



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тіүсінші q -шам ардым. прогрессия

$$\text{Төзің} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2q \\ 3x^2 = (x^2 + 2x)^2 + 4q \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4q = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 \\ 2q = (x^2 + 2x)^2 - 3x - 3 \end{array} \right| \cdot 2$$

$$3x^2 - (x^4 + 4x^3 + 4x^2) = 2(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - 6x - 6$$

$$\cancel{2x^4 + 4x^3}$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

(Тіогодаралы корень $x = -1$)

$$1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ - x^4 - x^3 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ - 3x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x - 2 \\ - 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad |_{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) \text{ Тут еще корень } x = -1$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \\ -1 + 3 - 2 = 0 \\ \hline x^3 + x^2 \\ \hline -2x^2 - 2 \\ \hline 2x^2 + 2x \\ \hline -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = (x+1)^2(x^2 + 2x - 2)$$

$$x^2 + 2x - 2$$

$$\begin{aligned} D &= 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2 \\ x_1 &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{3} \quad x_2 = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{Объем: } x_1 = -1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = \sqrt{3} - 1, \quad x_3 = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Логарифмы на равенство

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} + \quad \begin{matrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{matrix} x + 8y \leq 9 \\ x + y \leq \frac{3}{2}$$

$$3x - y = a \Rightarrow 3y = 9x - 3a$$

$$x - 3y = -8x - 3a$$

$$3x - y - (3x - y) =$$

$$= -8x - 4a = -4$$

$$-1 \leq a \leq 1$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{3}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{12}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad 8x + 4y = 8 \cdot \frac{3}{4} + 5 = 11$$

$$y = \frac{5}{4}$$

~~8x - 8y = 8x~~

$$+ 18x - 6y = 8x - 4y = 6x - 12y + \\ + 2(x - 2y)$$

$$3(2x - 3y) + 2(3x - y) =$$

$$= 3x - 9y + 6x - 2y = 9x - 11y$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3 \quad x - 3y = a \in \{-1, 5; 3\} \\ -1 \leq 3x - y \leq 1$$

$$3x = 3a + 8y$$

$$8y + 3a - 1 \leq 8y + (7,5; 9) \leq$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Будем сокращать выражения из систем

(2) и вычитать \Rightarrow

Очевидно, что мы можем складывать и вычитать,

$$\Rightarrow x-3y + 3x-y = 4x-4y$$

сумма очевидна, что сумма < max

$$+ \begin{matrix} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{matrix} = \begin{matrix} -4 \leq 4x-4y \leq 4 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{matrix} \quad (1)$$

* для 2 способ

$$-3 \leq x-3y \leq 3$$

~~$-3 \leq -2x-2y \leq 3$~~

$$-1 \leq 3x-y \leq 1$$

$$15 \geq x+y \geq -1,5 \quad (3)$$

~~1) (1) + 2) (2) * 2~~

$$6 \cdot (3) + 2 \cdot (1)$$

$$-2 \leq 2x-2y \leq 2$$

$$-8 \leq 8x+8y \leq 8 \cdot 11 \Rightarrow$$

~~$4x+4y \leq 44$~~

$$8x+4y \leq 8 \cdot 11$$

и при $x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$ это значение

при этом $|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = \left| -\frac{12}{4} \right| = \left| -3 \right| = 3$

$$|3x-y| = \left| 3 \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \leq 1$$

Все верно! Все получилось

Ответ: $\max(4y+8x) = 8 \cdot 11$

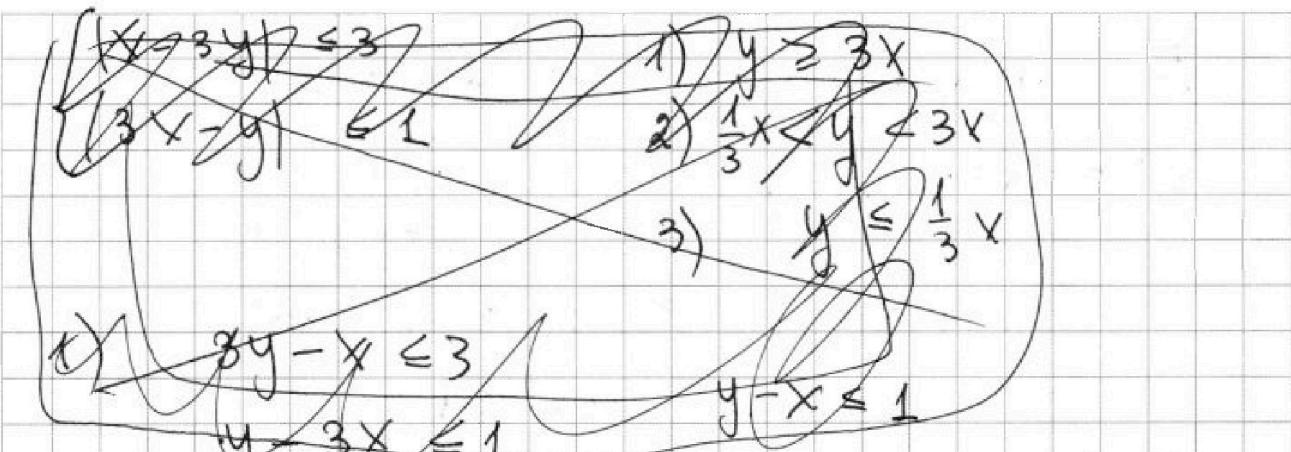


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Докажем, что } -3 \leq (x-3y) - (3x-y) \leq 3$$

пусть $(x-3y) = a$ $\in [-3, 3]$ если $m.k (x-3y) \in [-1, 1]$

$a < 2$, то имеем доказать (мы рассматриваем a , при котором $k \rightarrow \text{мал}$)

~~$$3x = 3a + 3y \quad 3x = 9y + 3a$$~~

~~$$3x - 3y = 3a \leq 8y + 9$$~~

$$y - 3x = k = (x-3y) - (3x-y) =$$

$$= (x-3y) + (y-3x) =$$

$$y - 3x = -8a - 3a \leq -8a - 3a \leq -8a - 6$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$-8a - 9 \leq y - 3x \leq -8a - 6$$

$$k \leq -8a - 3 \Rightarrow \text{мы хотим}$$

доказать, что если $y < -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}$, то
 $k \leq 3$ всё равно.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y < -\frac{3}{4}, \text{ но } 6x + 4y \leq 3$$

$$x - 3y \leq 3 - \frac{9}{4}$$
$$x - 3y < \frac{3}{4}$$

~~$$3x - 3y \leq 3$$~~

$$y \geq \frac{3}{4}$$

~~$$-3x + 3y \leq -3 - \frac{3}{4}$$~~

$$x < \frac{3}{4}, y \geq \frac{3}{4}$$
$$8x + 4y \leq 6$$

$$-3x + 3y \leq 1$$

$$\leq 3x + 3y \leq \frac{3}{4}$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$3y - 3 \leq x - 3y \leq 3 + 3y$$

$$x \leq 3 - 3 \cdot \frac{3}{4}$$

$$x < \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 4y \leq 8 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= 6 - 3 = 3, \text{ а это пока-} \\ \text{зано, когда } x = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Та же укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = \\ = (m+n-9)(m+n)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n) - 3mn = \\ = mn(m+n-3)$$

$$\Rightarrow 5q^2 = 3 \cdot (5q)^2$$

Заметим, что $m+n-9 \geq 1 \Rightarrow m+n-3 \geq 7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m+n \geq 10$

Заметим, что A не может быть 28,
 т.к. если A делится на 3, значит $A \div 3$,
 и если $m+n \div 3$ или $m+n-9 \div 3$, а если $(m+n) \div 3$, то и

$m+n-9 : 3$, т.к. $m+n-9 \equiv m+n \equiv 0$,
 аналогично и если $m+n-9 \equiv 0 \Rightarrow 3 \mid m+n-9$

и $A \div 9$, т.к. $q^2 = 3^2$, т.к.

$75q^2 : 3$, а q -простое, единственное простое,
 которое $: 3 \Rightarrow 3$, и q значит какая-
 ми из скобок $: 9$

$m+n-9 \equiv 0$, но и $m+n \equiv 0 \Rightarrow A : 3^4 \Rightarrow$
 $m+n \equiv 0 \Rightarrow m+n-9 \equiv m+n \equiv 0 \Rightarrow A : 3^4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A = 13p^2, B = 75q^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ваше тело, что у B) 5 простого делителя,
~~а у A~~ \exists прощайтесь делители,
~~значит у B~~ такая-то скобка a - простое
~~число~~ (~~но если нет, то вдвое скобок ≥ 2~~
 \Rightarrow делит \Rightarrow всего ≥ 26)
 Аналогично для A

$$(m+n-9)(m+n) = 13q^2$$

Случай:

$$1) \begin{cases} m+n-9 = 13q^2 \\ m+n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m+n-9 = 1-9 = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{против.} \end{matrix}$$

$$2) \begin{cases} m+n-9 = 13q \\ m+n = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m+n-9 = 13m+13n \\ 12m+12n+9=0, \\ m+n > 0 \Rightarrow \text{против.} \end{matrix}$$

$$3) \begin{cases} m+n-9 = 13 \\ m+n = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m+n = 22, \\ \text{но } 22 - \text{не } q^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{против} \end{matrix}$$

$$4) \begin{cases} m+n-9 = 1 \\ m+n = 13q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m+n = 16 \text{ и } 10 \neq 13 \\ \Rightarrow \text{против.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} m+n-9 = q \\ m+n = 13q \end{cases} \Rightarrow 13m+13n - 117 = m+n \\ 12(m+n) = 117 \Rightarrow$$

\Rightarrow таких пар немногие:

Однако: таких пар немногие

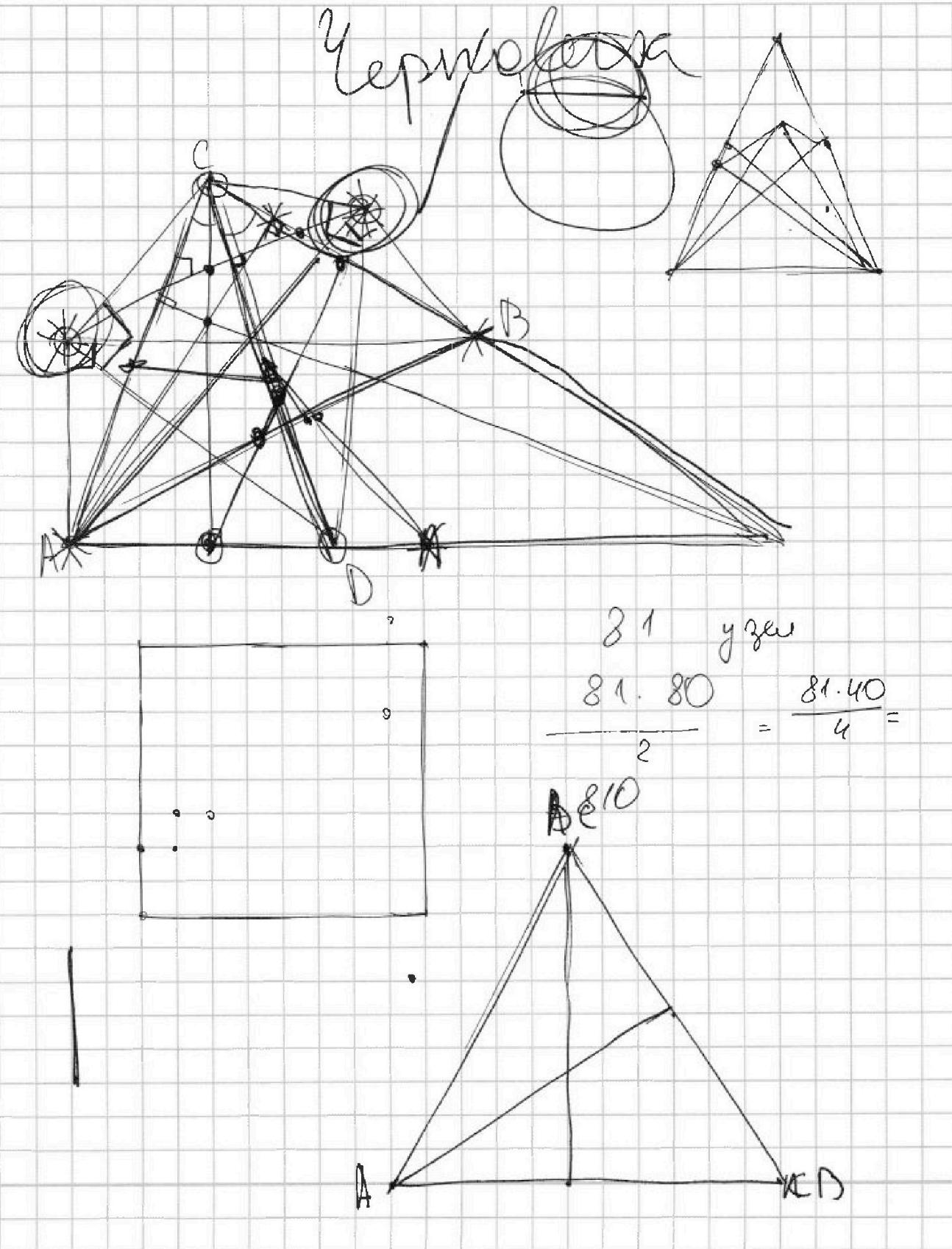


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



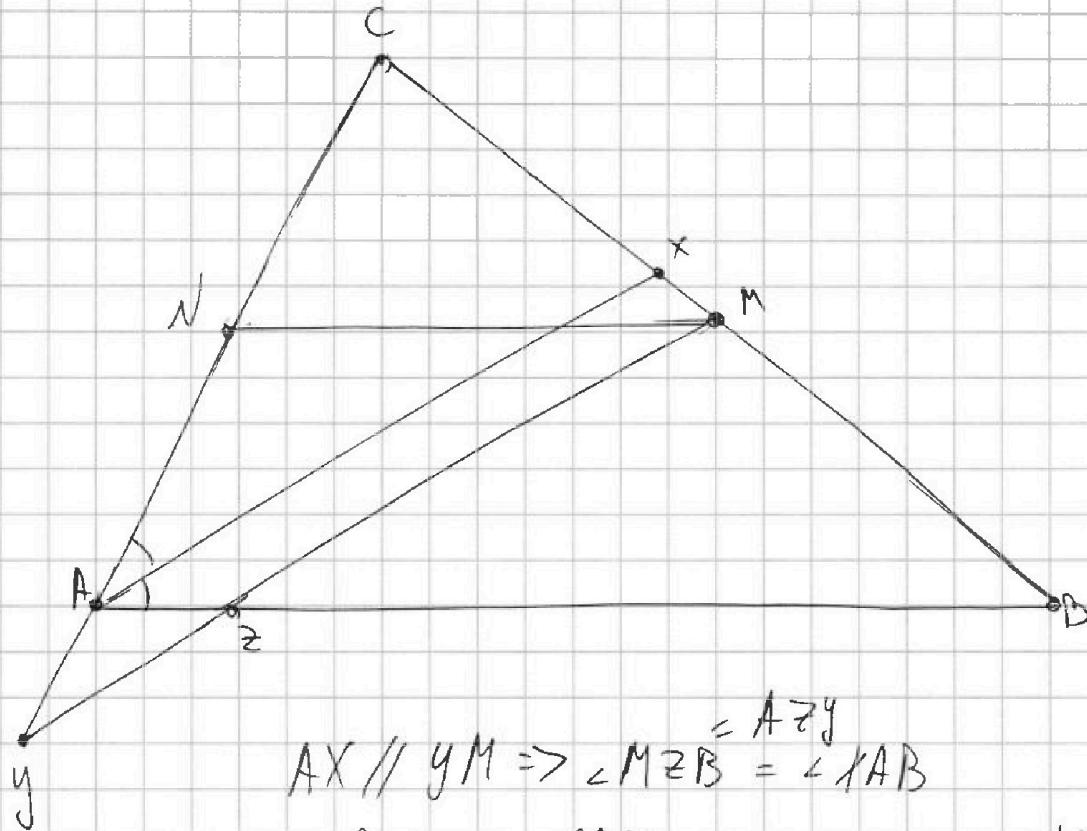


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чёрновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AX \parallel YM \Rightarrow \angle MZB = \angle CAB$$

$$\begin{aligned} \angle CYM &= \angle CAZ & \Rightarrow \angle AYZ = \angle AYB \\ &= \frac{\angle CAB}{2} & \Rightarrow AYZ = 15^\circ \end{aligned}$$

получаем $NM \parallel AB$, NM - пр. лин $\Rightarrow NM = \frac{1}{2} AD$

$$AZ = AY = 6 \quad AN = \frac{1}{2} AC = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow YN = AY + AN = 9 + 6 = 15$$

$$\triangle YAZ \sim \triangle YNM \Rightarrow \frac{YU}{AY} = \frac{NM}{MAZ}$$

$$\begin{aligned} NM &= \frac{NY}{AY} \cdot AZ = \frac{15}{6} \cdot 6 = 15 \Rightarrow \\ \Rightarrow AB &= 30 \quad (\angle CAB = 2 \alpha) \end{aligned}$$

$$\cos \angle AYZ = \cos \angle L = \frac{\frac{1}{2} YZ}{AY} = \frac{9}{6} = \frac{2}{3}$$

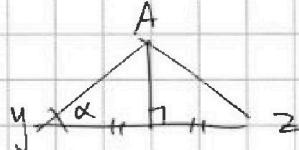


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. $\Delta AYZ - P/5 \Rightarrow$ не \Rightarrow бес , з



$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

Th cos gur ABC, AC = 18, AB = 30

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2ABAC \cos 2\alpha =$$

$$= 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot -\frac{1}{3} = 18^2 + 30^2 + 4 \cdot 30 =$$

$$= 4(9^2 + 15^2 + 30) = 4(81 + 225 + 30) =$$

$$= 4(336) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 21 = 8^2 \cdot 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21}$$

Объем: $BC = 8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad x_3 = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad \sqrt{13} < 5, \quad \sqrt{13} < \sqrt{25} \Rightarrow > 0$$

докажем, что $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6$, тогда и $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} < 6$,
м.н. второй < первого

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \vee 6$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6 \Rightarrow$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \vee 12 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1$ и x_2 подходит

$$\sqrt{13} \vee 7$$

ног 023

$$13 \vee 49$$

(и x_1 и $x_2 > 0$ это очевидно)

с

x_3 и x_4 :

$$5 - 2\sqrt{10} \vee 0$$

$$5 \vee 2\sqrt{10}$$

$$27 \vee 4 \cdot 10, \quad 2\sqrt{10} > 5 \Rightarrow x_3 < 0 \Rightarrow$$

x_3 не подходит

$x_4 > 0$ очевидно

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \vee 6$$

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < 6 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{10} \vee 7$$

\Rightarrow

x_4 подходит

$$40 \vee 49$$

Ответ: пары (x, y) : $\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на это равенство:

$$\sqrt{x^4 + 5x^2 + \sqrt{5x}} = x^4 + 5x^2 + \sqrt{5x}$$

Заметим, что при $x > 0$ и $y > 0$,

и что все коэффициенты > 0 ,

и тогда $x^4 + 5x^2 + \sqrt{5x}$ — монотонно

возрастающая функция. ($x \in (0; +\infty)$)

И это очевидно, и докажем

$$f(x_1) = x_1^4 + 5x_1^2 + \sqrt{5x_1} \quad f(x_2) = x_2^4 + 5x_2^2 + \sqrt{5x_2}$$

предположим $x_1 > x_2$, хотим док-ть, что $f(x_1) > f(x_2)$

$$1. f(x_1) > f(x_2)$$

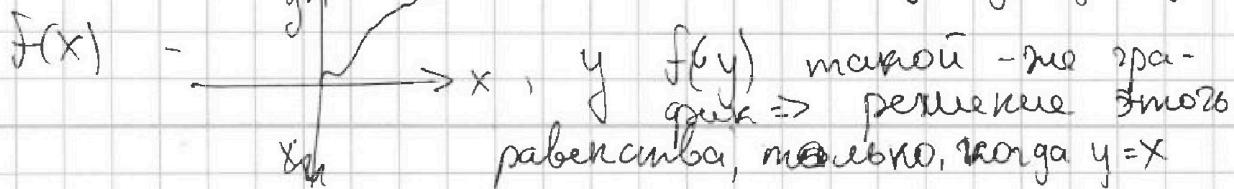
$$x_1^4 + 5x_1^2 + \sqrt{5x_1} > x_2^4 + 5x_2^2 + \sqrt{5x_2}$$

$$x_1^4 > x_2^4$$

$$5x_1^2 > 5x_2^2 \Rightarrow \sqrt{5x_1} > \sqrt{5x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

и при $x > 0$ $f(x) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{5x} \quad f(y) = y^4 + 5y^2 + \sqrt{5y}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

~~При x > 0~~
~~При x < 6~~
~~При 0 < x < 6~~

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3$$

$$-x^2 + 5x + 6 = 9$$

$$x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 25 + 12 = 37$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{37} + 5}{2}$$

$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2$$

$$7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$(x+1)(6-x) = \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + 5x + \frac{15}{4} = 0$$

$$x^2 - 5x - \frac{15}{4} = 0$$

$$\Delta = 25 + 15 = 40 = (2\sqrt{10})^2$$

$$x_1 = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \quad x_2 = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}$$

Теперь проверим 4 корня на ОДЗ:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проявляется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь рассмотрим первое равенство,
а подставившую его уравнение $y = x$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2 \sqrt{6+5x-x^2}$$

- $(x^2 - 5x - 6) \neq 0$, это корни по Th Виетса
6 и -1 $\Rightarrow -(x^2 - 5x - 6) = -(x-6)(x+1) =$
 $=(6-x)(x+1)$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2 \sqrt{(6-x)(x+1)}$$

Dg B: $-1 \leq x \leq 6$, но $x \geq 0 \Rightarrow$ корни
 $0 \leq x \leq 6$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 - 2 \sqrt{(6-x)(x+1)} = 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + (x+1) - 2 \sqrt{(6-x)(x+1)} + (6-x) = 2$$

$$((x+1) + (6-x)) = 7$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}) + (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = 2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = f$$

$$f + (f+1) = 2 \quad f^2 + f - 2 = 0$$

$$\text{По Th Виетса } f_1 = -2$$

$$f_2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в квадрате ABCD 25 узлов,
в квадрате DCGF Всег DC до узлов
в квадрате KFDG 25 узлов (без CB и FD) - 16 узлов

$$1 \text{ квадрат} C_{25} = \frac{25 \cdot 24}{8}$$

2 квадрат 25 · 20

в ABCD без AD = в DCEAG без DC, =
в KFDG без DG = 20 узлов

$$1 \text{ квадрат} = C_{20} = \frac{20 \cdot 19}{2}$$

$$2 \text{ квадрат} = 20 \cdot 20$$

$$3 \text{ квадрат} = 20 \cdot 20$$

$$\Sigma = 400 + 400 + 190 = 990 \text{ вариантов}$$

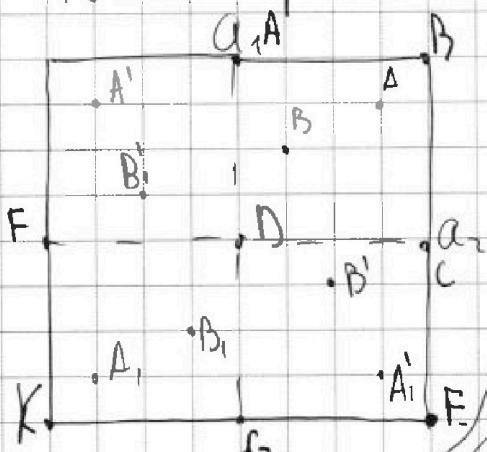
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на эту доску



а в это узлов $9 \cdot 9 =$
= 81 узел
Поглядим на сколько же можем
воздраин просто

заметим, что если покрасим в один
цвет, а раз замен покрасим отраженную
ей (снагада отразили оти A_1 , поменял A_2).
то при нове роме на то 180° все
покраси в том- же цвете (я хочу
поглядеть сколько все покраси, а
потом поглядеть на ч, но такие случаи,
яже в отраженных токи покраси и
тако же в A_2 , т.к. там- же случаи
как уче учитывали когда все покраси
одинаки) (для B и A , они отражены
все совпадают)

У нас есть вариантов воздраин 1 для
ку в квадрате $ABCD$ и еще 1
таки- же, 1 для в квадрате $A'B'C'D'$,
+ может же, 1 в $DC'EG$ и в $ABCD$, 1 в
 $AKFDG$ и мы получим все случаи
с возможностью гооборота, мы посчитаем
эти случаи

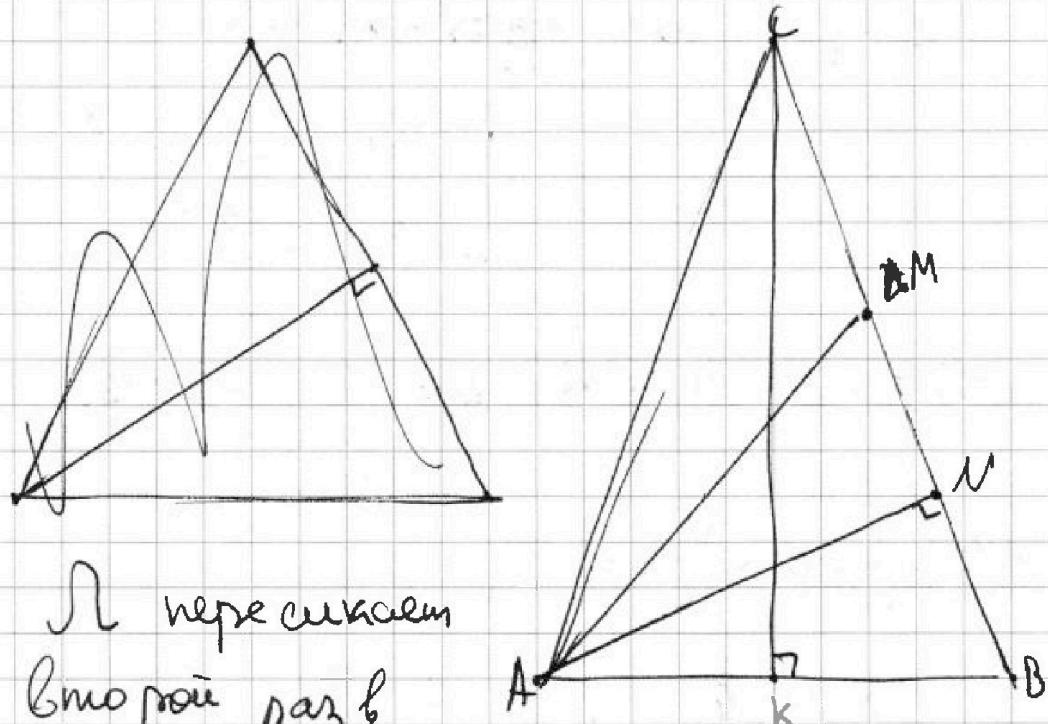


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



окр-ко $\angle N$ пересекает

BC второй раз

N , $\angle ANM = 90^\circ$, т.к. AM -диаметр \Rightarrow

$\Rightarrow AN$ - биссектриса

$$\angle ABC = \alpha \quad \cos \alpha = \frac{AB}{AC} = 1 \quad \sin \alpha = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5},$$

откуда ср нер к AB - моркак

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$= \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{2 \cos \alpha} =$$

$$= \frac{10}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{25}{3}, \quad BC = AC$$

$$\text{Отвем: } BC = AC = \frac{25}{3}$$

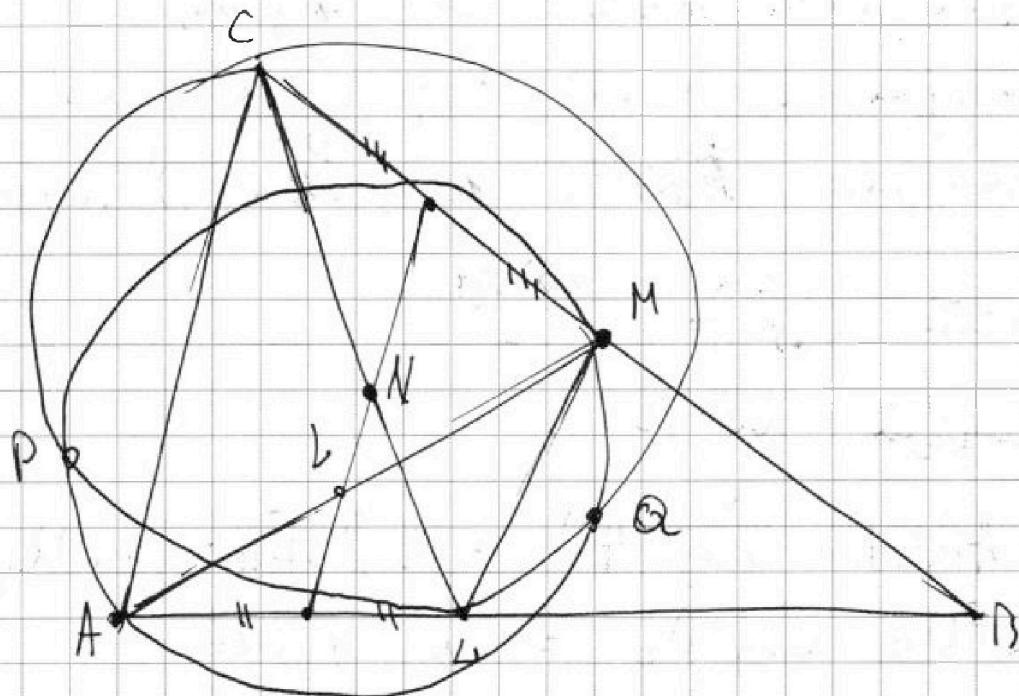


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



замечание, что окр-ные пересекаются
 са б морками P и Q , PQ -их
 падежи, $PQ \perp CA$, м.к. $PQ \parallel$ биссектрисе
 из B а также падежи Γ между
 центров $\Rightarrow CA \parallel$ между центров,
 N -середини CL проходит $l \parallel CA$ через
 N , l проходит через сер AL , м.к.
 это сп. или, все врез L -сер
 AM (L и N -центра окр-ней, $l \parallel LM$,
 м.к. это сп. или б $AML \Rightarrow ML \parallel AC \Rightarrow$
 ML -сп. или б $ABCD \Rightarrow L$ -сер $AB \rightarrow$
 \rightarrow $sABC$ - рд, м.к. биссектриса это
 мераана, ABC - р/д с основанием AB

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-\frac{9}{4} - y = -1 \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

Решение задачи

$\frac{36}{216}$
 $\frac{1}{108}$

$$-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} = 3$$

AC

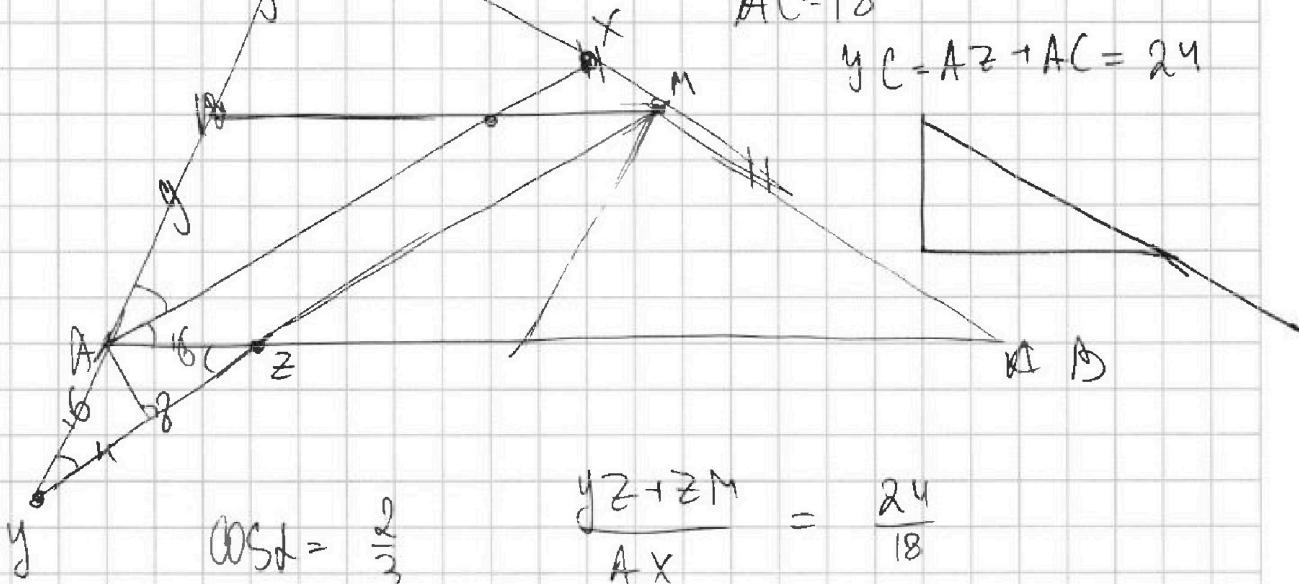
BC?

$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

$$AC = 12$$

$$YC = AZ + AC = 24$$



$$\cos \angle Y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{YZ + ZM}{AY} = \frac{24}{18}$$

$$\frac{6}{15} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 15$$

$$\cancel{\frac{336}{4}} \mid 3$$

$$\frac{336}{4} : 4 = 75 + 9 = \frac{84}{4} = 21$$

