



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у меня есть последовательность с разностью  $d$ . Тогда разница между  $6$ м и  $4$ м членом ариф. прогр. равна  $2d$ , а разница между  $10$ м и  $6$ м членом  $4d$ . Тогда справедлива запись:

$$2((x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x)) = 9x^2 - (x^2 - 2x)$$

$$2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6) = 9x^2 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2)$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\text{Значит: } \begin{cases} x-1=0 & x=1 \\ x^2-2x-4=0 & D=2^2+4\cdot 4=4\cdot 5 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ:  $x=1$ ;  $x=1+\sqrt{5}$ ;  $x=1-\sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

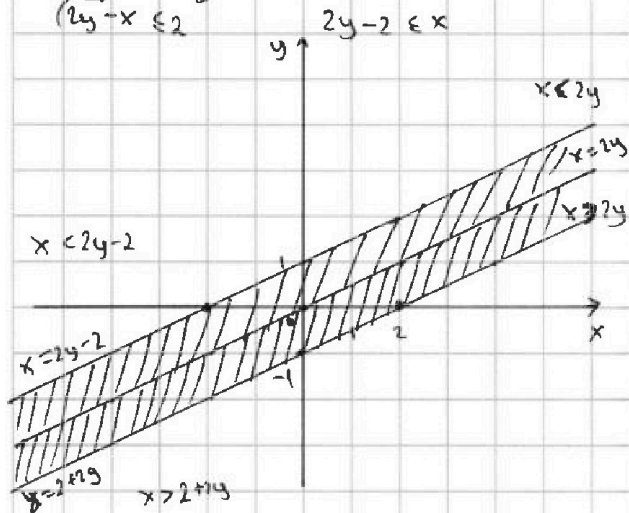
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сначала решим по очереди каждое из угр неравенств.

$$|x - 2y| \leq 2$$

$$a) \begin{cases} x \geq 2y \\ x - 2y \leq 2 \end{cases} \quad x \in 2 + 2y$$

$$b) \begin{cases} x \leq 2y \\ 2y - x \leq 2 \end{cases} \quad 2y - 2 \in x$$

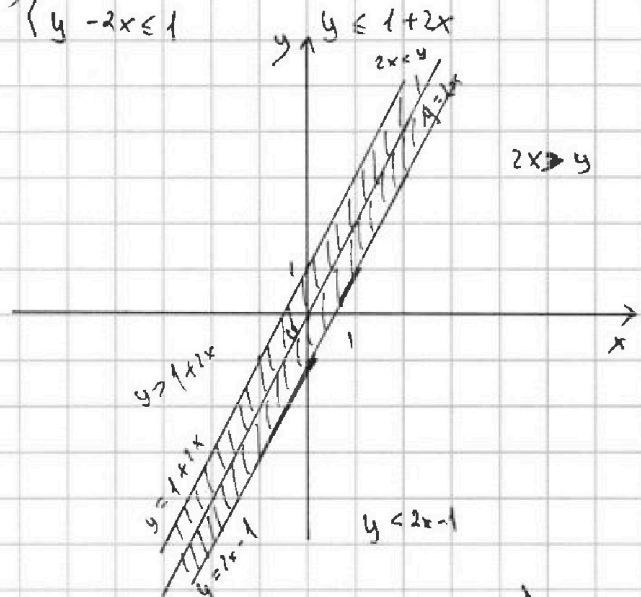


$$|2x - y| \leq 1$$

$$a) \begin{cases} 2x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \quad 2x - 1 \in y$$

$$b) \begin{cases} 2x < y \\ y - 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$y \in 1 + 2x$$



Тогда решением этой системы является

пусть А точки пересечения  $y = 2x - 1$  и  $x = 2y - 2$ .

Заметим что у точки А одновременно наибольшая ордината и абсцисса (у величина одновременно ч ордината ч абсцисса меньше), а значит Наибольшее значение  $3y + 6x$  будет если подставить координаты А.

Найдем координаты А:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \quad y = 2(2y - 2) - 1$$

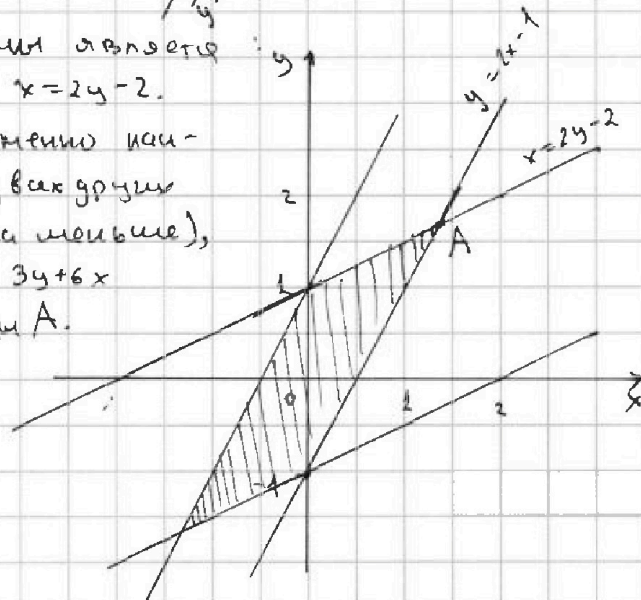
$$5 = 3y \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$x = 2(2y - 1) - 2 \Rightarrow 3y = 3x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$3y + 6x = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 7mn^2 + 9m^2n = mn(m+2n+9)$$

Ф<sub>1</sub>)  $m+2n$  и  $m+2n-7$  разны по четности. Доказано:

$$a) m+2n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow m+2n-7 \equiv 0-1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$b) m+2n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow m+2n-7 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod{2}$$

Из Ф<sub>1</sub> следует, что либо  $A=2$   $\Rightarrow$  при  $A=11p^2$  или  $A=75q^2$ , то  $p$  или  $q$  четные, а другой равен 2.

$$f) (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 = 75 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$(m+2n; m+2n-7) = (m+2n; 7) \text{ тк } ((m+2n)(m+2n-7), 7) = 1$$

$$(m+2n; 7) = 1 \Leftrightarrow \text{если } 7, \text{ то } A:7$$

Значит, (тк  $m+2n > m+2n-7$ )  $\begin{cases} m+2n = 5^2 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m+2n = 19 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} m+2n = 10 \\ m+2n-7 = 3 \end{cases}$

но это не так, поэтому что  $m+2n = 19 = 25$  противоречие

$$2) (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 = 11 \cdot 2^2$$

используя  $(m+2n; m+2n-7) = 1$  / или комбинация с п.1)

$$\begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m+2n = 44 \\ m+2n-7 = 1 \end{cases}$$

тогда  $m+2n = 11$

и так  $m, n \geq 1 \Rightarrow$

$$n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Переберем  $n=1$ , то  $m=9 \Rightarrow B = 1 \cdot 9 \cdot (9+2 \cdot 9+9) =$

$$1 \cdot 9 \cdot 27 = 243 \neq 44 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$2) n=2, \text{ то } m=4-4=7 \Rightarrow B = 2 \cdot 7 \cdot (2+7) =$$

$$2 \cdot 7 \cdot 9 = 126 \neq 44 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$4mn = 15q^2 \Rightarrow q=2$$

$$mn = 15$$

$$1) n=3, m=5$$

$$3 \cdot 2 + 5 = 11$$

возможно

$$2) n=5, m=3$$

$$2 \cdot 5 + 3 = 13 \neq 11$$

не возможно

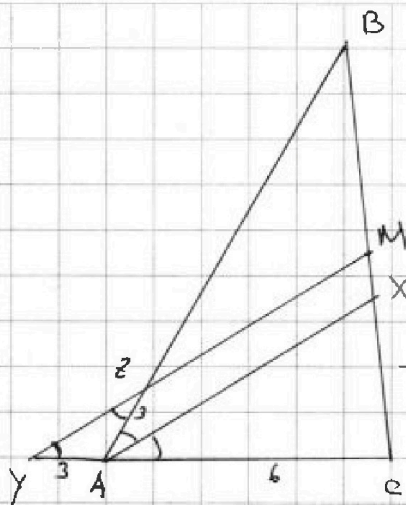
Ответ:  $(5; 3)$  1 такая пара.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Так  $YZ \parallel AX \Rightarrow \angle YZA = \angle BAX$   
 $AZ$  - сек  
 Пусть  $\angle BAX = \alpha \Rightarrow \angle XAC = \alpha$   
 $\angle YZA = \alpha$   
 $\angle BAY = 180 - \angle BAC = 180 - 2\angle BAX = 180 - 2\alpha$   
 $\angle ZYA = 180 - \angle YZA - \angle ZAY = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha) = \alpha$   
 $\angle YZA = \angle ZYA$   
 $AZ = AY$

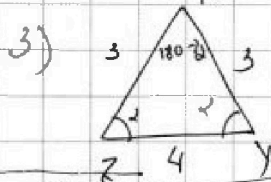
2) Так  $YM \parallel AX \Rightarrow$  по т. Фалеса  $\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} = \frac{6}{3} = 2$

Пусть  $CX = 2a$ , тогда  $XM = \frac{CX}{2} = \frac{2a}{2} = a$

$CM = CX + XM = 3a$ , так  $M$  - середина  $\Rightarrow CM = MB = 3a$

$BX = BM + MX = 3a + a = 4a$ .

Так  $AX$  - бисс.  $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2AC = 12$ .



по т. косинусов в  $\triangle AY$ :

$$\cos \angle ZAY = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{18 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

тогда  $\cos \angle ZAY = -\cos \angle BAC$ , так  $\angle BAC + \angle ZAY = 180^\circ$   
 $\cos \angle BAC = -\frac{1}{9}$

4) по т. косинусов в  $\triangle BAC$ :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

$$\cos \angle BAC = \frac{6^2 + 12^2 - BC^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{1}{9}$$

$$= \frac{6^2 \cdot 5 + 16}{4(3^2 \cdot 5 + 4)} = \frac{4 \cdot (9 \cdot 5 + 4)}{4 \cdot (9 \cdot 5 + 4)} = \frac{(2 \cdot 7)^2}{(2 \cdot 7)^2} = 14^2$$

$BC = 14$

Ответ: 14

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реш. 1)  $x=0$   $y=0$ . Подставим в первое уравнение:

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 = 2\sqrt{14}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - 1 + \sqrt{7} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7} = \sqrt{8} + 1, \text{ но } \sqrt{8} > \sqrt{7}$$

$$1 > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad (\Leftrightarrow \sqrt{7} > \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{8} + 1 > \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

↓

$(0; 0)$  является решением данной системы.

2) Поработаем со вторым уравнением:

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

тк  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  не может быть  $\Rightarrow \sqrt{2}(x-y) > 0$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

$$(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-y)}\right) = 0$$

тк  $x^2 + xy + y^2 > 0$  при любых  $x, y$  ( $D < 0$  и через  $x$  и через  $y$  и покр. иррац. положит.)

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  исл.

$3 > 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-y)} > 0 \quad (\sqrt{2} > 0 \text{ и } \sqrt{2}(x-y) > 0)$$

$$x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x-y)} > 0$$

$$x = y$$

Значит, для решения второго уравнения достаточно  $x=y$  и

$x=y \geq 0$ , тк  $\sqrt{2}x$  (или  $\sqrt{2}y$ ) по корням  $x$  или  $y$ .

Подставим наши знания во второе уравнение в первое

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$ODB: 0 \leq x \leq 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7-x - 2\sqrt{(7-x)(2+x)} + 2+x - 2 = 0$$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x}) + (\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t, \text{ тогда } t^2 + t - 2 = 0 \text{ по г. Виетта}$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -2$$

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1 \quad (\sqrt{x+2} > \sqrt{7-x} \Rightarrow x+2 > 7-x)$$

$$x+2 + 7-x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 1$$

$$? x > 5 \Rightarrow x > 2,5$$

$$8 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$4 = \sqrt{14+5x-x^2}$$

$$16 = 14 + 5x - x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} > 0 \quad (5 > \sqrt{17})$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2} > 2,5 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{17} > 5 \Leftrightarrow 0 > \sqrt{17} \text{ — противор.}\right)$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} < 7$$

~~возможна и в  $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2$~~

$$2) \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = 2 \quad (\Rightarrow x < 2,5)$$

$$7-x + x+2 - 2\sqrt{14+5x-x^2} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$25 = 4(14+5x-x^2) \Rightarrow 25 = 40 + 16 + 10x - 4x^2$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0$$

$$D = 20^2 + 4 \cdot 4 \cdot 31 = 4^2(5^2 + 31) = 4^2(25 + 31) = 4^2 \cdot 56 = 8^2 \cdot 14$$

$$x = \frac{20 \pm 8\sqrt{14}}{8} = 2,5 \pm \sqrt{14}, \text{ где } x < 2,5$$

$$x = 2,5 - \sqrt{14} < 0 \quad (\Leftrightarrow 2,5 < \sqrt{14} \Leftrightarrow 6,25 < 14)$$

не подходит из-за ОДЗ второго уравнения

Ответ:  $x = y = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$

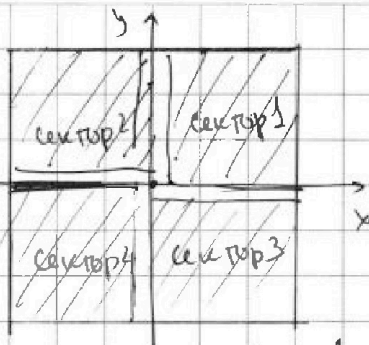
$$\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Центральная клетка переходит при повороте сама в себя.

Есть всего клетки  $11^2 = 121$

Сектор это внутри и на оси от осей все углы (у сектора 1 и 4 это ось x, а у остальных ось y). Тогда из симметрии в каждом секторе равное число узлов =

$$= \frac{1}{4} \cdot (121 - 1) = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30.$$

Заметим, что при повороте все сектора переходят друг в друга. Тогда если перекрасим центральную клетку, тогда перекрашивать можем все клетки одного сектора (остальные получим поворотом)  $\Rightarrow$  30 вариантов.

Если красим 2 узла в центре 1 сектора, то достаточно рассмотреть так же 1 сектор, а остальные получим поворотом  $\Rightarrow$  вариантов  $C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29$

Если красим 2 узла в разных секторах, тогда

1) противоположные сектора. Тогда достаточно рассмотреть 1 пару например с.4 и с.1 вариантов выбрать узлы:  $30 \cdot 30$

2) если соседние сектора, тогда так же в аналогичном при повороте и достаточно рассмотреть 2 соседних (так: тогда вариантов выбрать 2 узла  $30 \cdot 30$  (при поворотах мы получим ту же комбинацию покрашенных узлов))

$$\text{Тогда всего вариантов } 30 \cdot 30 + 30 \cdot 30 + 15 \cdot 29 + 30 = \\ = 30 \cdot 61 + 15 \cdot 29 = 15 \cdot 122 + 29 = 15 \cdot 151 = 2265$$

Ответ: 2265



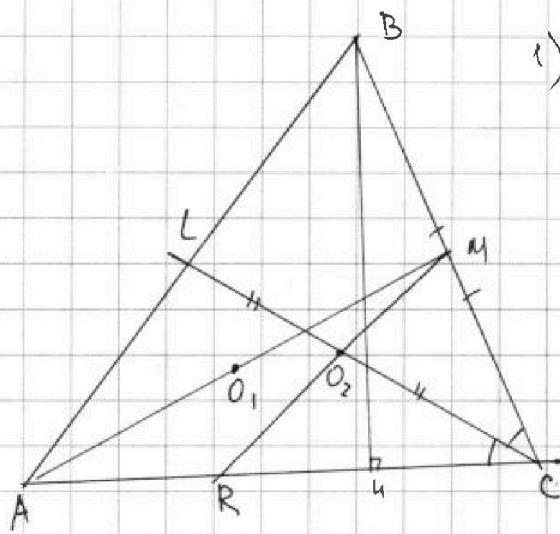


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1)  $BH$  - высота  
 $O_1$  и  $O_2$  центры  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно, т.к.  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  построены на  $AM$  и  $CL$  как на диаметрах  $\Rightarrow O_1 \in AM$  и  $AO_1 = O_1M$  и  $O_2 \in CL$  и  $CO_2 = O_2L$

2)  $P$  и  $Q$  - перес.  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$   
 $\Downarrow$   
 $PQ$  - рад. ось  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$   
 т.к. рад. ось перпен. касат. линиям

центров  $\Rightarrow O_1O_2 \perp PQ$ .

т.к.  $PQ \parallel BH$  и  $BH \perp AC$   
 и  $O_1O_2 \perp PQ \Rightarrow O_1O_2 \parallel AC$

3)  $MO_2$  - средняя линия  $\triangle ABC$  (т.к.  $M$  - середина  $BC$  и  $O_2$  - с.р.  $CL$ )  
 $MO_2 \parallel AC = R$

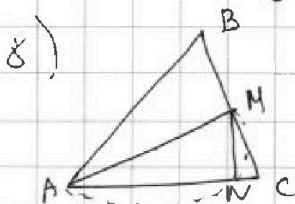
4)  $O_1O_2 \parallel AC$  (в частности  $AR$ )  $\Rightarrow O_1O_2$  - средняя линия  $\triangle AMR$   
 $AO_1 = O_1M$

$\Downarrow$   
 $MO_2 = O_2R$

5)  $MO_2 = O_2R$  и  $\angle MCO_2 = \angle O_2CR \Rightarrow$  в  $\triangle MCR$ :  $CO_2$  бисс. и медиана  $\Rightarrow \triangle KMC$  - равнобедр. и  $CO_2$  - высота  
 ( $CO_2 \perp RM$ )

6)  $CO_2 \perp RM$  и  $RM \parallel AB \Rightarrow CO_2 \perp AB$   
 (т.к. средняя линия) (или  $CL \perp AB$ )

7)  $CL$  - высота ( $CL \perp AB$ ) и бисс. в  $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$  - равнобедр.  $\Rightarrow BC = AC$



$\angle MNA = 90^\circ$ , т.к.  $AM$  - диам. окр.  $\Omega$   
 и  $\angle ANM$  опирается на диаметр.



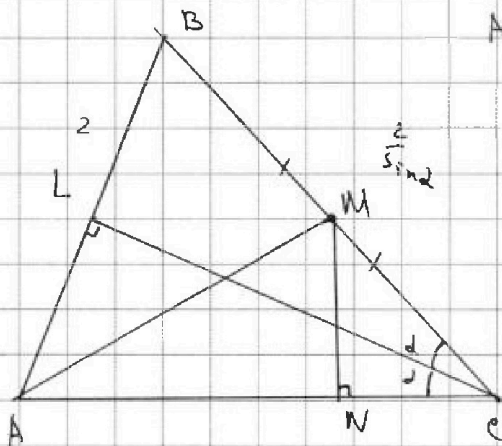
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9)



$$AB = 4 \Rightarrow AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Пусть } \angle BCL = 2 \Rightarrow \angle LCA = d.$$

$$\triangle BCL: BC = \frac{BL}{\sin \angle BCL} = \frac{BL}{\sin 2d} = \frac{2}{\sin 2d}$$

$$\text{Так } AC = BC \Rightarrow AC = \frac{BL}{\sin 2d}$$

$$BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2 \sin 2d} = \frac{1}{\sin 2d}$$

$$\triangle MNC: NC = \cos 2d \cdot MC = \frac{\cos 2d}{\sin 2d} = \frac{1 - 2 \sin^2 d}{\sin 2d}$$

$$AN = AC - NC = \frac{2}{\sin 2d} - \frac{1 - 2 \sin^2 d}{\sin 2d} = \frac{1 + 2 \sin^2 d}{\sin 2d} = 5$$

$$\text{так } 0 < d < 90^\circ \Rightarrow \sin d \neq 0$$

$$\sin d = t \quad (\Rightarrow 0 < t < 1)$$

$$1 + 2t^2 = 5t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\left( \frac{5 + \sqrt{17}}{4} > 1 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{17} > 4 \right)$$

$$t = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = \sin d$$

$$BC = AC = \frac{2}{\sin d} = \frac{2 \cdot 4}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8(5 + \sqrt{17})}{25 - 17} = 5 + \sqrt{17}$$

Ответ:  $BC = AC = 5 + \sqrt{17}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

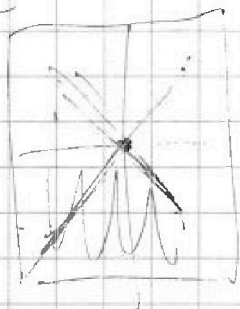
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Умножение

30 +



30 · 30

$$\frac{30 \cdot 24}{2} = 15 \cdot 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 1} \\ 7x - 5 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \\ \underline{-x^3 + 3x^2 - x + 1} \\ -x + 3 \end{array}$$

$$-2x^2 + 6x - 4 \mid -2x + 6$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 6x - 4 \\ \underline{2x^2 - 6x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4)$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 5x$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 4)$$

$$2 + 2^2 - 1 = 5 + 1$$

$$2 + 2^2 - 5 + 1 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2 = 33$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$\frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} - 2 \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} = 5$$

$$\sin \alpha = t \quad 15 + 20$$

$$(1 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$3(3x^2 + 3x - 2) = 9x^2 + 9x - 6$$

$$9x^2 + 9x - 6 = 9x^2 + 9x - 6$$

$$(5-x)(1+x) = 5 - x^2 = (5-x)(2-x)$$

$$= (x+5)(x+2) = x^2 + 7x + 10$$

$$9x^2 + 9x - 6 = x^2 + 7x + 10$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

$$y = 4y - 4 - 1$$

$$5 = 3y \quad y = \frac{5}{3}$$

$$4x = 2x - 2$$

$$\alpha < 90^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

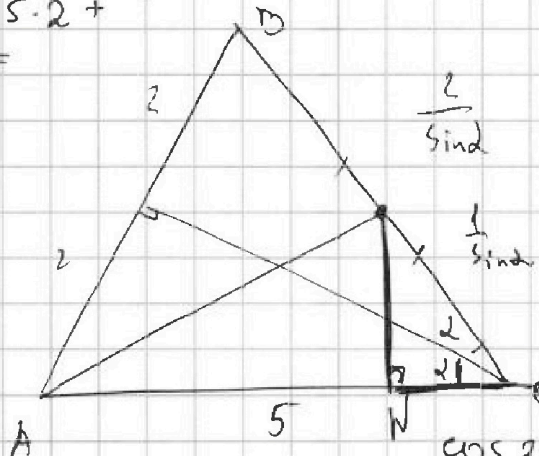
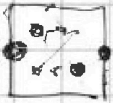
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$e^2 = 12^2 = \frac{12 \cdot 120}{2}$   
 $1 \cdot 120 \cdot \frac{3}{4}$   
 $120 \left( \frac{12+3}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}$   
 $= \frac{1}{8} 60 (12+3)$   
 $= 15(2+3) = 15 \cdot 5 = 75$

$\frac{12 \cdot 120}{2}$

$AB = BC =$   
 $= \frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{5 - \sqrt{7} - 5 - \sqrt{7}} =$   
 $= \frac{8(25 + \sqrt{7})}{8} =$   
 $= 25 + \sqrt{7}$

$15 \cdot 24 + 15 \cdot 2 +$   
 $+ 60 =$   
 $= 15 \cdot 120$   
 $15 \cdot 151$



$\frac{1}{4}$   
 $121 - 11$   
 $110$   
 $h \cdot r$   
 $\frac{1}{611 \cdot 119}$   
 $08$

$\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$

$\frac{2}{\sin \alpha} - \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 - 1 + 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = 5$

$2\sin^2 \alpha + 1 - 5\sin \alpha = 0$   
 $\sin \alpha = t$

$\frac{2\sin^2 \alpha + 1}{\sin \alpha} = 5$   
 $2\sin^2 \alpha + 1 = 5\sin \alpha$

$2t^2 - 5t + 1 = 0$   
 $D = 25 - 8 = 17$

$30 \cdot 119 + 30 =$   
 $30 \cdot 119 + 30 =$

$\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow t = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$   
 $\sin \alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$

$\frac{120 \cdot 119}{611 \cdot 119}$   
 $30$

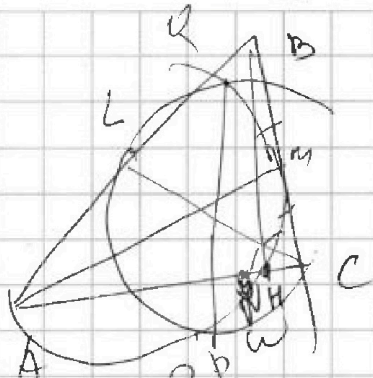


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

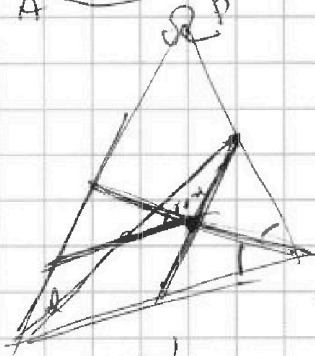


$PQ \parallel BN$

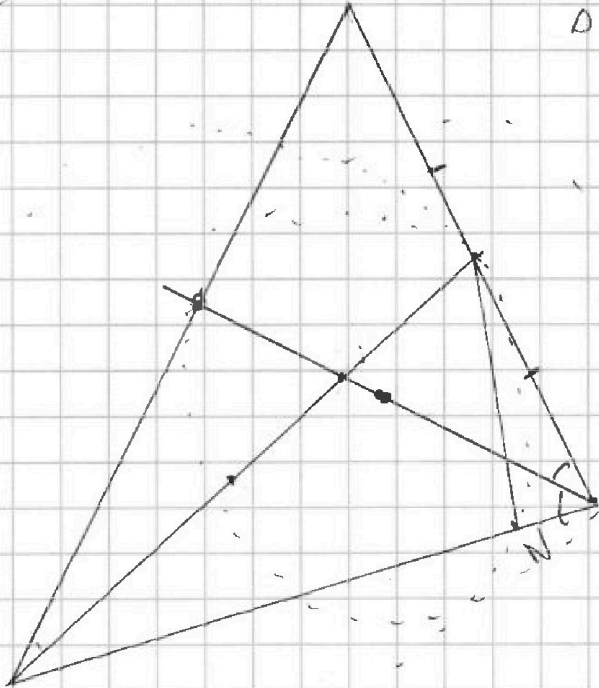
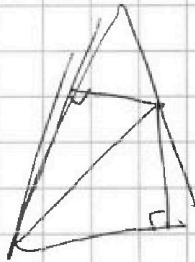
$AB = 4$

$AN = 5$

$\Rightarrow \angle C \rightarrow$   
 $\overline{BC \perp \overline{AN}}$

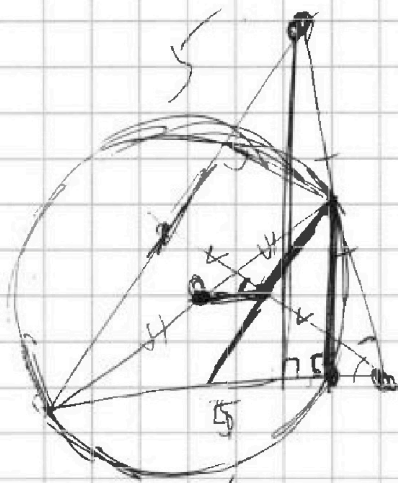


$mn$

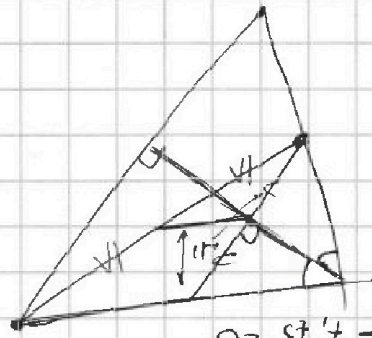


$\triangle ABC$

$AC = BC$



$2$   
 $2\sqrt{5}$   
 $4 \cdot 1.4$   
 $4 \cdot 1.4$   
 $8 \cdot 1.4$   
 $20$   
 $25$



$7x - x(x+2) = 7x - x^2 + 2x$   
 $= 7x - x^2 + 2x = 9x - x^2$   
 $5 = \sqrt{4 + 5 - x^2}$   
 $25 = 4 + 5 - x^2$   
 $20 = -x^2$   
 $x^2 = -20$   
 $x = \sqrt{-20}$   
 $x = 2\sqrt{5}i$   
 $2\sqrt{5}i$   
 $2\sqrt{5}$   
 $2\sqrt{5} + 2$

$(7-x)(x+2) = 7x - x^2 + 2x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2} = \frac{(x-y)}{\sqrt{x+y}} = 0$$

$$(x-y) \left( x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{y} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}} \right) = 0$$

$x = 0$   
 $y = 0$

$x = y$

есть решение

$\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$      7  
14  
9

$x=0$   $y=0$

$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 =$

$\sqrt{2} - \sqrt{7}$

~~11~~

$\sqrt{8} \cdot 7 = 7$

$\sqrt{8} = \sqrt{7} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

$\sqrt{8} \cdot 11 = \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

$\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$      5

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$

$D = 25 + 4 \cdot 14 = 25 + 40 + 16 = 81 = 9^2$

$\frac{-5 \pm 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}}$

$2\sqrt{(7-x)(x+2)}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{9 + \sqrt{17}} - \sqrt{9 - \sqrt{17}} \right)$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 - x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} + 2 + x - 2 = 0$

$(\sqrt{7-x} - \sqrt{2+x})^2 = \frac{80-16}{64} \sqrt{7-x} - \sqrt{2+x} = 1$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t$

$t^2 + t - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\frac{-1 \pm 3}{2}$

$t = -2$

$t = 1$

$8 = 2\sqrt{(7-x)(2+x)}$

$4 = \sqrt{(7-x)(2+x)}$

$16 = 14 + 5x - x^2$

$x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 8 = 17$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

$18 - 2 \cdot 8 = 2$

$\sqrt{7-x} + \sqrt{x+2} = 2$

$9 - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 4$   
 $5 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a

	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+5d$	$a+9d$
			$6-9x$	$(x^2-2x)^2$	$9x^2$

$$2 \left( (x^2-2x)^2 - (6-9x) \right) = 9x^2 (x^2-2x)^2$$

$$x^2(x-2)^2 = x^2(x-2)^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x$$

$$x^2(9 - (x-2)^2) = x^2(9 - x^2 + 4x - 4) = x^2(5 - x^2 + 4x)$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 12 + 18x = 5x^2 - x^4 + 4x^3$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$16 + 44 + 2 - 4 + 3 = 2$$

$$(x^2-2x)^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 5x^2 - x^4 + 4x^3$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 0$$

$x = 1$

$$x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 = 0$$

$$x^3(x-1) - 3x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = x^2(x-1) + 2x(x-1) - 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 4 = 20$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x-2y| \leq 2$$

$$|x-y| \leq 1$$

$$3y + 6x$$

$$x \geq 2y$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$x \leq 2 + 2y$$

$$-y \leq 1$$

$$y \geq -1$$

$$2y - x \leq 2$$

$$2y - 2 \leq x$$

$$2y - 2 = 6$$

$$y - 1 = 3$$

100

$$2x - y \geq 0 \quad 2x \geq y$$

$$2x + y \leq 1$$

$$2x - 1 \leq y$$

$$y - 2x \leq 1$$

$$y \leq 1 + 2x$$

$$3y + 6x \rightarrow \text{н.п.}$$

$$\text{н.п. } 3(y + 2x)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y \end{array} \right\}$$

н.п.

y

2

y

$$2x \leq 1$$

$$y \leq 1 + 2x$$

$$y = 2x - 1$$

$$2x \geq y$$

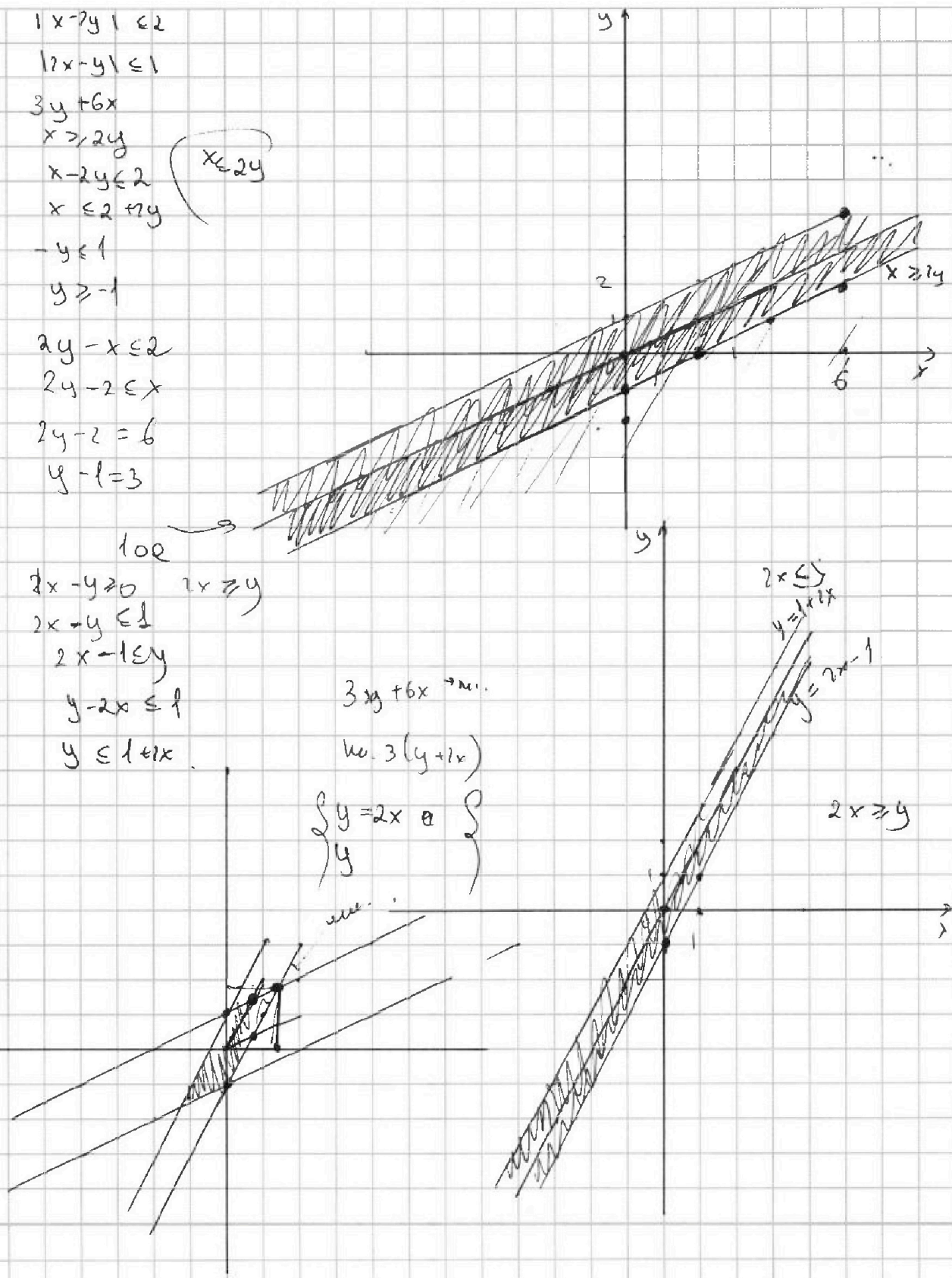
...

$$x \geq 2y$$

6

x

x



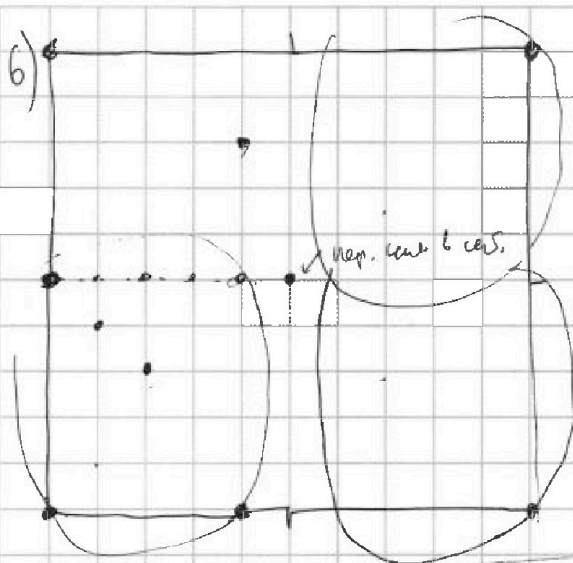


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



всего  $4 \cdot \pi \cdot 6^2$   
 сев. и радиус  $6$  см.  $6 \cdot 1 \cdot 6$   
 $\frac{120}{4} = 30 \Rightarrow 30 \cdot 6$   
 пог.  $6$  см. не  $6$  см.  
 высота 1 сектора  $6^2$   
 и сев.  $6$  см.  $30 \cdot 6$

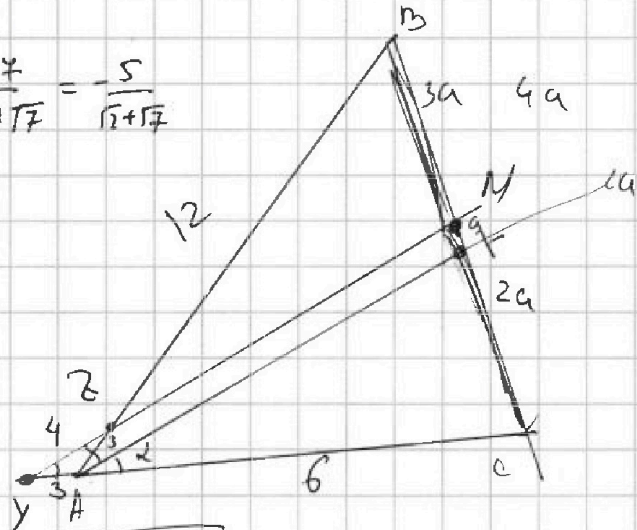
4)

$$\cos \alpha = \frac{3^2 - 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3^2} = \frac{9 - 4 - 16}{18} = \frac{-11}{18}$$

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

в  $c = ?$

$$\frac{2-7}{\sqrt{2+7}} = \frac{5}{\sqrt{2+7}}$$



$$\sqrt{6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 12^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{4(9 + 36 + 8)} =$$

$$\cos 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

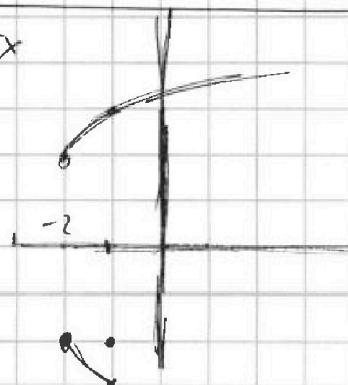
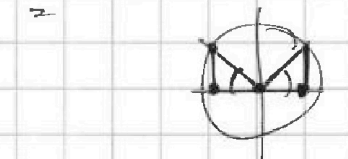
9+

$$-49 + 14xy - y^2 - 14y + 49 + 14 + 5x$$

$$5x + 10 + 4 - y^2 \quad y \leq 7 \quad x \geq -2$$

$$14 + 5x = y^2$$

14





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n) \cdot (m+2n-7)$$

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$\text{или } mn(m+2n+9) = 11p^2$$

$$75 = 5^2 \cdot 3$$

$$\text{или } m+n=3$$

$$(m+2n)(m+2n-7)$$

$$m+2n \geq 7$$

$$mn(m+2n+9)$$

$$m+2n \geq 8$$

$$(m+2n+9) \geq 17$$

$$5^2 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 5^2 \cdot 3 \cdot 2 \\ mn(m+2n+9) = 11p^2 \end{cases}$$

$$\text{или } 2, 10, 1, 11p^2$$

$$q=2 \text{ или } 5^2 \text{ или } 2$$

$$(m+2n, m+2n-7) = (7, mn) = 1$$

$$\begin{cases} m+2n = 25 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$$

$$\text{или } 7, 10, p^2 = 7$$

$$\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$$

$$m+2n=7$$

$$m+2n-7 \leq m+2n$$

$$\begin{cases} m+2n=77 \\ m+2n-7=7 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 11p^2 \\ p^2 (p/11) \\ 11 \end{matrix}$$

$$m+2n-7 \text{ и } m+2n-7 \text{ - взаимно просты} \\ \text{чер. } \Rightarrow p=2$$

$$m+2n=11$$

$$11p^2 - 7p^2 = 4p^2$$

$$\begin{matrix} n=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$3 \quad 4$$

$$4$$

$$20$$

$$25$$

$$4$$

$$15 \cdot 2$$

$$11 \cdot 2$$

$$m+n=15$$