



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7. Пусть  $a_n = a_1 + (n-1)d$  — арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_3 = a_1 + 2d = 3(x+1)$$

$$a_5 = a_1 + 4d = x^2(x+2)^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2, \text{ тогда:}$$

$$\frac{a_9 + a_3}{2} = \frac{a_5 + a_1}{2} = a_1 + 5d = \underbrace{a_1 + 4d}_d + d = x^2(x+2)^2 + d =$$

$$= \frac{3x^2 + 3x + 3}{2}, \text{ знаменатель } d = \frac{3x^2 + 3x + 3 - 2x^4 - 8x^3 - 8x^2}{2} =$$

$$= \frac{-2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 3x + 3}{2}, \text{ тогда:}$$

$$a_9 - a_5 = 4d = -(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x^2) = -x^4 - 4x^3 - x^2$$

$$\rightarrow -(x^4 + 4x^3 + x^2) = 4d = \left( \frac{-2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 3x + 3}{2} \right) \cdot 4 =$$

$$-2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 6x + 6,$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0; \quad (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0; \quad (x+1)^2(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) = 0$$

Проверим, что при данных  $x$  и  $a_1$ ;  $a_3$ ;  $a_5$  являются членами арифметической прогрессии:

$$x = -1: \quad a_n = -1 + \frac{(n-1)}{2}; \quad a_3 = 3(-1+1) = 0 = -1 + \frac{2}{2} \checkmark$$

$$a_5 = (-1)^2(1)^2 = 1 = -1 + \frac{4}{2} = 1 \checkmark$$

$$x = -1 - \sqrt{3}: \quad a_n = -6\sqrt{3} - 4 + (n-1)(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}); \quad a_3 = -3\sqrt{3} = -6\sqrt{3} - 4 + 4 + 3\sqrt{3} =$$

$$a_5 = (-1-\sqrt{3})^2(1-\sqrt{3})^2 = 4 = -6\sqrt{3} - 4 + 8 + 6\sqrt{3} = 4 \checkmark = -3\sqrt{3} \checkmark$$

$$a_9 = 3(-1-\sqrt{3})^2 = 12 + 6\sqrt{3} = -6\sqrt{3} - 4 + 16 + 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 12 \checkmark$$

$$x = \sqrt{3} - 1: \quad a_n = 6\sqrt{3} - 4 + (n-1)(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}); \quad a_3 = 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 4 + 4 - 3\sqrt{3} =$$

$$a_5 = 4 = 6\sqrt{3} - 4 + 8 - 6\sqrt{3} = 4 \checkmark = 3\sqrt{3} \checkmark$$

$$a_9 = 12 - 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 4 + 16 - 12\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3} \checkmark$$

Ответ:  $-1; -1 - \sqrt{3}; \sqrt{3} - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

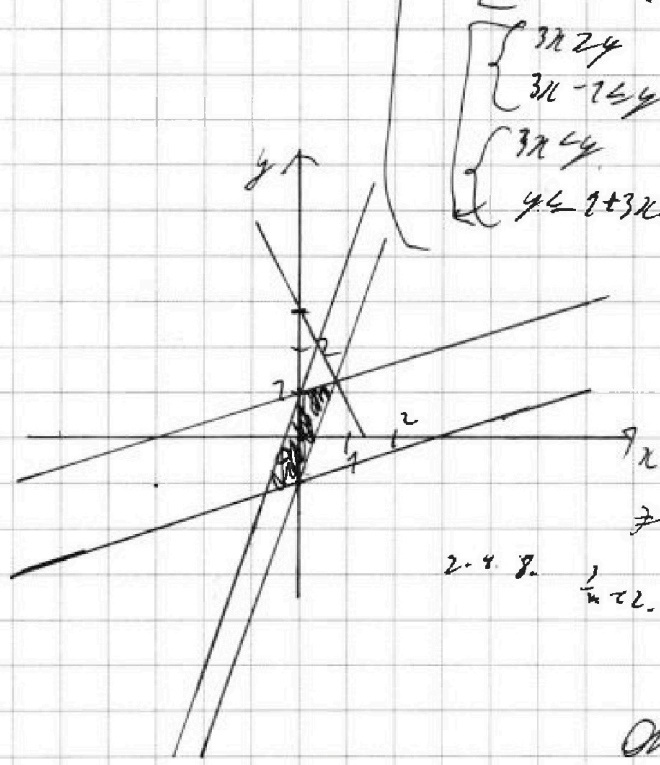
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ x \leq 3y + 3 \\ 3x \geq y - 7 \\ 3x \leq y + 7 \end{cases}$$



— Построим опорные  
этих точек.  
В коорд. на — отн:

Прямая  $4y + 3x = a$   
 $y = \frac{a}{4} - 3x$   
 найдём  $a$  — ?

Очевидно что макс  $a$ ,  
 это  $a = 17$ .  
 2. 4. 8.  $\frac{1}{2} \cdot 22$ .  
 (Прямая  $y = \frac{17}{4} - 3x$   
 пересекат ось. точек.  
 в т.  $(\frac{7}{4}; \frac{5}{4})$ .)  
 Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(2):  $m+n = p$ ,  $m \geq n$   $A = p(p-9) = p^2 - 9p = 73p^2$   
 $9p - 9p = 12p^2 = 0$  —

(3):  $m+n = p^2$ ,  $m \geq n$   $A = p^2(p^2 - 9) = p^4 - 9p^2 = 73p^2$   
 $\rightarrow p^4 = 22p^2 \quad | : p^2 (\neq 0) \quad p^2 = 22 \rightarrow p = \sqrt{22} \notin \mathbb{N}$  —

(4):  $m+n = 73p$ ,  $m \geq n$   $A = 73p \cdot (73p - 9) = 769p^2 - 73p = 73p^2$   
 $\rightarrow 756p^2 = 73p \quad | : p (\neq 0) \quad p = \frac{73}{756} < 1$ , но  $p \geq 2$  —

(5):  $m+n = 73p^2$ ,  $m \geq n$   $A = 73p^2(73p^2 - 9) = 769p^4 - 777p^2 = 73p^2$   
 $\rightarrow 769p^4 = 777p^2 \quad | : p^2 (\neq 0) \quad p^2 = \frac{777}{769}$

$p^2 = \frac{777}{769} \rightarrow p = \sqrt{\frac{777}{769}} < 1$ , но  $p \geq 2$  —

Поэтому мы получили, что

Проверка:  
 $\begin{cases} m=3 \\ n=20 \end{cases}$   
 $A = 70 \cdot 3 = 210$

$\begin{cases} m=3 \\ n=20 \\ m=20 \\ n=3 \end{cases}$

1)  $A = (20+3)(20+3-9) = 23 \cdot 4 = 73 \cdot (2)^2$  ( $2 = p$  — простое число) ✓

2)  $A = 20 \cdot 3(20+3-3) = 300 = 75 \cdot (2)^2$  ( $2 = q$  — простое число) ✓

3)  $\begin{cases} m=20 \\ n=3 \end{cases} : A = (20+3)(3+20-9) = 23 \cdot 4 = 73 \cdot (2)^2$   
 $p = 2$  — простое число ✓

4)  $A = 20 \cdot 3(20+3-3) = 300 = 75 \cdot (2)^2$  ( $2 = q = 2$  — простое число) ✓

Ответ:  $(3; 20); (20; 3)$

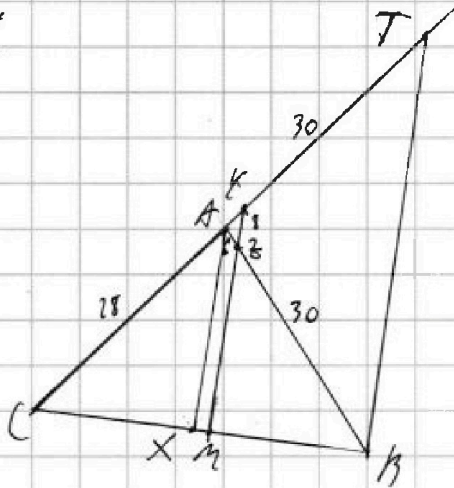


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24.



Решение:

д.к.  $\angle T \in AC: BT \parallel AX$ , тогда

~~AX~~  $BT \parallel AX \parallel AY$

$BT \parallel AY$   
 $AY \parallel XT$   $\rightarrow AY$  - ср. линия  $\triangle BCT$   
 (попр-ку ср. линии).

$\rightarrow$  по определению:

$Y$  - ср.  $CT$ , ~~тогда~~

$XY = \frac{1}{2} BT = AY = XT$

2)  $\angle XAC = \angle XAB$  | т.к.  $ZY \parallel AX$ , то

как напр. смежные углы:  $\angle AZY = \angle XAZ$

как соотв. углы:  $\angle CAX = \angle CYA$

$\rightarrow \angle AZY = \angle XAZ = \angle CAX = \angle CYA$

$\rightarrow \angle AZY = \angle CYA \rightarrow \triangle ZAY$  -  $\mu$ ,  $\sigma$  -  $\mu$  -  $\mu$  (по  $\mu$ - $\mu$ ),  $ZY = AY$

$AY = AZ = 6$  (по  $\sigma$ - $\mu$ ):

3)  $YT = CY = AC + AY = 18 + 6 = 24 \rightarrow TY = 24$

$\rightarrow AT = TY + AY = 30$

4)  $ZY \parallel BT \rightarrow$  как соотв углы:  $\angle AZY = \angle ATB$   
 $\angle AZY = \angle ATB$

$\rightarrow \triangle ABT \sim \triangle AZY$  (по 2 углам)  $\rightarrow \frac{AB}{AZ} = \frac{AT}{AY}$  ( $AZ = AY = 6$ )

$\rightarrow \frac{AB}{6} = 1 \rightarrow AB = AT = 30$

5) по т. косинусов (в  $\triangle ZAY$ ):

$$ZY^2 = AZ^2 + AY^2 - 2AZ \cdot AY \cdot \cos \angle ZAY$$

$$\rightarrow \cos \angle ZAY = \frac{36 + 36 - 64}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{9}; \angle CAB = 180^\circ - \angle ZAY \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \angle CAB = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

$$6) \text{ по т. косинусов (в } \triangle CAB): BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle CAB} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25. 
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - 2x + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

(x; y ≥ 0)

*Выводим из системы рассматриваем (2) ум-им:*

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 + 2x - 2y = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) + 2x - 2y = 0 \quad (x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = (x-y)(x+y))$$

$$(x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Поэтому, из (2) ум-я & мы имеем:  $x = y$  (x; y ≥ 0).  
вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \sqrt{y+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5y-y^2} & (1) \\ x = y & (2) \end{cases}$$

*Выводим из системы рассматриваем (1) ум-им:*

$$\sqrt{y+1} + 5 = 2\sqrt{6+5y-y^2} + \sqrt{6-y} \quad (1)$$

$$y+1 + 25 + 20\sqrt{y+1} = 4(6+5y-y^2) + 6-y + 4\sqrt{6-y}\sqrt{6+5y-y^2}$$

$$26 + 20\sqrt{y+1} = 24 + 20y - 4y^2 + 6 - y + 4\sqrt{6-y}\sqrt{6+5y-y^2}$$

$$2y^2 - 7y - \frac{1}{2}y + 2\sqrt{y+1}(20 - 24 + 4y) = 0$$

$$2y^2 - 7y - 2 + \sqrt{y+1}(2y-7) = 0$$

*Рассмотрим выражение  $2y^2 - 7y - 2$  и  $\sqrt{y+1}(2y-7)$*



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{y+7}(2y+7) = 2+9y-2y^2 \\ y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} (y+7)(4y^2+49-28y) = (2y^2-2-9y)^2 \\ 2y^2-9y-2 \leq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y^3+99y-28y^2+4y^2+49-28y = 4y^3+97y^2+49-8y^2-36y^2+38y \\ (y-\frac{5+\sqrt{13}}{2})(y-\frac{5-\sqrt{13}}{2}) \leq 0 \\ y \leq 6 \\ 4y^2-40y+3 \end{cases}$$

$$\sqrt{y+7} - \sqrt{6-y} + 6y + 21y - 2 = 2\sqrt{(6-y)(7+y)}$$

$$\sqrt{y+7}(\sqrt{y+7}+1) + \sqrt{6-y}(\sqrt{6-y}-1)$$

$$\sqrt{6-y}(\sqrt{6-y}+1) + (\sqrt{7+y}-1)(\sqrt{7+y}+1) =$$

$$= \sqrt{6-y}(\sqrt{7+y}+1) + \sqrt{7+y}(\sqrt{6-y}-1)$$

$$(\sqrt{6-y}-1)(\sqrt{7+y}-\sqrt{6-y}-1) + (\sqrt{7+y}+1)(\sqrt{6-y}-\sqrt{7+y}+1) = 0$$

$$(\sqrt{7+y}+1)(\sqrt{6-y}+1-\sqrt{7+y}) - (\sqrt{6-y}-1)(\sqrt{6-y}+1-\sqrt{7+y}) = 0$$

$$(\sqrt{6-y}+1-\sqrt{7+y})(\sqrt{7+y}+1-\sqrt{6-y}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6-y}+1 = \sqrt{7+y} \\ \sqrt{7+y}+2 = \sqrt{6-y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6-y+1+2\sqrt{6-y} = 7+y \\ 7+y+4+4\sqrt{7+y} = 6-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6-y} = 4-3 \\ 4\sqrt{7+y} = 1-2y \end{cases}$$

$$1-2y \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5}{2} - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3 \\ 6-y = y^2-6y+9 \\ 8 \leq \frac{7}{2} \\ 26+26y = 4y^2-4y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-5y+3=0 \\ y \in 3 \\ y \leq \frac{7}{2} \\ 4y^2-20y-15 \geq 0 \end{cases}$$

вероятно не существует

$$\begin{cases} y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5}{2} - \sqrt{10} \\ \sqrt{21} = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25-13=12 \\ y = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25-13=12 \\ 4y^2-20y-15=0 \\ \Delta = 2500+1500=4000 \\ \sqrt{4000} = 20\sqrt{10} \\ y = \frac{20 \pm 20\sqrt{10}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

Ответ:  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7. Пусть  $a_n = a_1 + (n-1)d$  — арифметическая прогрессия, тогда

$$a_3 = a_1 + 2d = 3(x+1)$$

$$a_5 = (x(x+2))^2 = a_1 + 4d$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$a_5 = x^2(x+2)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^4 + 4x^2(x+1) = x^4 +$$

$$\frac{a_3 + a_9}{2} = \frac{3x^2 + 3x + 3}{2} = a_1 + 5d = x^4 + 4x^2(x+1) + 5d$$

$$d = \frac{3x^2 + 3x + 3 - 2x^4 - 8x^3 - 8x^2}{2} = \frac{-2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 3x + 3}{2} \quad (1)$$

$$a_9 - a_5 = 4d = \frac{3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2}{2} = \frac{-4x^4 - 16x^3 - 20x^2 + 6x + 6}{2} \quad (2)$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1$$

$$-x^4 + x^3$$

$$3x^3 + 3x^2$$

$$-3x^3 + 3x^2$$

$$-2x - 2$$

$$-2x - 2$$

$$0$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$

$$4 = 2 + 2 = 3$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$$

$$x^3+3x^2-2 \quad | \quad x+1$$

$$-x^3+x^2$$

$$2x^2-2$$

$$-2x^2+2x$$

$$-2x-2$$

$$-2x-2$$

$$0$$

$$\Rightarrow x = -1; \quad -1 \pm \sqrt{3}$$

$$x = -1: \quad a_3 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_9 = 3$$

$$d = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -1$$

$$a_9 = -1 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 3 \quad \checkmark$$

$$a_2 = 2$$

$$a_1 = x = \sqrt{3} - 1$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (x(x+2))^2 = 4$$

$$a_5 = ((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1))^2 = 4$$

$$d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_9 = 3(x(x+2))^2 = 4$$

$$a_9 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(3+1-2\sqrt{3}) = 12-6\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3}-4+8 = 6\sqrt{3}+4$$



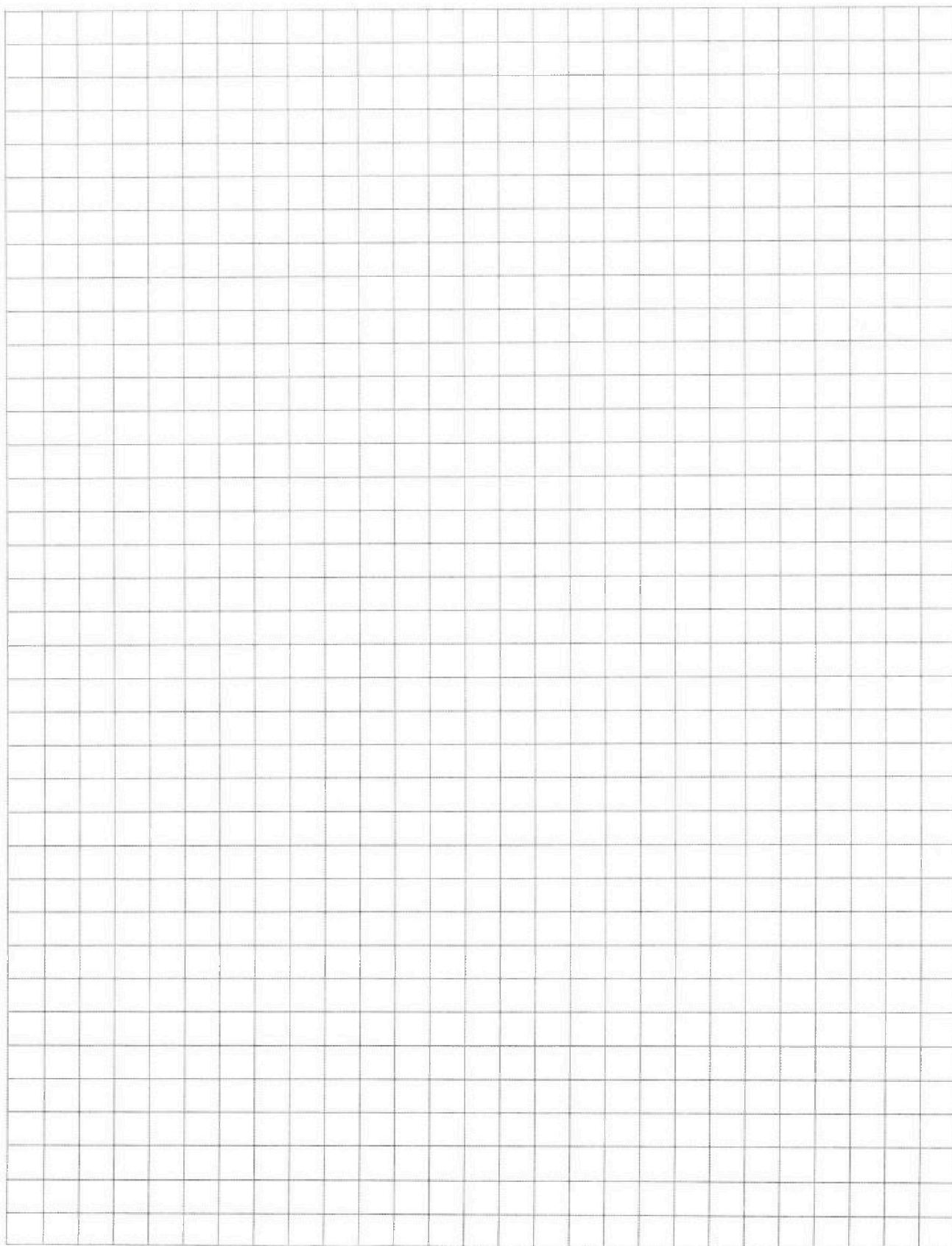


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13) A = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - 9(m+n)}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)(m+n-9)}{(m+n)^2}$$

$$B = mn(m+n) - 3mn = mn(m+n-3)$$

2кл. когда  $A = 759^2$   
 $B = 73p^2$ , тогда раскладываем A:

$A = (m+n)(m+n-9)$ , заметим, что  $m+n \equiv m+n-9 \pmod{9}$ ,  
знаем, если  $m+n \equiv 3$ , то  $m+n-9 \equiv 3$ ,  
если  $m+n \equiv 9$ , то  $m+n-9 \equiv 9$

знаем, если  $mn \equiv 3$  (500:  $m+n \equiv 3$ ), тогда

2-ой множителем  $mn \equiv 3$  ( $m+n-9 \equiv 3$ ), тогда

$A = 759^2 \equiv 9$ , знаем  $9^2 \equiv 3 \Rightarrow 9 = 3$  (9 - простое число)

тогда  $A \equiv 75 \cdot 9 \equiv 27 \Rightarrow 600 : m+n \equiv 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow m+n-9 \equiv 9 \Rightarrow A = 75 \cdot 9 \equiv 87$ , но  $75 \cdot 9 \not\equiv 87$   
 $\frac{75 \cdot 9}{25 \cdot 3}$

$\Rightarrow$  перебираем

2кл. когда  $A = 73p^2$ , раскладываем A:  
 $B = 759^2$

$$A = (m+n)(m+n-9) = 73p^2 > 0 \Rightarrow m+n > 9, \text{ знаем, } (1) : m+n-9 = 73 \text{ тогда } B = mn(m+n-3) =$$

- (1)  $m+n-9 = 73$
- (2)  $m+n-9 = p$
- (3)  $m+n-9 = p^2$
- (4)  $m+n-9 = 73p$
- (5)  $m+n-9 = 73p^2$

- (1)  $m+n = 73$
- (2)  $m+n = p$
- (3)  $m+n = p^2$
- (4)  $m+n = 73p$
- (5)  $m+n = 73p^2$

(2):  $m+n = 73$ , тогда  $B = mn(m+n-3) = mn \cdot 70 = 759^2$   
 $\Rightarrow 9 : 2 \Rightarrow 9 = 2$ , тогда  $m \cdot n \cdot 202 \cdot 300 \Rightarrow mn = 30$

$$\begin{cases} m+n = 73 \\ mn = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 70 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m = 70 \\ n = 3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &= \sqrt{324 + 900 + 2 \cdot 78 \cdot 30 \cdot \frac{7}{9}} = \sqrt{324 + 900 + 720} = \\ &= \sqrt{900 + 444} = \sqrt{7344} = 2\sqrt{336} = 4\sqrt{84} = 8\sqrt{21}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21}$$

$$\text{Ответ: } 8\sqrt{21}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$49x^2 - 40xy^2 + 96y^2 + 15y - 45 = 0$$

$$-76 + 560 \quad a - b + 5 = 2ab$$

60

$$-76 + 560 = 60.$$

$$4 - 49 = 24y - 24x + 6x$$

$$\sqrt{21}x(2\sqrt{6-x} - 1) = 5 - \sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{a-b} + a + b - 2 = 2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a-b} + \sqrt{a}(a-b) + \sqrt{b}(a-b)$$

$$\sqrt{21}x - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{a-b} + 2 = \sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a-b})^2 + 2\sqrt{a-b} + 4 = ab$$

$$(\sqrt{a-b} - \sqrt{ab}) + (\sqrt{a-b} - 1) = 2\sqrt{ab}$$

10

$$\sqrt{ab}(\sqrt{a-b} - \sqrt{ab}) + (\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} - 1) = 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a-b})(\sqrt{b} - \sqrt{a} + 1)$$

$$4(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b} - 1)$$

$$(\sqrt{a-b} + 1)(\sqrt{a-b} - \sqrt{ab}) - (\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} - 1) = (\sqrt{a-b} - \sqrt{ab} + 1)(\sqrt{a-b} - \sqrt{ab} - 1) = 0$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{b} - \sqrt{a} + 1 = 0$$

$$6 - x + 1 + 2\sqrt{6-x} - x = x + 1$$

$$\sqrt{7-x} - \sqrt{6-x} + 2 = 0$$

$$\sqrt{6-x} = x - 3$$

$$6 - x = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x - 2 = 25 - 49 = 16 \quad \text{---}$$

$$7 + x + 4 + 4\sqrt{7-x} = 6 - x$$

$$4\sqrt{7-x} = 7 - 2x$$

$$16 + 16x = 7 - 4x + 4x^2$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

60

$$D/4 = 200 + 150$$

$$D/4 = 200 + 60 = 260$$

$$25 - 72 = 73$$

$$\frac{70 \pm 4\sqrt{26}}{4}$$

$$x \geq \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2} \leq$$

$$\frac{70 \pm \sqrt{26}}{4} \leq 8$$

$$\frac{5 \pm 2\sqrt{70}}{2} = 2.5 \pm \sqrt{70} \leq \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\sqrt{70} \leq 7 - x$$

$$2 \pm \sqrt{70} \leq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{70} \leq 0$$

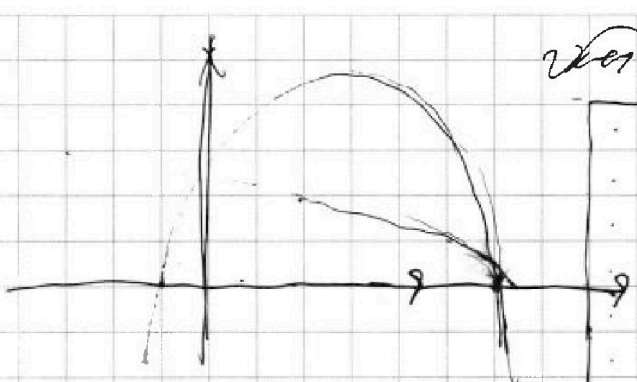


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{6x} - \sqrt{6-2x} + 5 = \sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = 2 \cdot \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

→  $x \in [8; \frac{5}{2}] \uparrow$   
 $[\frac{5}{2}; 6] \downarrow$

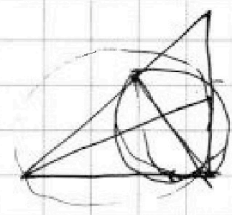
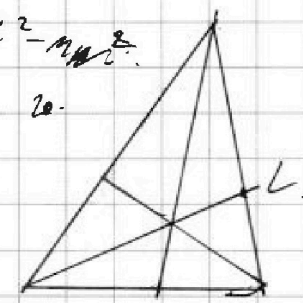
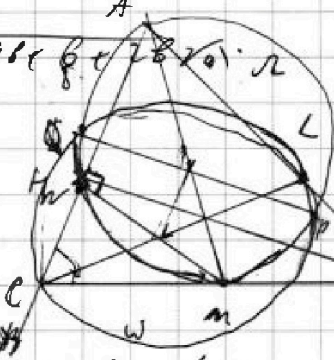
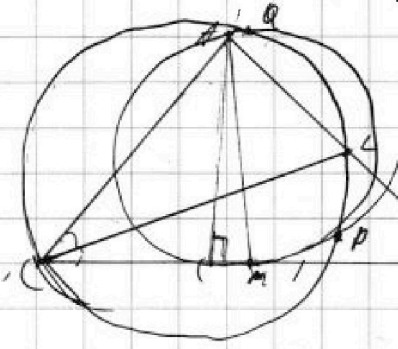
→  $x \in [\frac{5}{2}; 6] \downarrow$

→  $x = \frac{5}{2}$ ;  $\frac{10}{20} + \frac{10}{20} + 5 = \sqrt{20+5} = \frac{7}{2}$

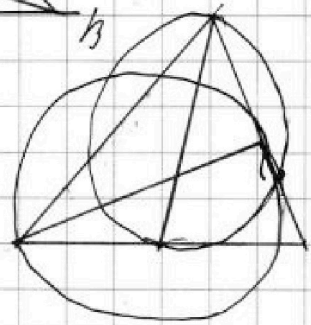
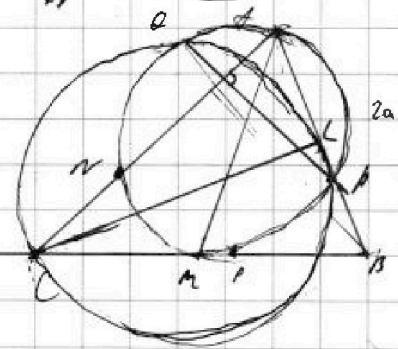
$9 \cdot 9 = 81$   
 $2\sqrt{6x} + \sqrt{6-2x} = 3\sqrt{6}$   
 $36 + 54 = 36 \cdot 54$   
 $90 = 1620$

4:

$\sqrt{a-b+5} = \sqrt{ab}$   
 $a + 2\sqrt{a-b+5} = ab + 6 + 2\sqrt{a-b+5}$



$LM \cdot LC = (LM \cdot (LM + AB))$   
 $BP \cdot PM = BP \cdot AB$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - 3xy - xy + 3y^2$

$|x - 3y| + |x - y| \leq 4$

$2 \leq \frac{x}{y} \leq 3$   
 $2 \leq 3y \leq \frac{x}{3}$

$3y - x + 3x - y \leq 4$   
 $2x + 2y \leq 4$   
 $y \leq 2 - x$

$3y \geq 2 \leq \frac{x}{3}$

$9y + 26 = 9x$   
 $9 + 2\sqrt{9}$

$3y - x + y - 3x = 4y - 4x \leq 4$   
 $y - x \leq 1$

$\sqrt{9x^2 + 16y^2}$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$3x \geq y$   
 $3x - 7 \leq y$   
 $3x \leq y$   
 $y \leq 2x - 1 + 3x$

$9x + 26 = 9x$   
 $9 + 2\sqrt{9}$

$3x \geq y$   
 $3x - 7 \leq y$   
 $3x \leq y$   
 $y \leq 2x - 1 + 3x$

$x \geq 0$   
 $y \geq 0$

$x - 3y = a$   
 $3x - y = b$

$\frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$   
 $a - b = -2(x+y)$   
 $\frac{-(a-b)}{2} = x+y$   
 $= -\frac{1}{2}(a-b) + \frac{a+b}{2} = \frac{3b-a}{2}$   
 $= \frac{6b-6a+ab}{2} = \frac{7b-5a}{2} \leq \frac{7|b|+5|a|}{2} \leq \sqrt{\frac{49b^2+25a^2}{2}}$   
 $= \sqrt{\frac{9+225}{4}} = \frac{15}{2}$

$A = m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2$   
 $B = m^2 + mn + n^2 = (m+n)^2 - mn$   
 $A - B = mn$   
 $A - B = mn(m+n-1)$

$k = 7 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 28$   
 $a = 3$   
 $b = 1$   
 $|a| \leq 3$   
 $|b| \leq 1$   
 $\sqrt{49b^2 + 25a^2} = \sqrt{49 + 25 \cdot 9} = \sqrt{2500} = 50$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m+n)(m+n-9) = 23p^2$$

$$B = m(n)(m+n-3) = 75q^2$$

$$m+n-3 = 5, \quad m+n = 25q^2$$

$$m+n = 8, \quad m+n = 25q^2$$

$$6^2 - 86 + 75q^2 = 0, \quad 6q = 64 - 75q^2 = 0$$

$$m+n = \frac{4 \pm 2}{2} = 6; 2, \quad q = 2, \quad n = 4$$

$$6 \cdot 2(5) = 60 - p$$

$$m+n = 3675$$

$$m+n = 13$$

$$m+n = p$$

$$m+n = p^2$$

$$m+n = 23p$$

$$m+n = 73p^2$$

$$(2m+n)(m+n)(2m+n+5)(2m+n+7) = 0$$

$$2 \cdot 3 - 7 = 5$$

$$m+n = 5 = 750$$

$$m+n = 30$$

$$m+n = 73 \Rightarrow 20:3$$

$$m+n = 30$$

$$p(p-9) = 13p^2$$

$$p^2 - 9p = 13p^2$$

$$9p = 12p^2$$

$$p^2(p^2-9) = p^2-9p^2 = 73p^2$$

$$p^4 = 22p^2 \Rightarrow p^2 = 22 - p$$

$$73p(13p-9) = 269p^2 - 217p = 13p^2$$

$$756p^2 = 217p$$

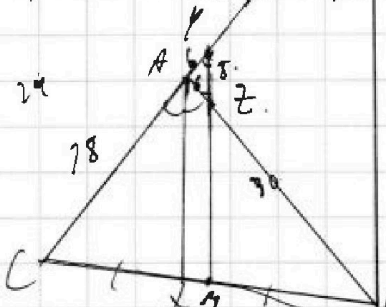
$$72p = 9$$

$$p = \frac{27}{756} \quad \checkmark$$

$$m+n = 73p^2(73p^2-9) = 269p^2 - 217p^2 = 73p^2 \quad |:p^2$$

$$20 \cdot 3(20+3-3) = 300 = 75 \cdot 4 = 300 \quad \checkmark$$

$$p^2 = \sqrt{\frac{27}{756}} \quad \checkmark$$



$$36 + 36 - 64 = \frac{?}{9}$$

$$\frac{72 - 64}{9} = \frac{8}{9}$$

$$329 + 900 + 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot 28 \cdot 30 = 444$$

$$= 324 + 900 + 120 = 2134$$

$$672 \cdot 2 = 336 \cdot 4 = 84 \cdot 76 = 27 \cdot 64 \Rightarrow AC = 8\sqrt{27}$$

$$\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \quad \sqrt{4x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = \sqrt{6+5x-y^2}$$

$$x^2 + 5x^2 - \sqrt{6-y} = 49 - \sqrt{6-y} + 5y^2$$

$$y^2 - 5y + \sqrt{6+5x-y^2} = \sqrt{6-y} + 5$$

$$\sqrt{6-y} - \sqrt{6+5x-y^2} = \sqrt{6-y} + 5$$

$$(y+1)(y+6) = 6 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 46 = -116$$

$$y+1+6-y = 6+5x-y^2+25-20\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$8 - 20\sqrt{6+5x-y^2} = 0$$

$$* -2\sqrt{6+5x-y^2}$$