{CY} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{18}{CY} = \frac{3}{4} \Rightarrow CY=24,$$

~~откуда~~  $\frac{YM}{AX} = \frac{CM}{CX} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{YM}{AX} = \frac{1}{3}$ . Пусть

\*  $ZM = y$ , тогда  $AX = \frac{5}{4}y$ ,  $\frac{y+8}{\frac{5}{4}y} = \frac{4}{3} \Rightarrow$  ~~усложнить~~

~~$\Rightarrow y+8 = \frac{4}{3}y \Rightarrow y=12 \Rightarrow ZM=12 \Rightarrow AX =$~~

$$= \frac{5}{4} \cdot 12 = 15 \Rightarrow \sqrt{AB \cdot AC - BX \cdot XC} = 15 = 225 = 540 - \frac{45}{4} BC,$$

$$\text{м.н. } AX^2 = AC \cdot AB - BX \cdot XC = AC \cdot AB \left(1 - \frac{BC}{AC+AB}\right) = 540 \left(1 - \frac{8}{18}\right)$$

$$= 540 - \frac{45}{4} BC \Rightarrow \frac{45}{4} BC = 395 \Rightarrow BC = 28$$

Ответ: 28.

\* Из подобия  $\triangle ACX \sim \triangle YCM$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

$\sqrt{x+1}$  и  $\sqrt{y^2}$  определены  $\Rightarrow x, y \geq 0$ .  $\sqrt{x}, x^2, x^4$  возрастают monotonно на  $[0; +\infty)$   $\Rightarrow$  если  $x > y$ , то  $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} > y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$ , а если  $x < y$ , то  $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} < y^4 + 5y^2 + \sqrt{y} \Rightarrow x = y$ . Тогда  $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{x+1}\sqrt{6-x}$ .

Введём замену  $a = \sqrt{x+1}$ ,  $b = \sqrt{6-x}$ , тогда:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \\ a - b + 5 = 2ab \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 4 - 5 + b-a = 2-(a-b)$$

Введём замену  $t = (a-b)$ :

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+0,5)^2 - 2,25 = 0$$

$$t = -0,5 \pm \sqrt{2,25} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Обр. замена:

$$\begin{cases} a-b = -2 \\ a-b = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{Если } a-b = -2, \text{ то } 2ab = a-b+5 = 3 \cancel{+}, a^2+b^2 = 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 10 \Rightarrow \cancel{\left\{ \begin{array}{l} 2ab = 3 \\ a+b = \pm \sqrt{10} \end{array} \right.}, a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a+b \geq 0 \Rightarrow a+b = \sqrt{10} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2} - 1, b = \frac{\sqrt{10}}{2} + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } a-b = 1, \text{ то } 2ab = a-b+5 = 6, a^2+b^2 = 7 \Rightarrow (a+b)^2 = \\ = 13 \Rightarrow a+b = \pm \sqrt{13}, a+b \geq 0 \Rightarrow a+b = \sqrt{13} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}, b = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$\left[ \begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{10}}{2} - 1 \\ b = \frac{\sqrt{10}}{2} + 1 \\ a = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Обр. замена:

Есть 2 случая:

$$\begin{aligned} 1. \sqrt{x+1} = \frac{\sqrt{10}}{2} - 1; \sqrt{6-x} = \frac{\sqrt{10}}{2} + 1 \Rightarrow x+1 = \frac{4}{2} - \sqrt{10} \Rightarrow x = \\ = \frac{5}{2} - \sqrt{10} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \sqrt{x+1} = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}; \sqrt{6-x} = \frac{-\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow x+1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{5}{2} - \sqrt{10}; \frac{5}{2} - \sqrt{10} \right), \left( \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}; \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.

Пусть мы покрасили узлы  $a$  и  $b$ ,  $a \neq b$ , тогда если при повороте на  $90^\circ$  по час. или против час. мы получим ту же раскраску\*, которая была до поворота, то либо при таком повороте  $a$  переходит в  $b$ , либо  $b$  переходит в  $a$ , либо при таком повороте  $a$  переходит в  $b$ ,  $b$  переходит в  $a$ . В обоих случаях при повороте на  $180^\circ$   $a$  и  $b$  переходят в себя. ~~Поворот на  $180^\circ$~~  — это симметрия относительно центра квадрата, единственная точка, которая при повороте на  $180^\circ$  не переходит в себя — это центр доски, надевая его с. Тогда  $a=c$ ,  $b=c \Rightarrow a=b$ , противоречие.

Пусть мы покрасили узлы  $a$  и  $b$ ,  $a \neq b$ , тогда если при повороте на  $180^\circ$  мы получим ту же раскраску\*, которая была до поворота, то либо при таком повороте  $a$  переходит в  $b$ ,  $b$  переходит в  $a$ , что, как

\* Имеется в виду, что исходная и полученная при повороте раскраска равны, даже если некоторые не считаются разные раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, одинаковыми.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

мы уже доказали, невозможно, чтобы а переходил в b, а b переходил в a, в таком случае b - образ a при симметрии относительно центра c. Заметим, что при симметрии отображение симметрии существует. С все множеством всех узлов внутри и на границах квадрата переходит в себя. Так как образ a Значит, образ и предобраз такого узла при симметрии существует, однозначно определяется и лежит внутри <sup>или</sup> на границе квадрата.

Кол-во способов выбратьungeradechenную пару (a, b) узлов, где  $a \neq b$ , равно  $8^2 \cdot (8^2 - 1) = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 - 8 \cdot 8 = 80 \cdot 80 - 80 = 6400 - 80 = 6320$ .

Среди них кол-во таких, что a - предобраз b при симметрии относительно центра, равно  $8^2 \cdot 8^2 = 64 \cdot 64 = 4096$ . Способов выбрать a так, что  $a = c \Leftrightarrow$  образ a при симметрии относительно центра, не равен a, и b однозначно определяется по a. Эти 4096 способов выбрать пару (a, b) дают  $\frac{4096}{2} = 2048$  способа раскраски, если не перекрасить в белый ~~цвет~~ a, b, среди которых 40 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

раскрасок, в каждой паре ~~раскраска~~ —  
~~раскрасок~~ где пары узлов  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , где  $a_1 = b_2, b_1 =$   
~~раскраска~~  
 $= a_2$ . В ~~каждой~~ из 4 пар переводится в другую по-  
веротам на  $90^\circ$  по ~~стороне~~ т.е. инициалы ~~раскраски~~ (что  
известно, т.к. раскраски симметричны относительно  
центра), и такие образом они разбиваются  
на 20 пар, однотипных раскрасок ~~раскрасок~~ в каждой  
содержит ~~раскраску~~ две одинаковые раскраски, пере-  
водящие друг в друга поворотами на  $90^\circ$ . Эти 20 ~~раскрасок~~  
одинаковые, т.к. никакие две из них не переводят-  
ся друг в друга поворотами на  $90^\circ$  или на  $180^\circ$ .

~~Когда~~ Осталось  $89 \cdot 80 - 80 = 6400$  пар узлов  $(a, b)$   
разбиваются на 3200 пар пар узлов, в каждой  
паре пар узлов две пары узлов дают одинаковые  
раскраски, т.к. это пары вида  $(a, b), (b, a)$ . Эти  
3200 раскрасок разбиваются на ~~раскрасок~~, 800 че-  
мёрок раскрасок, в каждой чёмёрке четыре пары рас-  
красок, которые переводятся друг в друга поворотами на



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
Ч из Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$90^\circ$  или на  $180^\circ$ . Эти 800 раскрасок уникальны, так как переворачиваются друг в друга поворотами на  $90^\circ$  или  $180^\circ \Rightarrow$  всего уникальных раскрасок  $800 + 20 = 820$ .

Ответ: 820.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

