



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у меня есть последовательность с разностью d . Тогда разница между 6 м и 4 м членом ариф. прогр. равна $2d$, а разница между 10 м и 6 м членом $4d$. Тогда справедлива запись:

$$2((x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x)) = 9x^2 - (x^2 - 2x)$$

$$2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6) = 9x^2 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2)$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\text{Значит: } \begin{cases} x-1=0 & x=1 \\ x^2-2x-4=0 & D=2^2+4\cdot 4=4\cdot 5 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ: $x=1$; $x=1+\sqrt{5}$; $x=1-\sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

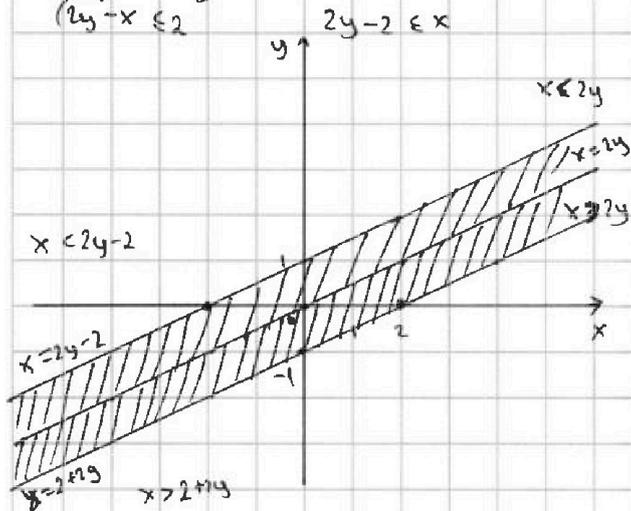
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сначала решим по очереди каждое из угр неравенств.

$$|x - 2y| \leq 2$$

$$a) \begin{cases} x \geq 2y \\ x - 2y \leq 2 \end{cases} \quad x \in 2 + 2y$$

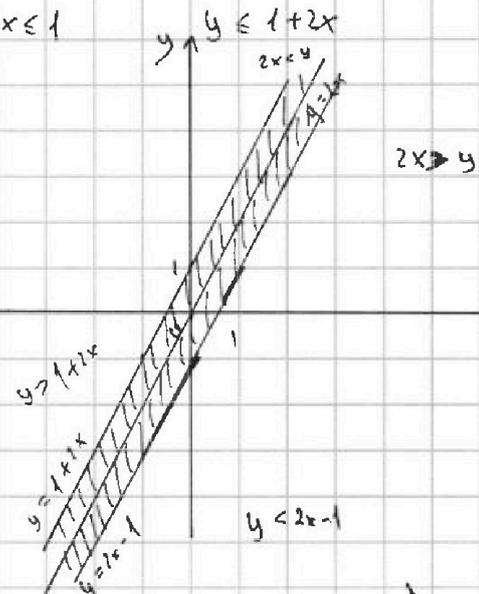
$$b) \begin{cases} x \leq 2y \\ 2y - x \leq 2 \end{cases} \quad 2y - 2 \in x$$



$$|2x - y| \leq 1$$

$$a) \begin{cases} 2x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \quad 2x - 1 \in y$$

$$b) \begin{cases} 2x < y \\ y - 2x \leq 1 \end{cases}$$



Тогда решением этой системы является

Пусть А точки пересечения $y = 2x - 1$ и $x = 2y - 2$.

Заметим что у точки А одновременно наибольшая ордината и абсцисса (у величина одновременно ч ордината ч абсцисса меньше), а значит Наибольшее значение $3y + 6x$ будет если подставить координаты А.

Найдем координаты А:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \quad y = 2(2y - 2) - 1$$

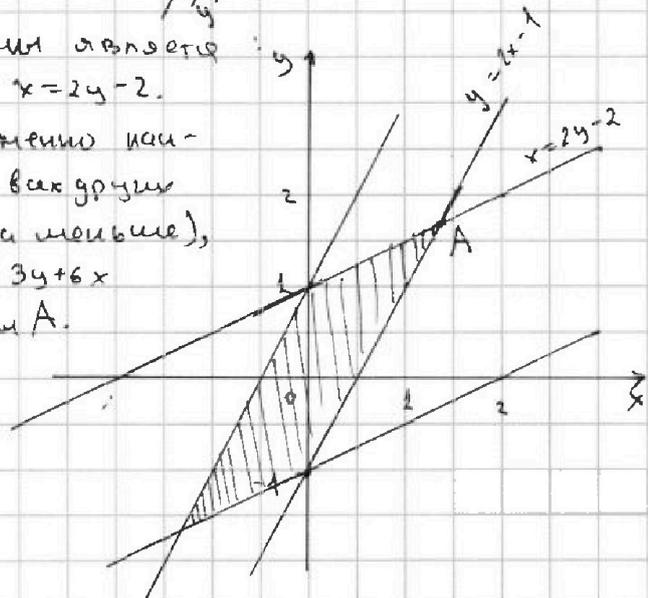
$$5 = 3y \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$x = 2(2y - 1) - 2 \Rightarrow 3y = 3x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$3y + 6x = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 7mn^2 + 9m^2n = mn(m+2n+9)$$

Ф₁) $m+2n$ и $m+2n-7$ разны по четности. Доказано:

$$a) m+2n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow m+2n-7 \equiv 0-1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$b) m+2n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow m+2n-7 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod{2}$$

Из Ф₁ следует, что $A=2 \Rightarrow$ при $A=11p^2$ или $A=75q^2$, то p или q четные, а другой равен 2.

$$f) (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 = 75 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$(m+2n; m+2n-7) = (m+2n; 7) \text{ тк } ((m+2n)(m+2n-7), 7) = 1$$

$$(m+2n; 7) = 1 \Leftrightarrow \text{если } 7, \text{ то } A:7$$

$$\text{Значит, (тк } m+2n > m+2n-7) \begin{cases} m+2n = 5^2 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$$

$$\text{но это не так, поэтому } m+2n = 19 = 25 \quad m+2n = 11 = 75$$

противоречие

$$2) (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 = 11 \cdot 2^2$$

используя $(m+2n; m+2n-7) = 1$ / аксиому с п.1)

$$\begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m+2n = 44 \\ m+2n-7 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Получа } m+2n = 11$$

и так $m, n \geq 1 \Rightarrow$

$$n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$\text{Переберем } n=1, \text{ то } m=9 \Rightarrow B = 1 \cdot 9 \cdot (9+2 \cdot 9+9) =$$

$$18 \cdot 27 = 486 \neq 11 \cdot 2^2 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$2) n=2, \text{ то } m=4-4=7 \Rightarrow B = 2 \cdot 7 \cdot (2+7) =$$

$$14 \cdot 9 = 126 \neq 11 \cdot 2^2$$

$$4mn = 15q^2 \Rightarrow q=2$$

$$mn = 15$$

$$1) n=3, m=5$$

$$3 \cdot 2 + 5 = 11$$

подходит

$$2) n=5, m=3$$

$$2 \cdot 5 + 3 = 13 \neq 11$$

не подходит

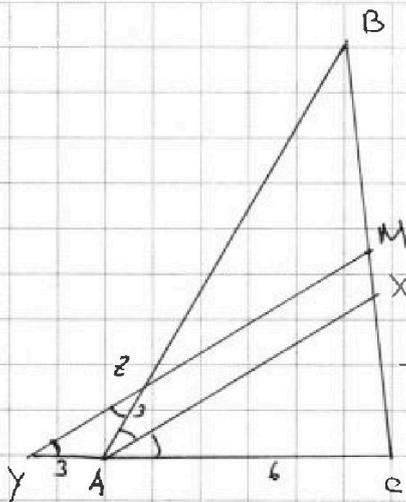
Ответ: (5; 3) 1 такая пара.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) тк $MZ \parallel AX \Rightarrow \angle YZA = \angle BAX$
 AZ - сек
 Пусть $\angle BAX = \alpha \Rightarrow \angle XAC = \alpha$
 $\angle YZA = \alpha$
 $\angle BAY = 180 - \angle BAC = 180 - 2\angle BAX = 180 - 2\alpha$
 $\angle ZYA = 180 - \angle YZA - \angle ZAY = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha) = \alpha$
 $\angle YZA = \angle ZYA$
 $AZ = AY$

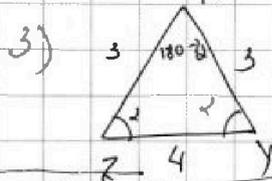
2) тк $YM \parallel AX \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} = \frac{6}{3} = 2$

Пусть $CX = 2a$, тогда $XM = \frac{CX}{2} = \frac{2a}{2} = a$

$CM = CX + XM = 3a$, тк M - середина $\Rightarrow CM = MB = 3a$

$BX = BM + MX = 3a + a = 4a$.

тк AX - выс. $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2AC = 12$.



по т. косинусов в $\triangle ZAY$:

$$\cos \angle ZAY = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{18 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

тогда $\cos \angle ZAY = -\cos \angle BAC$, тк $\angle BAC + \angle ZAY = 180^\circ$
 $\cos \angle BAC = -\frac{1}{9}$

4) по т. косинусов в $\triangle BAC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

$$\cos \angle BAC = \frac{6^2 + 12^2 - BC^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{1}{9} \Rightarrow 6^2 + 12^2 - BC^2 = 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}$$

$$= 6^2 \cdot 5 + 16 = 4(3^2 \cdot 5 + 4) = 4 \cdot (45 + 4) = (2 \cdot 7)^2 = 14^2$$

\parallel тк $BC > 6$
 $BC = 14$

Ответ: 14

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реш. 1) $x=0$ $y=0$. Подставим в первое уравнение:

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 = 2\sqrt{14}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - 1 + \sqrt{7} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7} = \sqrt{8} + 1, \text{ но } \sqrt{8} > \sqrt{7}$$

$$1 > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad (\Leftrightarrow \sqrt{7} > \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{8} + 1 > \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

↓

$(0; 0)$ является решением данной системы.

2) Поработаем со вторым уравнением:

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

тк $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ не может быть $\Rightarrow \sqrt{2}(x-y) > 0$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

$$(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-y)}\right) = 0$$

тк $x^2 + xy + y^2 > 0$ при любых x, y ($D < 0$ и через x и через y и покр. иррац. положит.)

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ исп.

$3 > 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-y)} > 0 \quad (\sqrt{2} > 0 \text{ и } \sqrt{2}(x-y) > 0)$$

$$x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-y)} > 0$$

$$x = y$$

Значит, для решения второго уравнения достаточно $x=y$ и

$x=y \geq 0$, тк $\sqrt{2}x$ (или $\sqrt{2}y$) по корням x или y .

Подставим наши знания во второе уравнение.

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$ODB: 0 \leq x \leq 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7-x - 2\sqrt{(7-x)(2+x)} + 2+x - 2 = 0$$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x}) + (\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t, \text{ тогда } t^2 + t - 2 = 0 \text{ по г. Виетта}$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -2$$

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1 \quad (\sqrt{x+2} > \sqrt{7-x} \Rightarrow x+2 > 7-x)$$

$$x+2 + 7-x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 1$$

$$? x > 5 \Rightarrow x > 2,5$$

$$8 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$4 = \sqrt{14+5x-x^2}$$

$$16 = 14+5x-x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} > 0 \quad (5 > \sqrt{17})$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2} > 2,5 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{17} > 5 \Leftrightarrow 0 > \sqrt{17} \text{ — противор.}\right)$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} < 7$$

~~возможна и в $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2$~~

$$2) \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = 2 \quad (\Rightarrow x < 2,5)$$

$$7-x+x+2 - 2\sqrt{14+5x-x^2} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$25 = 4(14+5x-x^2) \Rightarrow 25 = 40+16+10x-4x^2$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0$$

$$D = 20^2 + 4 \cdot 4 \cdot 31 = 4^2(5^2 + 31) = 4^2(25+31) = 4^2 \cdot 56 = 8^2 \cdot 14$$

$$x = \frac{20 \pm 8\sqrt{14}}{8} = 2,5 \pm \sqrt{14}, \text{ где } x < 2,5$$

$$x = 2,5 - \sqrt{14} < 0 \quad (\Leftrightarrow 2,5 < \sqrt{14} \Leftrightarrow 6,25 < 14)$$

не подходит из-за ОДЗ второго уравнения

Ответ: $x = y = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$

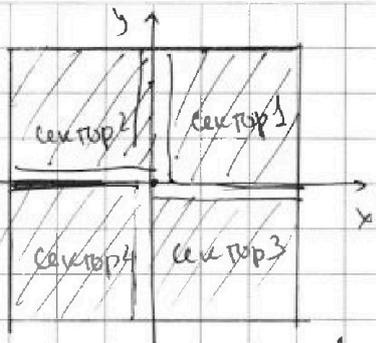
$$\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Центральная клетка переходит при повороте сама в себя.

Есть всего клетки $11^2 = 121$

Сектор это внутри и на одной из осей все узлы (у сектора 1 и 4 это ось x , а у остальных ось y). Тогда из симметрии в каждом секторе равное число узлов =

$= \frac{1}{4} \cdot (121 - 1) = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30$. Заметим, что при повороте все сектора переходят друг в друга. Тогда если перекрасим центральную клетку, тогда перекрашивать можем все клетки одного сектора (остальные получим поворотом) $\Rightarrow 30$ вариантов.

Если красим 2 узла в центре 1 сектора, то достаточно рассмотреть так же 1 сектор, те остальные получим поворотом \Rightarrow вариантов $C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29$

Если красим 2 узла в разных секторах, тогда

1) противоположные сектора. Тогда достаточно рассмотреть 1 пару например e_4 и e_1 вариантов выбрать узлы: $30 \cdot 30$

2) если соседние сектора, тогда так же все аналогично при повороте и достаточно рассмотреть 2 соседних (пары: тогда вариантов выбрать 2 узла $30 \cdot 30$ (при поворотах мы получим ту же комбинацию покрашенных узлов))

Тогда всего вариантов $30 \cdot 30 + 30 \cdot 30 + 15 \cdot 29 + 30 =$
 $= 30 \cdot 61 + 15 \cdot 29 = 15 \cdot 122 + 15 = 15 \cdot 154 = 2265$

Ответ: 2265

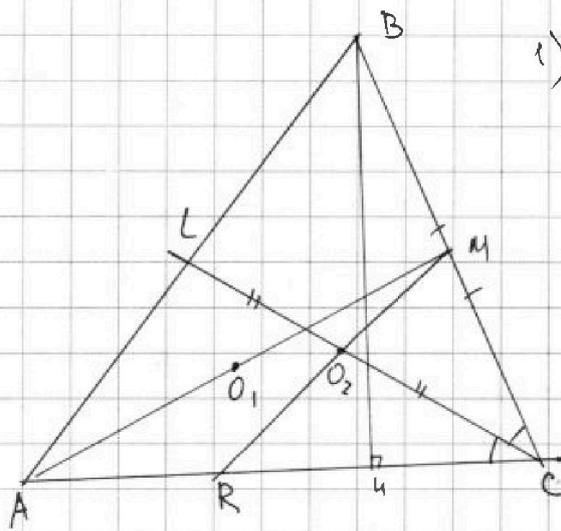


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) BH - высота
 O_1 и O_2 центры Ω и ω соответственно, т.к. Ω и ω построены на AM и CL как окружности симметрии $\Rightarrow O_1 \in AM$ и $AO_1 = O_1M$ и $O_2 \in CL$ и $CO_2 = O_2L$

2) P и Q - перес. Ω и ω
 \Downarrow
 PQ - рад. ось Ω и ω
 т.к. рад. ось перпен. касат. линиям

центров $\Rightarrow O_1, O_2 \perp PQ$.

т.к. $PQ \parallel BH$ и $QP \perp AC \Rightarrow O_1, O_2 \parallel AC$
 и $O_1, O_2 \perp PQ$

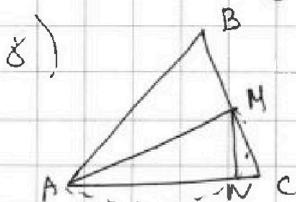
3) MO_2 - средняя линия $\triangle ABC$ (т.к. M - середина BC и O_2 - с.р. CL)
 $MO_2 \parallel AC = R$

4) $O_1, O_2 \parallel AC$ (в частности AR) $\Rightarrow O_1, O_2$ - середины линий $\triangle AMR$
 $AO_1 = O_1M$
 \Downarrow
 $MO_2 = O_2R$

5) $MO_2 = O_2R$ и $\angle MO_2R = \angle O_2CR \Rightarrow \triangle MCR$: CO_2 бисс. и медиана $\Rightarrow \triangle KMC$ - равнобедр. и CO_2 - высота
 ($CO_2 \perp RM$)

6) $CO_2 \perp RM$ и $RM \parallel AB \Rightarrow CO_2 \perp AB$
 (т.к. средняя линия) (или $CL \perp AB$)

7) CL - высота ($CL \perp AB$) и бисс. $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедр. $\Rightarrow BC = AC$



$\angle MNA = 90^\circ$, т.к. AM - диам. окр. Ω
 и $\angle ANM$ опирается на диаметр.



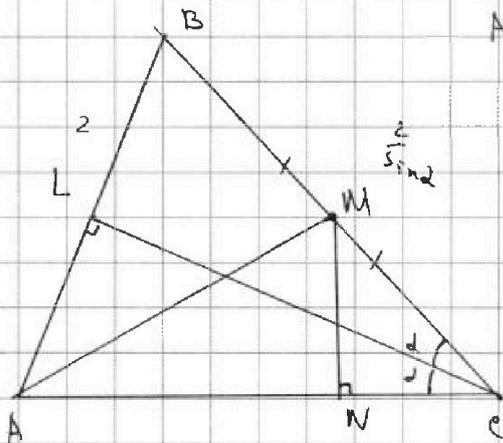
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9)



$$AB = 4 \Rightarrow AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Пусть } \angle BCL = 2 \Rightarrow \angle LCA = \delta.$$

$$\triangle BCL: BC = \frac{BL}{\sin \angle BCL} = \frac{BL}{\sin \delta} = \frac{2}{\sin \delta}$$

$$\text{Так } AC = BC \Rightarrow AC = \frac{BL}{\sin \delta}$$

$$BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2 \sin \delta} = \frac{1}{\sin \delta}$$

$$\triangle MNC: NC = \cos 2\delta \cdot MC = \frac{\cos 2\delta}{\sin \delta} = \frac{1 - 2\sin^2 \delta}{\sin \delta}$$

$$AN = AC - NC = \frac{2}{\sin \delta} - \frac{1 - 2\sin^2 \delta}{\sin \delta} = \frac{1 + 2\sin^2 \delta}{\sin \delta} = 5$$

$$\text{так } 0 < \delta < 90^\circ \Rightarrow \sin \delta \neq 0$$

$$\sin \delta = t \quad (\Rightarrow 0 < t < 1)$$

$$1 + 2t^2 = 5t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{4} > 1 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{17} > 4 \right)$$

$$t = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = \sin \delta$$

$$BC = AC = \frac{2}{\sin \delta} = \frac{2 \cdot 4}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8(5 + \sqrt{17})}{25 - 17} = 5 + \sqrt{17}$$

Ответ: $BC = AC = 5 + \sqrt{17}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

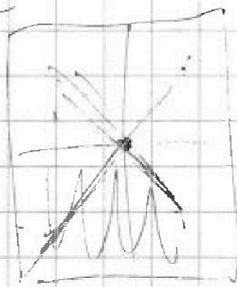
| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Умножение

30 +



30 · 30

$$\frac{30 \cdot 24}{2} = 15 \cdot 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 4} \\ 7x^2 + 7x - 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 7x - 8 \\ \underline{-7x^2 + 7x - 7} \\ x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \\ \underline{-x^3 + 3x^2 - x + 1} \\ -x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x + 3 \\ \underline{x - 1} \\ 4 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 4 \\ \underline{-x^2 + 2x - 1} \\ -3 \end{array}$$

$$-2x^2 + 6x - 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 6x - 4 \\ \underline{2x^2 - 2x + 2} \\ 8x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8x - 6 \\ \underline{-8x + 8} \\ 2 \end{array}$$

$$2x^2 + 2x \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x \\ \underline{-2x^2 + 2x - 2} \\ 4x - 2 \end{array}$$

$$4x - 2 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} 4x - 2 \\ \underline{-4x + 4} \\ 2 \end{array}$$

$$2 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{-2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 5x$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 4)$$

$$\frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} - 2\sin \alpha$$

$$2\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} = 5$$

$$\sin \alpha = t \quad 1 + 20$$

$$2t^2 - 1 = 5t$$

$$2t^2 - 5t - 1 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2 = 33$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$\frac{5 - \sqrt{33}}{4} = t$$

$$(1 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$6 + 2\sqrt{5} = 2 + 2\sqrt{5} + 4$$

$$6 + 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5} = 4$$

$$(x - x_1 + x_2) \cdot 3 = 3(3x^2 + 3x - 2) = 9x^2 + 9x - 6$$

$$(5-x)(1+x) \cdot 2x = (5-x)(1+x) \cdot 2x = (5-x)(2x+x^2) = 10x + 5x^2 - 2x^2 - x^3 = -x^3 + 3x^2 + 10x$$

$$9x^2 - x + 4x - 3 - 4x + 2x = 9x^2 - x + 4x - 3 - 4x + 2x = 9x^2 - x - 3$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

$$y = 4y - 4 - 1$$

$$5 = 3y \quad 4y = \frac{5}{3}$$

$$4x \quad 2x - 2$$

$$\alpha < 90^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

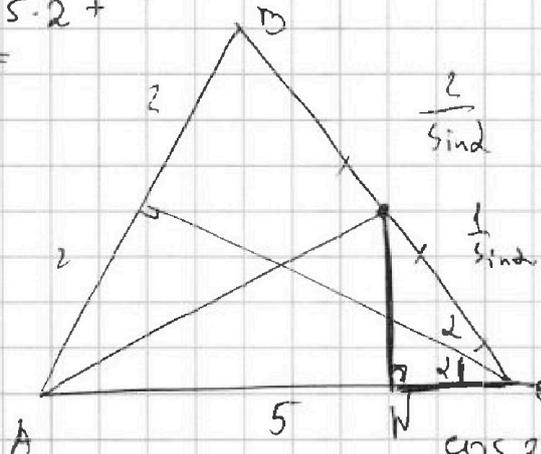
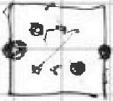
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$e^2 = 12^2 = \frac{12 \cdot 120}{2}$
 $1 \cdot 120 \cdot \frac{3}{4}$
 $120 \left(\frac{12}{2} + \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{8} 60 (12 + \frac{3}{4})$
 $= 15 (24 + \frac{3}{4}) = 15 \cdot 24.75$

$\frac{12 \cdot 120}{2}$

$AB = BC =$
 $= \frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{5 - \sqrt{17} \cdot 5 - \sqrt{17}} =$
 $= \frac{8(25 + \sqrt{17})}{8} =$
 $25 + \sqrt{17}$

$15 \cdot 24 + 15 \cdot 2 +$
 $+ 60 =$
 $= 15 \cdot 120$
 $15 \cdot 151$



$\frac{1}{4} \cdot 121 = 30.25$
 611.021

$\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$

$\frac{2}{\sin \alpha} - \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 - 1 + 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = 5$

$2\sin^2 \alpha + 1 - 5\sin \alpha = 0$
 $\sin \alpha = t$

$\frac{2\sin^2 \alpha + 1}{\sin \alpha} = 5$
 $2\sin^2 \alpha + 1 = 5\sin \alpha$

$2t^2 - 5t + 1 = 0$
 $D = 25 - 8 = 17$

$30.25 + 30 = 60.5$

$\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow t = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$
 $\sin \alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$

$\frac{120 \cdot 119}{611.021}$

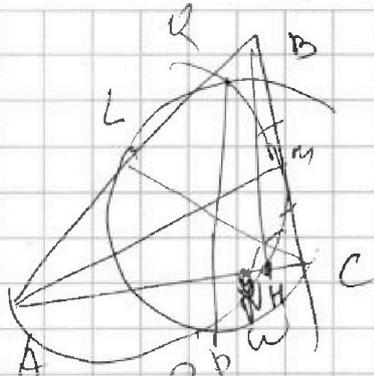


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

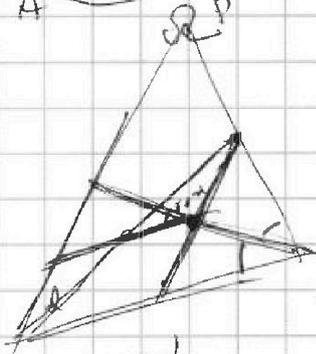


$PQ \parallel BN$

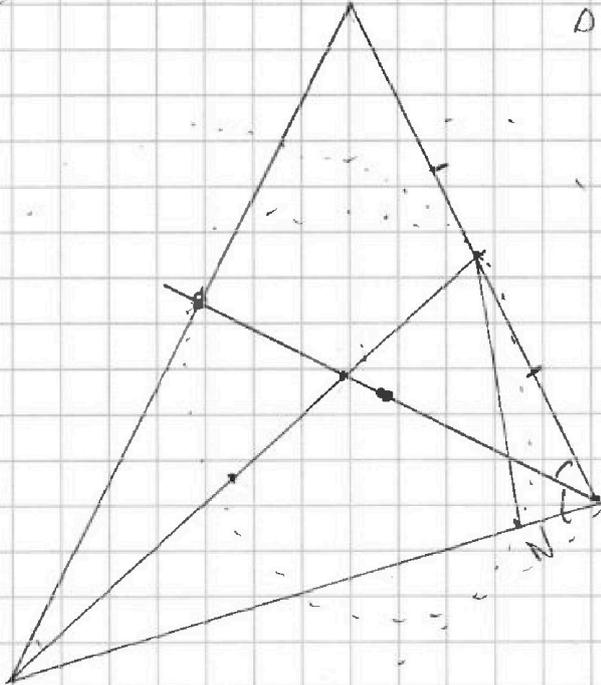
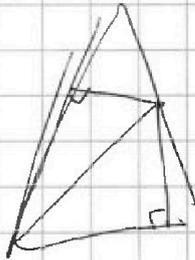
$AB = 4$

$AN = 5$

$\Rightarrow \angle C \rightarrow$
 $\overline{BC \perp \overline{AN}}$

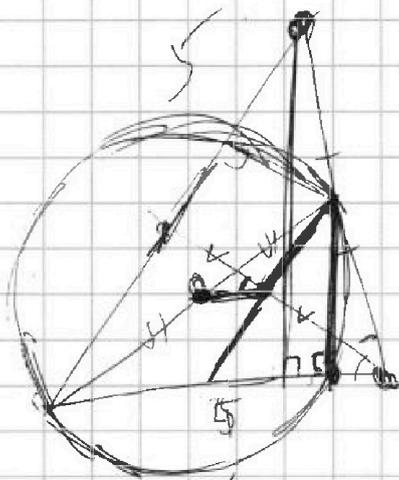


$m \angle$

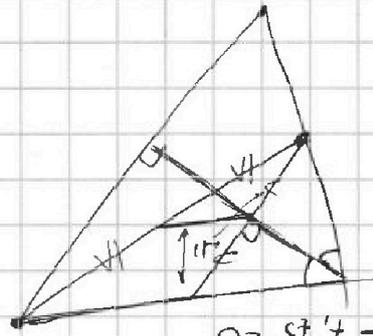


$D ABC$

$AC = BC$



2
 $4 \cdot 14$
 $8 \cdot 14$
 $4 \sqrt{5}$



TE
 $8 + 3$

$4x - 2 \cdot 2x$

$$0 = 8x - 2x - 2x$$

$$2x - x + 5 = 14 + 5x - x^2$$

$$5 = \sqrt{14 + 5x - x^2}$$

$$2 + x + 2 = 7$$

$$(7-x)(x+2) = 7x - x^2 + 14x - 2x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2} = \frac{(x-y)}{\sqrt{x+y}} = 0$$

$$(x-y) \left(x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{\sqrt{x+y}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$x=y$$

еще решение

$$\frac{5 + \sqrt{17}}{2} \quad 7$$

$$5 + \sqrt{14} \quad 14$$

$$9$$

$$x=0 \quad y=0$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 =$$

$$2\sqrt{14}$$

~~11~~

$$\sqrt{8} \cdot 7 = 7$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{7} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{8} \cdot 11 = \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{5 - \sqrt{17}}{2} \quad 5$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$D = 25 + 4 \cdot 14 = 25 + 40 + 16 = 81 = 9^2$$

$$\frac{-5 \pm 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}}$$

$$2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{9 + \sqrt{17}} - \sqrt{9 - \sqrt{17}} \right)$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 - x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} + 2 + x - 2 = 0$$

$$\left(\sqrt{7-x} - \sqrt{2+x} \right)^2$$

$$9 + \sqrt{17} + 9 - \sqrt{17} - 2\sqrt{81 - 17}$$

$$80 - 16 = 64 \quad \sqrt{7-x} - \sqrt{2+x} = 1$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t$$

$$7x + 7x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$81$$

$$8 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t = 1$$

$$4 = \sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$1$$

$$A = 2$$

$$16 = 14 + 5x - x^2$$

$$t = -2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$\sqrt{7-x} + \sqrt{x+2} = 2$$

$$18 - 2 \cdot 8 = 2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$9 - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a

$$2 \left((x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x) \right) = 9x^2 (x^2 - 2x)^2$$

$$x^2(x-2)^2 = x^2(x-2)^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 12 + 18x = 5x^2 - x^4 + 4x^3$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$16 \pm 44 \pm 2 \pm 4 \pm 3 \pm 2$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 5x^2 - x^4 + 4x^3$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$

$x = 1$

$$x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 = 0$$

$$x^3(x-1) - 3x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

$$x^2(x-1) + 2x(x-1) - 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 4 = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x-2y| \leq 2$$

$$|x-y| \leq 1$$

$$3y + 6x$$

$$x \geq 2y$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$x \leq 2 + 2y$$

$$-y \leq 1$$

$$y \geq -1$$

$$2y - x \leq 2$$

$$2y - 2 \leq x$$

$$2y - 2 = 6$$

$$y - 1 = 3$$

100

$$2x - y \geq 0 \quad 2x \geq y$$

$$2x + y \leq 1$$

$$2x - 1 \leq y$$

$$y - 2x \leq 1$$

$$y \leq 1 + 2x$$

$$3y + 6x \rightarrow \text{н.п.}$$

$$\text{н.п. } 3(y + 2x)$$

$$\begin{cases} y = 2x & \text{в} \\ y & \end{cases}$$

н.п.

y

2

y

$$2x \leq 1$$

$$y = 1 + 2x$$

$$y = 2x - 1$$

$$2x \geq y$$

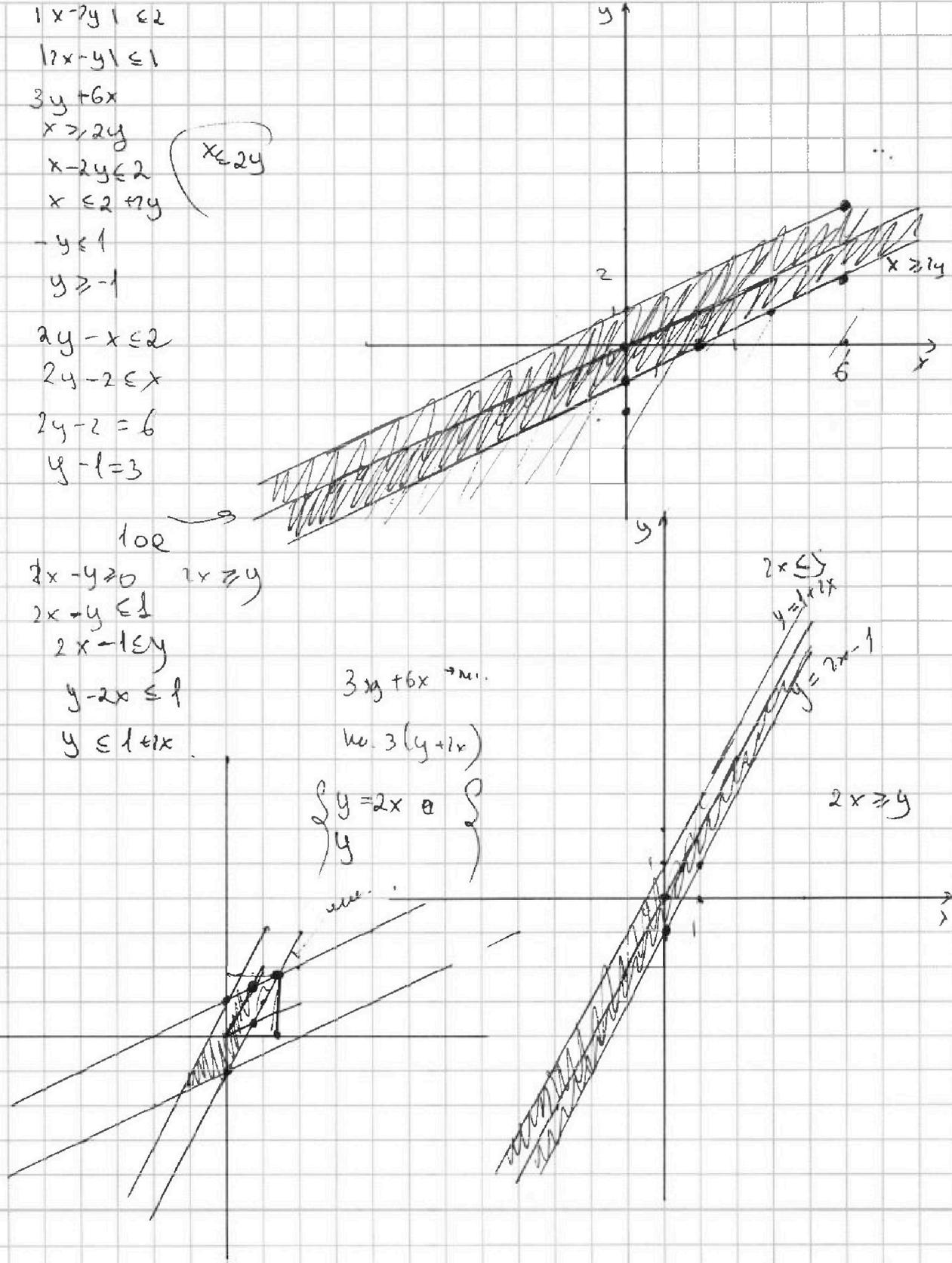
...

$$x \geq 2y$$

6

x

x



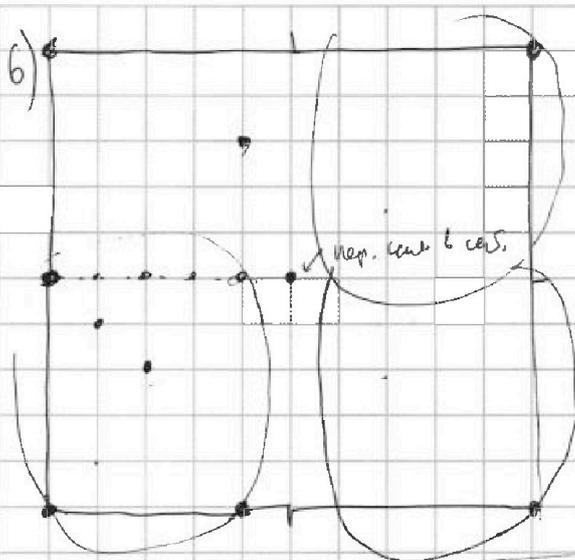


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



всего $4 \cdot 30^2$
 сев. центр $4 \cdot 30^2$
 $120/4 = 30 \Rightarrow 30 \cdot 60$
 пог. $4 \cdot 30^2$
 высота 1 сектора 30
 и сев. $30 \cdot 60$

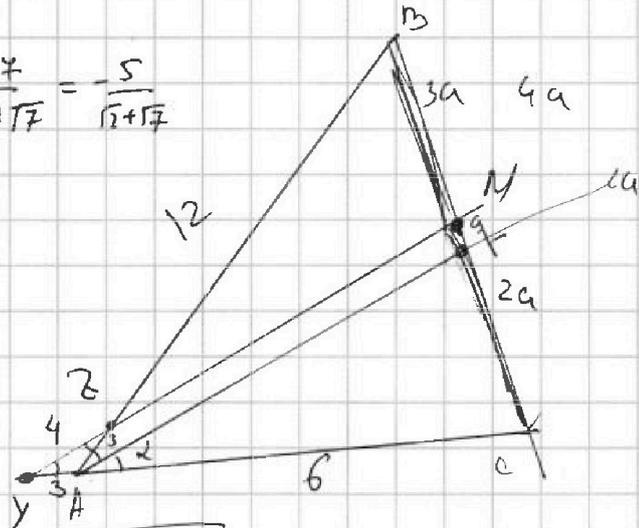
4)

$$\cos \alpha = \frac{3^2 - 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3^2} = \frac{9 - 4 - 16}{18} = \frac{-11}{18}$$

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

в $c = ?$

$$\frac{2-7}{\sqrt{2+7}} = \frac{5}{\sqrt{2+7}}$$



$$\sqrt{6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cos 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 12^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{4(9 + 36 + 8)} =$$

$$\cos 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

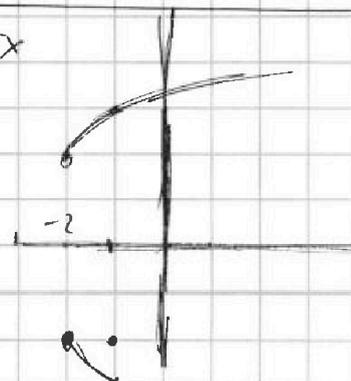
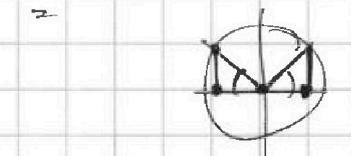
9+

$$-49 + 14xy - y^2 - 14y + 49 + 14 + 5x$$

$$5x + 10 + 4 - y^2 \quad y \leq 7 \quad x \geq -2$$

$$14 + 5x = y^2$$

14





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n) \cdot (m+2n-7)$$

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$\text{или } mn(m+2n+9) = 11p^2$$

$$75 = 5^2 \cdot 3$$

$$\text{или } m+n=3$$

$$(m+2n)(m+2n-7)$$

$$m+2n \geq 7$$

$$mn(m+2n+9)$$

$$m+2n \geq 8$$

$$(m+2n+9) \geq 17$$

$$5^2 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \\ mn(m+2n+9) = 11p^2 \end{cases}$$

$$\text{или } 2, 10, 1, 11p^2$$

$$q=2 \text{ или } 5^2 \text{ или } 2^2$$

$$(m+2n, m+2n-7) = (7, mn) = 1$$

$$25 \text{ или } 4$$

$$\text{или } 7, 10, p^2 = 7$$

$$\begin{cases} m+2n = 25 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$$

$$m+2n=7$$

$$m+2n-7 \leq m+2n$$

$$\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+2n = 77 \\ m+2n-7 = 70 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| 3 | 4 |
| 4 | |

11p^2
p^2 (p/11)
p=3

2-значная перед p=2
p=3

m+2n-вер. и m+2n-7-разверт
вер. => p=2

| | |
|----|-------|
| 20 | 25 |
| 4 | 15q^2 |

$$m+2n=11$$

$$mn=15$$

1-значная
n=1
2
3
4
5