



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Пусть прогрессия $A_n = \cancel{A_1} + (n-1)b$

$$(1) 6x+18+2b = (x^2-4x)^2 ; \quad (x^2-4x)^2 + 4b = -3x^2 \quad (2)$$

$\cancel{-3x^2} + 4b \approx \sqrt{3x^2}$

$$(3) 2b = (x^2-4x)^2 - 6x - 18 \quad (u_3(1))$$

(8x-6)(x+3):

$$3(x^2-4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2$$

$$3x^4 + 48x^2 - 24x^3 - 12x - 36 = -3x^2$$

~~$x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$~~

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-2)(x^3 + 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x-2)^2 (\cancel{x^2+4x+3})$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x^2-4x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2 \pm \sqrt{4+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2+\sqrt{7} \\ x=2-\sqrt{7} \end{cases}$$

Но когда x является b , значит
то эти решения подходят!

Ответ: ~~$2\sqrt{7}, 2, -2\sqrt{7}$~~ ; $2; 2+\sqrt{7}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad (1) \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad (2) \end{array}$$

(1) + (2): $\begin{array}{l} (1) + 3 \cdot (2): \\ (3) -14 \leq x - 4y \leq 14 \end{array}$, $-6 - 3 \cdot 14 \leq 7x \leq 6 + 3 \cdot 14$

~~$-6 - 3 \cdot 14 \leq 7x \leq 6 + 3 \cdot 14 \quad \Leftrightarrow \quad -48 \leq 7x \leq 48 \quad (4)$~~

$(4) + 7 \cdot (3): \quad -48 - 7 \cdot 14 \leq 14x + 7y \leq 48 + 7 \cdot 14$

$-146 \leq 14x + 7y \leq 146$

Минимальное значение: -146 . Проверяется,

например, при $x = -\frac{48}{7}$, $y = -\frac{50}{7}$

Ответ: -146

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 8m - 9n = (m-n)(m-n+8)$$

Дем. Предположим $A = 3q^2$. Это простые делители: 3, 9, 9,

~~Все простые, поэтому~~ Поэтому мы можем представить все возможные значения $(m-n)$ и $(m-n+8)$:

$$m-n = \quad m-n+8 =$$

3	q^2	$\Rightarrow q^2 = 3+9=12$ не квадрат члена \times
-3	$-q^2$	$\Rightarrow -q^2 = -3+9=6; q^2 = -6 < 0$ \times
q^2	3	$\Rightarrow q^2 = 3-q = -6 < 0$ \times
$-q^2$	-3	$\Rightarrow q^2 = -12$ не квадрат члена \times
3q	9	$\Rightarrow q = -4,5$ не член \times
-3q	-9	$\Rightarrow q = 4,5$ не член \times
q	$3q$	$\Rightarrow q = 4,5$ не член \times
-q	-3q	$\Rightarrow q = -4,5$ не член \times

Мы рассмотрели все вероятности, и все подошли. Значит $A = 13p^2$.

Простые делители: 13, p, p. Рассмотрим все случаи значений $(m-n)$ и $(m-n+8)$:

$$m-n = \quad m-n+8 =$$

13	p^2	$\Rightarrow p^2 = 13+8=21$ не квадрат \times
-13	$-p^2$	$\Rightarrow -p^2 = -13+8=-5; p^2 = 5$ \checkmark
p^2	13	$\Rightarrow p^2 + 8 = 13; p^2 = 5$ \checkmark
$-p^2$	-13	$\Rightarrow -p^2 + 8 = -13; p^2 = 21$ не квадрат \times
13p	p	$\Rightarrow 12p = 9; p < 0$ \times
-13p	-p	$\Rightarrow 12p = 9; p = \frac{3}{4}$ не член \times
p	13p	$\Rightarrow 12p = 9; p = \frac{3}{4}$ не член \times
-p	-13p	$\Rightarrow -12p = 9; p < 0$ \times

Значит: ~~поставь~~ $p = 2 \quad A = 52$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3) = 3q^2 \text{ (т.к. } A = 73p^2)$$

из A: $\begin{cases} m-n = -13 \\ m-n = 4 \end{cases}$. $\begin{cases} 3q^2 = mn(-13+3) \\ 3q^2 = mn(7) \end{cases}$

$$\begin{cases} 3q^2 = mn(10) \\ 3q^2 = mn(7) \end{cases} \quad 3q^2 \div 10, \text{ т.к. } 10 \text{-е простое и не делится на } 3,$$

~~3q^2~~

$$3q^2 = m \cdot n \cdot 7 \Rightarrow q = 7.$$

$$3 \cdot 7 = m \cdot n \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=7 \\ m=7 \\ n=3 \end{cases} \quad \begin{cases} m=7 \\ n=3 \end{cases} \quad \text{одна пара.}$$

$m-n=4$

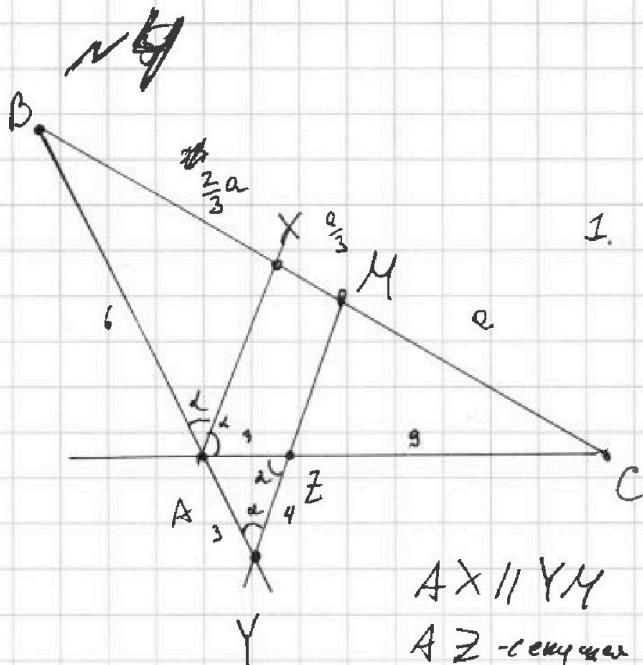
Ответ: (7; 3).

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение

1. Рассмотрим $\angle BAC = 2\alpha$
 $\angle BAX = \angle XAC = \alpha$
 $\angle BYM = \angle BAX = \alpha$ как
 соответственные при $AX \parallel YM$
 и секущей BY .

$$AX \parallel YM \quad | \Rightarrow \angle YZA = \angle XAC = \alpha$$

как параллельные
известные

2. Тогда $\triangle YAZ$ - равнобедренный ($\angle AYZ = \angle AZY = \alpha$) \Rightarrow
 $\Rightarrow AZ = AY = 3$.

$$3. \cos(\alpha) = \frac{YZ}{2AZ} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3} (\alpha < 80^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

4. $ZC = AC - AZ = 9$. По таблич. теореме Фалеса

составим $AX \parallel YZ$: $\frac{AZ}{XY} = \frac{ZC}{MC}$. Рассмотрим $MC = a$,

тогда $XY = \frac{a}{3}$. $YM = MC = a$ (M - серединка) $\Rightarrow AX = \frac{2}{3}a$

5. По ct-by доказывается $AX: \frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По т. Косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(BAC)$$

$$BC^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$BC^2 = 144 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 196$$

$$BC = 14$$

Ответ: 14.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \quad (\text{I}) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y \quad (\text{II}) \end{cases}$$

II:

$$4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y}$$

$$\text{Пусть } m = \sqrt[4]{x}, \quad m \geq 0; \quad n = \sqrt[4]{y}, \quad n \geq 0$$

$$4m^8 + m^4 + 5m = 4n^8 + n^4 + 5n$$

$$(4m^8 - 4n^8) + (m^4 - n^4) + 5(m - n) = 0$$

$$(m-n) \underbrace{(4m^6 + m^4n + m^2n^2 + }$$

$$4(m^4 - n^4)(m^4 + n^4) + (m^2 - n^2)(m^2 + n^2) + 5(m - n) = 0$$

$$4(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)(m^4 + n^4) + (m - n)(m + n)(m^2 + n^2) + 5(m - n) = 0$$

$$(m - n) \underbrace{(4(m+n)(m^2 + n^2)(m^4 + n^4) + (m+n)(m^2 + n^2) + 5)}_{\text{какое членное } 30, \text{ скоска } \geq 5} = 0$$

какое членное 30, скоска ≥ 5 ,

значит $m - n = 0 \Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow \boxed{x = y}, \boxed{x \geq 0}$

I: (8 подстановка $x = y$)

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\text{Пусть } \sqrt{x+6} = a, \quad a \geq 0; \quad \sqrt{5-x} = b, \quad b \geq 0$$

$$a - b + 5 = 2ab \Leftrightarrow a - b = 2ab - 5 \quad \text{возводим в квадрат:}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 4(ab)^2 + 25 - 20ab \quad a^2 + b^2 = (x+6) + (5-x) = 11$$

$$4(ab)^2 - 18ab + 14 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(ab)^2 - 9ab + 4 = 0 \quad \text{небольшое от } (ab)$$

$$\begin{cases} ab=1 & (1) \\ ab=3,5 & (2) \end{cases}$$

$$1: \sqrt{30-x-x^2} = 1 \Leftrightarrow 30-x-x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+x-29=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot29}}{2} \quad \text{и } x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2}$$

$$2: \sqrt{30-x-x^2} = 3,5 \Leftrightarrow 30-x-x^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 49 - 120 = 0 \quad 4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16\cdot71}}{8}, \quad x \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{117}; \quad x = -\frac{1}{2} + 3\sqrt{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} < 5 \text{ л. о.}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{117}}{2}, -\frac{1}{2} + 3\sqrt{2} \right\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

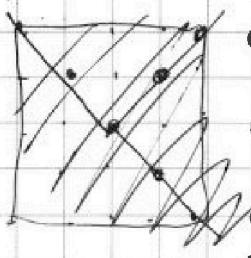
№6

Рассмотрим произвольную раскраску.
перекраску двух произвольных узлов.
Рассмотрим перекраски, которые можно
из них получить поворотом:

она (поворот на 0°)
первая (поворот на 90°)
вторая (поворот на 180°)
третья (поворот на 270°) } всего не более четырёх
(осталось повороты, переводящие
квадрат в квадрат
революционные одинаковы)

I) Если никакие две из них не совпадут: где-либо перекраски существует
ещё 3 перекраски, дающие текущую раскраску как она.

II) Если какие-то две совпадут:
предположим, что совпадут какие-то две, полученные
одну из которых ~~переведя~~ нечётная количеством
поворотов не 90° :



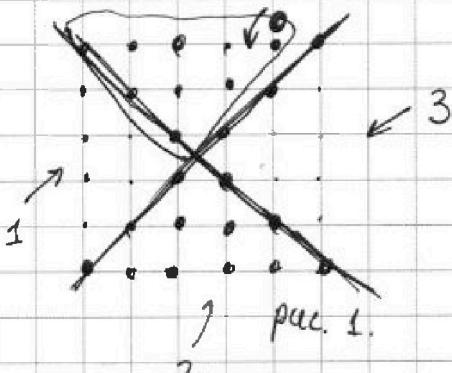
: Результирующие две после нее не 4
области с присвоенными им значениями
0-3 (рис. 1)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к. точек нет, то не будет точки на пересечении всех границ. Точки не принадлежат прямым т.ч. область, в

которую они попадают при малом повороте по часовой стрелке. Поворот на 90° изменяет значение области цепных точек на ± 1 ($+1$ или -1).

Если мы рассмотрим сумму значений областей цепных двух точек, то обнаружим, что она изменяется на $2 \cdot$ нечетное число, то есть её остаток по модулю 4 изменится. Очевидно, если расстояния между π , то π из них однократные остатки этого суммы по mod 4. Значит, область может перекресться только полученные зеркальные другое изображение не 180° (это все симметрии относительно четырех квадрантов). Это значит, что область может только перекресться, если где-то узле симметричного отн. четырех квадрантов. Для таких перекрестья существует еще шесть одинаковых точек, каждая из которых перекрестья. (90° и 270° тоже будут симметричны, значит, совпадут).
Перекрестья без симметрий: $a = \frac{100 \cdot (900 - 1 - 1)}{2}$, с симметрией:

$$b = \frac{100 \cdot 1}{2} \text{ (у каждой точки есть 1 симметричная); Всего различных перекрестья: } \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 25 \cdot 49 + 25 = 25 \cdot 50 = 1250$$

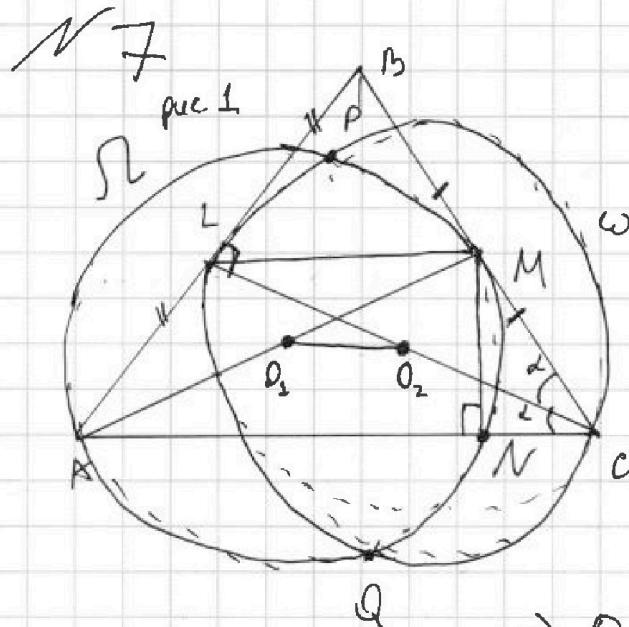
Ответ: 1250.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AN = 20$$

$$AB = 26$$

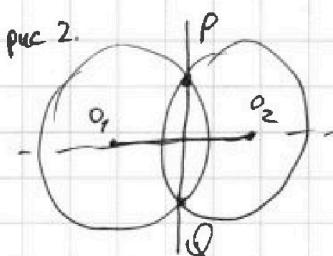
Решение

1) $PQ \parallel$ высоте BN

$PQ \perp AC$

2) $PQ \perp O_1O_2$ (O_1 -центр S_1 ;
 O_2 -центр S_2),

при пересечении двух окружностей P симметрична Q
относительно O_1O_2 (рис 2)



3) Значит; $O_1O_2 \parallel AC$. O_1 -середина AM

O_2 -середина CL . Это значит, что

$ALMC$ - трапеция и $\angle M \parallel O_1O_2 \parallel AC$

4) Так же $\angle M \parallel AC$ и M -середина BC , значит:

LM -средняя линия, L -середина AB .

5) CL -медиана и биссектриса $\Rightarrow \triangle ABC$ -равнобедренный
($AC=BC=x$). ($AC=BC=x$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{послед} \quad \angle CDB = \alpha \\ \text{из } \triangle CDB: \sin(\alpha) = \frac{CB}{BC} = \frac{AB}{2BC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha < 80^\circ \Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{x^2 - 169}{x^2} \quad \cancel{\times \sin^2(\alpha) = \frac{1}{4}x^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{x^2 - 169}}{x} \quad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \frac{x^2 - 169 \cdot 2}{x^2}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 169}}{x}$$

$$6) \angle ANM \in \text{т. } N \text{ лежит на } \ell$$

и $\angle ANM$ опирается на AM (засечка ℓ) \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle ANM = 80^\circ.$$

$$7) NC = MC \cdot \cos(2\alpha); NC = x - 20$$

$$x - 20 = \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2 - 338}{x^2}$$

$$2x - 40 = \frac{x^2 - 338}{x}, \quad \text{отсюда} \Rightarrow 2x^2 - 40x = x^2 - 338$$

$$x^2 - 40x + 338 = 0$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 338 \cdot 4}}{2}, \quad \text{при этом } x > 20, (N \in AC)$$

$$x = 20 + \frac{\sqrt{1600 - 1362}}{2} = 20 + \frac{\sqrt{248}}{2} = 20 + \sqrt{62}$$

$$\text{Ответ: } AC = 20 + \sqrt{62}.$$

$$BC = 20 + \sqrt{62}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(6x+18) \cancel{2} q^2 = (x^2 - 4x)^2 \text{ чекбокс}$$

$$30 \cancel{- 12q^2} - 28 = -12 = -3$$

$$(x^2 - 4x)^2 q^4 = -3x^2$$

$$2b + 5 = 2ab \quad 4x - 3y = -6 \quad a - b + 18 = 2a - 5$$

$$14x - 3y \leq 6$$

$$100 + 98 : 4 : 2 \quad 2x - 4y = -8 \quad a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2b^2 + 25 - 2ab$$

$$100 \cdot 1 : 2 : 2 : 4 = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = 13p^2 \quad a^2 + b^2 + 8ab = 4a^2b^2 + 25 + 2ab$$

$$|A| = m^2n - mn^2 + 3mn = 3q^2 \quad 11 \quad a^2b^2 - 2ab + 14 = 0$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad -58 \leq 7x \leq 58 \quad 4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}$$

$$-8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad -8 \leq 4y - 3x \leq 8$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{x^2 - 2 \cdot 168}{x^2 \cdot 2}$$

$$-2 \leq x + y \leq -2 \quad -14 \leq x - y \leq 14 \quad 4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y}$$

$$-52 \leq 3x + 3y \leq 52$$

$$A = (m-n) + (m-n)q = (m-n)(m-n+q) = 3q^2 \quad \sqrt[4]{x} = +$$

$$\beta = mn(m-n+3)$$

$$q^8 + t^4 + 5t = 4n^8 + 16n^4 + 64n$$

$$x = 20 \pm \sqrt{400 - 338} \quad q = 2q = -9 \quad (t-n)(t^2 \dots 15) = 0$$

$$(m-n)(m-n+q) = 13p^2 \quad q = 8 \quad 2q = 8 \quad 8^2 = \sqrt{81 - 8 \cdot 7}$$

$$p^2 = 22 \quad 2x^2 - 40x + 20 = q^2 \quad 3 \quad q^2 \leq 3 \quad 8^2 = 64$$

$$p^2 = 22 \quad 2x^2 - 40x + 20 = 0 \quad -9^2 = 81 \quad 8^2 = 64 \quad 81 - 56 = 25$$

$$13p^2 = 12p^2 - 9 \quad 13p^2 = 12p^2 - 9 \quad 3 \quad q^2 = 3 \quad 8^2 = 64 \quad 81 - 56 = 25$$

$$p^2 = 4 \quad p^2 = 4 \quad -9^2 = 81 \quad 2q = 9 \quad 2q = -9 \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7}$$

$$12p^2 = 9 \quad x^2 - 2 \cdot 168 - 3q \quad -3q \quad 2q = 9 \quad 2q = -9 \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7}$$

$$x^2 - 20x = q^2 \quad -3q \quad -3q \quad 2q = -9 \quad 2q = 9 \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7}$$

$$x^2 - 20x = q^2 \quad -3q \quad -3q \quad 2q = -9 \quad 2q = 9 \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7}$$

$$-48 \times 4 = 192 \quad 192 = 144 \quad 144 + 48 = 192$$

$$AC = 12 \quad \cos(1) = \frac{2}{3} \quad \sin(1) = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \frac{15}{13} \quad \frac{50}{7}$$

$$4z = 3 \quad y_2 = 4 \quad \cos(2) = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9} \quad -\frac{4}{9} \cdot 4 - 3y = -6$$

$$(2e)^2 = 36 + 144 + \frac{2}{9} \cdot 6 \cdot 12 \quad 2 \quad -4z \cdot 4 - 2z = -42$$

$$BC^2 = 180 + \frac{12}{3} \cdot 12 = 96 \quad BC = 228 = x^2 - \frac{4z}{7} \quad 160 - 215$$

$$4k - 3y = -6 \quad 8x - 12y = -24 \quad y =$$

$$8y - 3x = -8 \quad 12y - 8x = -24$$

$$12 + 6(\bar{q}) + 18 = (30 + 6)\bar{q}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$(x-2)(x^3-6x^2+5x+6) \quad (x-2)(x^2+4x+3)$$

$$(4m^8-4n^8)+(m^4-n^4)+5(m-n)=0$$

$$x = \frac{-48}{4}$$

Пусть 9- многочлен прогрессии.

$$-76 \cdot 4^{3-7}$$

седьмой член прогрессии: $(x^2-4x)^2 \quad x+y=-14$

восьмой: $(x^2-4x)^2 9 \quad \begin{cases} x \cdot \sin(2\alpha) + x \cdot \cos(\alpha) = x \\ 4x - 3y = -6 \end{cases} \quad -48+4y=-98$

девятый: $(x^2-4x)^2 9^2 \quad \begin{cases} 4y - 3x = -8 \\ 3x - 4y = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\alpha) = \\ \sin(\alpha) = \end{cases} \quad x = 14$

десятый: $(x^2-4x)^2 9^3 \quad \text{или} \quad 3y - 4x = 6 \quad y = \frac{-50}{7}$

одиннадцатый: $(x^2-4x)^2 9^4 \quad \Leftrightarrow (x^2-4x)^2 9^4 = -3x^2 \quad 4x-3y =$

Значит, что $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 \leq 0 \quad 9^4 \geq 0 \quad x = 0 \quad \frac{1600}{1352}$

$(x^2-4x)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow (x^2-4x)^2 9^4 = -3x^2 \quad \begin{cases} x^2-4x \geq 0 \\ 9^4 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Такое возможно только если $-3x^2 = (x^2-4x)^2 9^4 = 0 \quad x = 0$

$x=0 \quad (x^2-4x)^2 = (6x+18)q^2 \quad \text{T.k.} \quad x=0 \quad \frac{1600}{1352}$

$0^2 = 18 q^2 \Leftrightarrow q=0 \quad \begin{array}{r} 26 \\ \times 2 \\ \hline 116 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times 4 \\ \hline 112 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times 29 \\ \hline 261 \end{array} \quad \begin{array}{r} 58 \\ \times 6 \\ \hline 348 \end{array} \quad \begin{array}{r} 58 \\ \times 4 \\ \hline 232 \end{array} \quad \begin{array}{r} 261 \\ \times 4 \\ \hline 1044 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1044 \\ \times 2 \\ \hline 2088 \end{array}$

Ответ: $6x+18+2q = (x^2-4x)^2$

$$3 \cdot \sqrt{2+5} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2} \quad (x^2-4x)^2 + 4q = -3x^2 \quad x^4+6x^2-8x^3-2x^2-4x-12=0$$

$$16-16 \cdot 8+17 \cdot 4-8-12 \quad -4-16 \cdot 8+17 \cdot 4 \times +18+2q = -3x^2-4q \quad x^4+8x^3+17x^2-4x-12=0$$

$$3x^2+6x+18+6q=0 \quad 2q = -x^2-2x-6$$

$$x^2+2x+6+2q=0 \quad 16-64+58-8-12$$

$$x^4+6x^2-8x-4q=-3x^2 \quad 2.3-24$$

$$x^4+6x^2-8x-4q=6x+18+2q \quad 16-64+58-8-12$$

$$3^4-8 \cdot 3^3+17 \cdot 3^2-4 \cdot 3-12 \quad 2.3-24$$

$$-553^3+17 \cdot 9-15 \cdot 9+14 \cdot 3-24=$$

$$B \quad -4-4^4+17 \cdot 4^2-16-12$$

$$A \quad C$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab=1 \\ a^2+b^2=11 \\ ab=3,5 \end{cases}$$

$$2(ab)^2 - 9ab + 4 = 0$$

квадратное урн. ab

$$\begin{cases} ab=1 \quad (1) \\ ab=3,5 \quad (2) \end{cases}$$

при этом $a^2+b^2=11$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$(1) \begin{cases} ab=1 \\ a^2+b^2=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 13 \\ (a-b)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \sqrt{13} \\ a-b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{13}-3}{2} \end{cases}$$

$$(2) ab=3,5$$

$$(a+b)^2 = 18$$

$$\sqrt{x+6} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$(a-b)^2 = 4$$

$$4x+2 = 9+\sqrt{13}+6\sqrt{13}$$

$$4x+2 - 6\sqrt{13} = 0$$

$$-\frac{1+\sqrt{117}}{2} \quad \checkmark$$

$$x = \frac{6\sqrt{13}-2}{4}, \quad x = \frac{3\sqrt{13}-1}{2}$$

$$117+1-2\sqrt{117} \quad \checkmark$$

$$18-2\sqrt{117} \quad \checkmark$$

$$3 \quad \checkmark$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$$2(ab)^2 - 3ab + 7 = 0 \quad \text{квадратное отн } ab$$

$$\begin{cases} ab = 1 & (1) \\ ab = 3,5 & (2) \end{cases}$$

$$(1): 30 - x - x^2 = 1$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+29^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+29^2}}{2}$$

$$(2): 30 - x - x^2 = 3,5$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+29 \cdot 4}}{2} \quad 4 \times 30 \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 26,5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1117}}{2}$$

$$(3) \quad 30 - x - x^2 = 3,5$$

$$x^2 + x - 26,5 = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+106}}{2}, \quad x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{107}}{2}$$

В одних случаях: $\sqrt{1117} > 10$, т.е. $x > 5$

тогда $(5-x)^2 < 0$, это значит решение нет.

Ответ: решения нет.