



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}t + x + 4t^2 - 4 = 0$$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2$$

т. к. коэффициент  $a$  — данного  
многочлена второй степени  
равен 1, то  $b$  — коэффициент  $c$  —  
произведение корней, так как  
значит из условия коэффициент  
 $c$  — положительный

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$D > 0$$

$$16 - 4t^2 > 0$$

$$-4(t-2)(t+2) > 0 \\ t \in (-2; 2)$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$4(t-1)(t+1) > 0$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

возьмем пересечение:  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

Ответ:  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15)$$

т.к. ~~сумма~~  $a$  и  $b \in \mathbb{N}$ , то их разность

по модулю не больше суммы

и при этом либо  $a-b : 17$ , либо

$a-b+15 : 17$  и тем же не равняется 0

Рассмотрим все случаи:

$$1. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=-34 \end{cases}$$

$$a=3$$

$$b=37$$

$$2. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=-17 \end{cases}$$

$a$  - не натуральное  $a$  - не натуральное

$$3. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=17 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=34 \end{cases}$$

$$a=37$$

$$b=3$$

$$5. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=-17 \end{cases}$$

$$a=4$$

$$b=36$$

$$6. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=17 \end{cases}$$

$$a=21$$

$$b=19$$

$$7. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=34 \end{cases}$$

$a$  - не натуральное

$$8. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=51 \end{cases}$$

$$a=38$$

$$b=2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Варианты 14, 6, 8 не подходят

по условию  $(a-b)(a-b+15) = 17p^5$ ,

где  $p$  - некое простое число,

подходит вариант ~~4~~ 5:

$$(a-b)(a-b+15) = (1-36)(4-36+15) =$$

$$= -32 \cdot (-14) = 32 \cdot 14 = 2^5 \cdot 14$$

Ответ: 4, 36



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

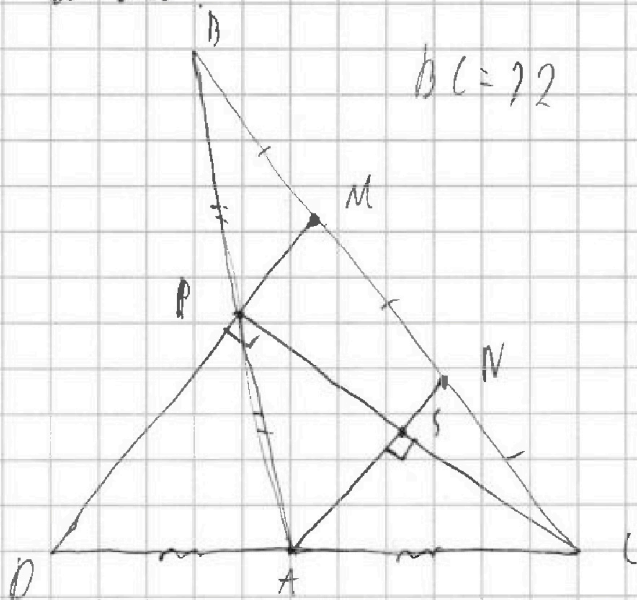
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:



$$BC = 12$$

$$AB = AC$$

Найти:

$\angle B$

Решение:

по теор. Фалеса

$$BP = PA \quad \text{и} \quad AN = NC$$

$\Downarrow$

$$AB = AC$$

$$0,5 AB = 0,5 AC$$

$\Downarrow$

$$AP = AN = AP$$

$\Downarrow$

$\triangle APC$  - прямоуголь-

ный.

т. к.  $NA \parallel PM$ , то  $\angle ASC = \angle APC$

$$= 90^\circ$$

$\triangle CAP$  равноб.  $\Rightarrow AS$  перпен-

дикулярна  $\Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$

теперь распишем теорему косинусов в

$\triangle ABC$ :

если обозначим  $AC$  за  $x$ , то:

$$12^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x \cdot 2x$$

$$144 = 6x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6x^2 = 144$$

$$x^2 = 24$$

$$x = 2\sqrt{6}$$

$$AB = 2x = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если взять такую рассадку, то в каждом ряду рост должен идти в порядке возрастания, причем в двух рядах 3 человека, а в одном 2 человека.

Если мы разобьем всею людей на одну пару и две тройки, то рассадка в порядке возрастания будет единственной, но так же мы ее можем выбрать пустую пару при помощи, то есть все способы  $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 3$

Ответ:  $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 3$

так же вариантов рассадки тройку будет 4 т.к. есть еще пустая пара. Значит способов всего  $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 4$  Ответ:  $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выбрать пару букв можно 3 способами и ещё можно переставлять ряды в 3 способами 2 способами, значит для пары и букв троек перестановок  $2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$

↓ 4

Всего способов  $\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{6} \cdot 4!$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*Дано:*



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Остальные деревья не могут  
быть соединены между собой т.к.  
может только две эти деревья  
будут образовывать компонент  
связности  $\Rightarrow$  граф не будет  
связным. Также же не  
может быть циклов т.к.  
существует единственный  
путь между любыми двумя  
деревьями, значит граф  
графа - дерево, значит  
между любыми деревьями  
1 условие построено 3 дерева  
значит всего деревьев:  $(3+4+5+7)-3$   
 $(3+4+5+7)-6+4=17$  деревьев  
Ответ: 17 деревьев

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к.  ~~$x, y \in \mathbb{N}$~~  и  $x, y \in \mathbb{Z}$ , то

поискоренные выражения так же  
целые, значит одно поискоренное  
выражение должно равняться 0,  
и другое 1, составим систему:

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - |x + y - 2| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x + y - 2 = 0$$

$$x = -y + 2$$

подставим в первое уравнение:

$$2(-y + 2) + 2y - (-y + 2)^2 - y^2 = 0$$

$$y + 2 - (y^2 - 4y + 4) - y^2 = 0$$

$$-2y^2 + 5y - 2 = 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$y_1 = -2$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \text{ не целое}$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -2 + 2 = 0$$

~~Вторая система:~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(-y+2) + 2y - (-y+2)^2 = y^2 = 0$$

$$4 - (y^2 - 4y + 4) - y^2 = 0$$

$$-2y^2 + 4y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 2$$

$$x_1 = -0 + 2 = 2$$

$$x_2 = -2 + 2 = 0$$

Вторая система:

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 = |x + y - 2| = 0 \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ x = 1 - y \end{cases}$$

$$1. 2(3-y) + 2y - (3-y)^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$6 - (y^2 - 6y + 9) - y^2 - 1 = 0$$

$$-2y^2 + 6y - 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$y_1 = 1 \quad x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$y_2 = 2 \quad x_2 = 3 - 2 = 1$$

$$2. \quad 2(1-y) + 2y - (1-y)^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$2 - (y^2 - 2y + 1) - y^2 - 1 = 0$$

$$-2y^2 + 2y = 0$$

$$y^2 - y = 0$$

$$~~y_1 = 0 \quad x_1 = 1~~ \quad y_1 = 0 \quad x_1 = 1$$

$$~~y_2 = -1 \quad x_2 = 2~~ \quad y_2 = 1 \quad x_2 = 0$$

Ответ:  $(2; 0)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; 1)$ ,  
 $(0; 1)$ ,  $(1; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b+15)(a-b)$$

предположим, что  $a-b$  и  $a-b+15$  :  $p$

тогда ~~каждый~~  $15$  :  $p$  и так же

для  $a-b$  либо простое, либо

кроме  $p$  делится только на  $17$ ,

значит есть такие варианты:

$$a-b=5 \Rightarrow a-b+15=20 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=3 \Rightarrow a-b+15=18 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=5 \cdot 17=85 \Rightarrow a-b+15=100 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=3 \cdot 17=51 \Rightarrow a-b+15=66 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=-5 \Rightarrow a-b+15=10$$

$$a-b=-3 \Rightarrow a-b+15=12$$

$$a-b$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

$$2x+2y-x^2-y^2=1$$

$$|x+y-2|=1$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = -1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 1$$

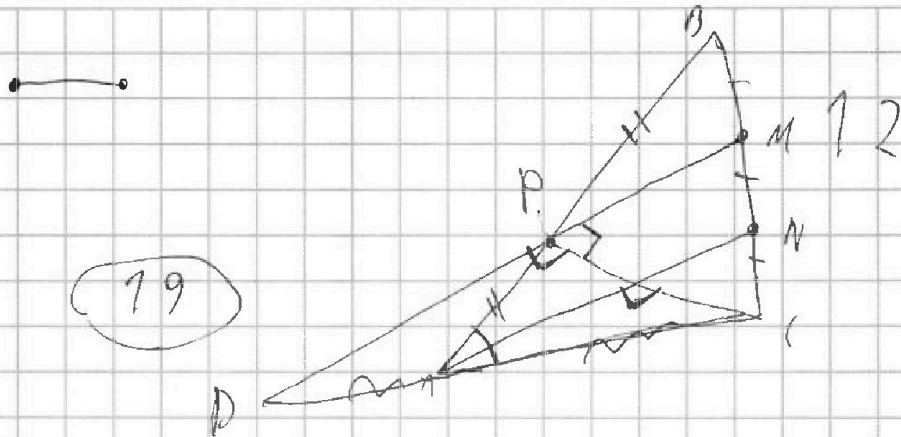


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



6

3

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

$$x + y - 2 \leq 1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2$$

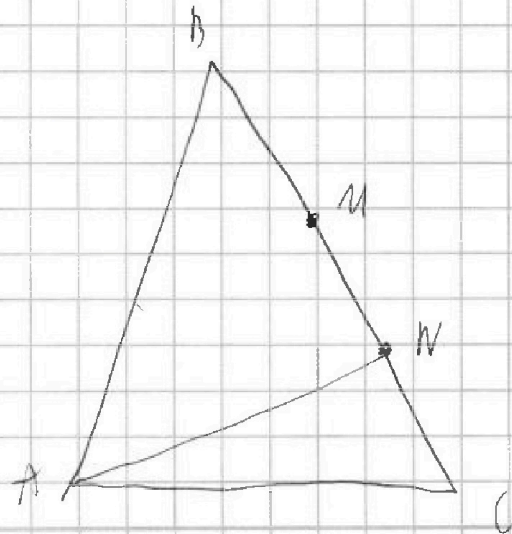
$$x + y \leq 3$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

~~$x^2 + y^2$~~

$xy$

$$x^2 + y^2 \vee 2x + 2y$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

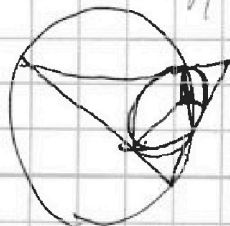
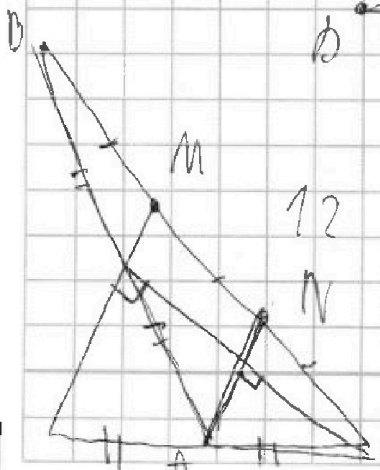
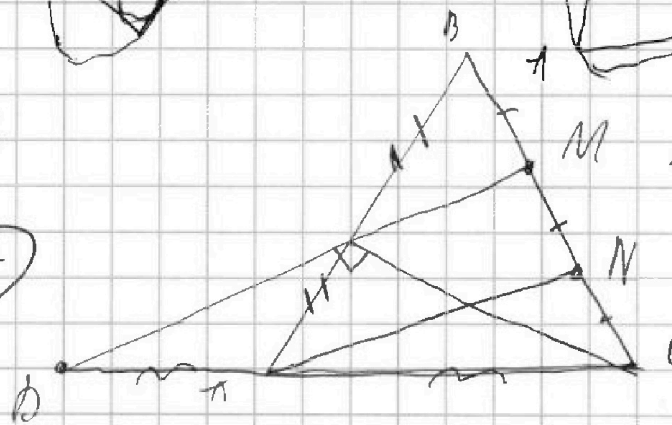
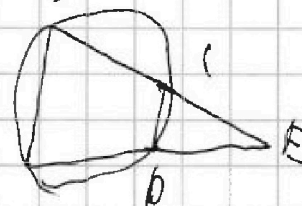
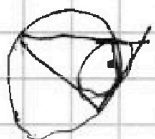
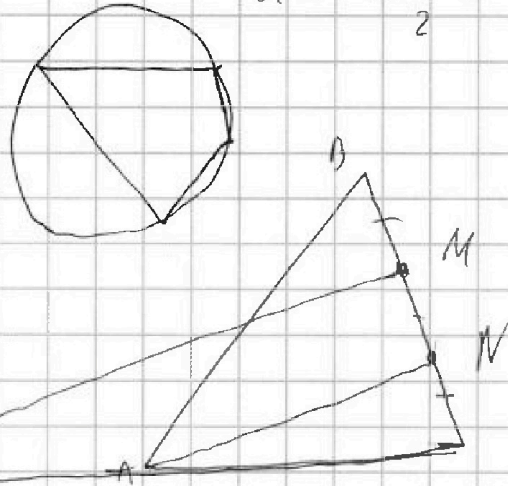
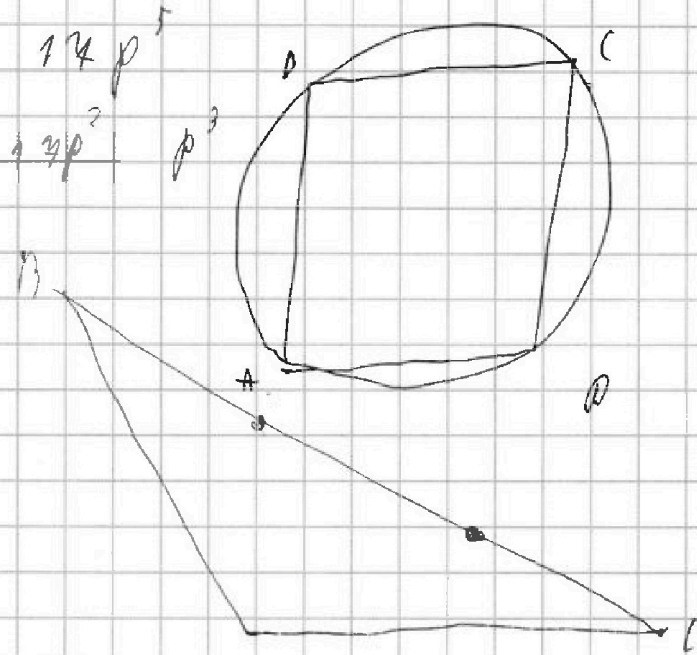
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 4a$$

$$a - b = k$$

$$a = \frac{4a + k}{2}$$



$$144 = 4a^2 + a^2 + \frac{1}{2} \cdot 2a^2 =$$

$$= 6a^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle (AN) x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4$$

1 3 5 7 11 13  
17 51 85 119

$$12t^2 - 4(4t^2 - 4) = 2$$

$$= -4t^2 + 16$$

$$119 \cdot 134 - 4t^2 + 16 > 0$$

$$68 \cdot 89 \quad 4t^2 - 4 > 0$$

85

$$4t^2 - 16 < 0$$

102 · 114 68

$$4(t-2)(t+2) < 0$$

51 · 64

17 · 32

$$(-2; 2)$$

51

34 · 49

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b)$$

$$(a-b+15)/(a-b) \Rightarrow 17 \text{ p } 5$$

$$a+b = 40$$

$$a+b = 40$$

$$a-b = 14$$

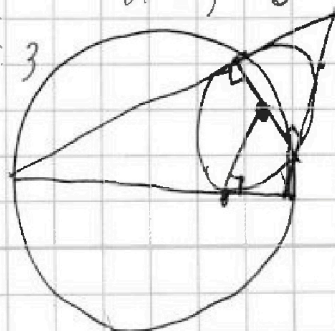
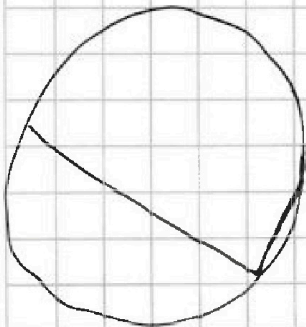
$$a-b = -34$$

$$a-b = 34$$

$$a = 3 \quad b = 4$$

$$a = 34 \quad b = 3$$

$$34 + 15 = 49$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1		
	3	6
	1	4
	2	5

	2
1	

~~$\binom{2}{9} \cdot \binom{3}{4} \cdot 3$~~

$$\binom{2}{8} \cdot \binom{3}{6}$$

$$\binom{3}{8} \cdot \binom{2}{5}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9.

