МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+2\sqrt{3}tx+4t^2-4=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2-2ab+b^2+15a-15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=12$, $\cos(2\angle \cancel{CEM})=-\frac{1}{4}$.
CAN

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED+DO$, если известно, что $BE=10$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Исходное уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}t \cdot x + (4t^2 - 4) = 0$ имеет $D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 4(4 - t^2) = 4(2-t)(t+2)$.

Т.к. D по условию > 0 (следует из наличия двух различных корней у уравнения), то $(2-t)(t+2) > 0$, $t \in (-2; 2)$.

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t + \sqrt{(2-t)(t+2)},$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{4(2-t)(t+2)}}{2} = -\sqrt{3}t - \sqrt{(2-t)(t+2)}.$$

Тогда произведение $x_1 \cdot x_2 = 3t^2 \cancel{-\sqrt{3(2-t)(t+2)}} =$

$= 3t^2 \cancel{- \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t} \cancel{+ \sqrt{3(2-t)(t+2)} \cdot t} - (2-t)(t+2) = 3t^2 + t^2 - 4 = 4(t-1)(t+1) > 0$,

$(t-1)(t+1) > 0 \Rightarrow \cancel{\rightarrow t >}$ $t < -1$ или $t > 1$. Тогда $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из условия $a+b=40$, a и b — натуральные. $(a-b)^2+15(a-b)=17p^5$, где p — простое.

Заметим, что разница $a-b \leqslant 38$, (т.к. иначе $b \leqslant 0$ из $a+b=40$) т.к. $a \leqslant 39$, а $b \geqslant 1$. Тогда $(a-b)^2+15(a-b)=(a-b+15)(a-b) \leqslant$ $\leqslant 38\cdot(38+15)=2014$. Тогда если p хотя бы 3, то $17\cdot 3^5=17\cdot 243>3400>2014$, то есть равенство точно не будет соблюдаться. Если $p=2$, то $17\cdot 2^5=$ $=17\cdot 32$.

Тогда если $a-b=k$, то уравнение имеет вид $k(k+15)=17\cdot(17+15)$.

Значит $k_1=17$, $k_2=-32$. В первом случае $a=b+17$, $a=40-b \Rightarrow b=\frac{23}{2}$ — не натуральное число. А во втором случае $a=b-32$, $a=-b+40 \Rightarrow b=\frac{72}{2}=36$ — подходит. Если $b=36$, то $a=40-36=$ $=4$.

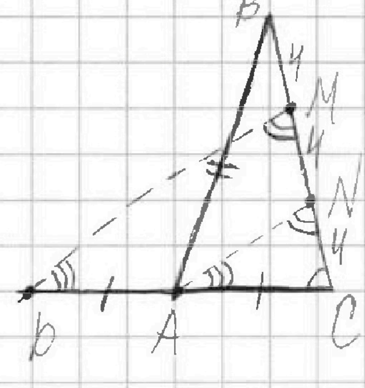
Ответ: $a=4$; $b=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Если $BM = MN = NC = \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$ и $AN \parallel MD$, то $\triangle NCA \sim \triangle MCD$ (все соответствующие стороны параллельны и соответ~~ственно~~ствующие углы равны) с коэффициентом $\frac{NC}{MC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow$ $CD = 2CA = AB$, $AC = \frac{1}{2}AB$.

~~Т~~ Тогда далее заметим, что в $\triangle ABC$ $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{CN} \Rightarrow AN$ — биссектриса $\angle BAC \Rightarrow \angle BAN = \angle CAN \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$.

Тогда по условию $\cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$.

Тогда по теореме косинусов

$BC^2 = 144 = AC^2 + \overset{AB^2}{(2AC)^2} - 2\cos(\angle BAC) \times$

$\times AC \cdot 2AC = 6AC^2$, $AC^2 = 24$, $AC = 2\sqrt{6}$,

$AB = 2AC = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Разберём два типа случаев: когда пустое место во втором горизонтальном ряду и когда оно в первом или третьем горизонтальном ряду.

Если оно во втором горизонтальном ряду, то вариантов для него 3, и для каждого всего 8! расположений учеников. Заметим, что из 6 (3!) расположений в ряду (без пустого места) ~~ровно одна~~ только ровно одно подойдёт. Такие рассуждения можно провести и для второго ряда без пустого места. То, как сидят два ученика в ряду с пустым местом, не имеет значения. Значит всего будет $3\cdot\frac{8!}{3!\cdot 3!}=\frac{8!}{12}$ способов для этого случая.

~~Для второго случая~~ расположений пустого места 6, расположений учеников 8!, также в каждом ряду без пустого места только 1 из 3! расположений трёх учеников будет подходить, и в ряду с пустым местом будет подходить только одно из двух расположений (т.к. они сидят подряд и это уже имеет значение).

Значит всего будет $6\cdot\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{8!}{12}$.

Значит всего существует $\frac{8!}{12}+\frac{8!}{12}=\frac{8!}{6}$ способов рассадить 8 школьников в классе так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Ответ: $\frac{8!}{6}$ способов.

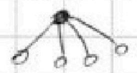
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Если из любой вершины графа можно добраться в любую другую, то граф связный, а если единственным способом — то без циклов. Значит дорожная сеть на острове является деревом (в последующем дороги — рёбра, деревни — вершины).

Значит в дереве есть вершины степеней 3, 4, 5, 7 и висячие (степени 1). Чтобы граф сохранил связность, нужно, чтобы вершины степеней 3, 4, 5, 7 были связаны (~~ни одна~~) (иначе образуются компоненты вида  или ). Тогда заметим, что всего рёбер в графе k (между вершинами степеней 3, 4, 5, 7) ~~+ (3+4+5+7)~~ − $2k$ (т.к. каждое ребро считается по 2 раза) $= 3+4+5+7-k = 19-k$ рёбер.

Если между вершинами 3, 4, 5, 7 хотя бы 3 ребра (и при этом не более 6 (6 в полном графе на четырёх вершинах)), то $19-2k$ (число рёбер к висячим вершинам, равное их количеству) $\geq \underbrace{19-2\cdot 6}_{=7}$ и $\leq \underbrace{19-2\cdot 3}_{=13}$ $\Rightarrow$ количество висячих вершин 7, 9, 11 или 13 (т.к. $2k$ всегда чётно, то $19-2k$ всегда нечётно), а значит всего вершин (деревень) 11, 13, 15 или 17.

Ответ: 11, 13, 15, 17.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

В выражении $\sqrt{2x-x^2+2y-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1$ $|x+y-2|\leq 1$, иначе оно не имеет смысла.

Т.к. x и y – целые, то $|x+y-2|$ тоже целое $\Rightarrow$ $x+y-2=1$, или $x+y-2=0$, или $x+y-2=-1$, $x+y=3$ или $x+y=2$, или $x+y=1$. Значит или (пусть без ограничения общности (так как выражение симметричное) $x\geq y$) $x=2$, $y=1$, или $x=3$, $y=0$, или $x=2$, $y=0$, или $x=1$, $y=1$, или $x=1$, $y=0$, или $y<0$, а $x\geq 0$ (при $y<0$ и $x<0$ первое слагаемое не имеет смысла).

~~Заметим, что все варианты, где или x, или $y \leq 2$ не подходят~~, т.к. или x, или $y > 2$ (по модулю) (и при этом второе ≥ 2 (по модулю)) не подойдут, т.к. $\sqrt{x(2-x)+y(2-y)}$ имеет смысл и $x(2-x)+y(2-y)\geq 0$

Для $x=2$, $y=1$ $\sqrt{4-4+2-1}+\sqrt{1-|1|}=1$ выполняется, для $x=3$, $y=0$ $\sqrt{6-9+0-0}+\sqrt{1-|1|}$ не имеет смысла, для $x=2$, $y=0$ $\sqrt{4+0-4-0}+\sqrt{1-|0|}=1$ выполняется, для $x=1$, $y=1$ $\sqrt{2-1+2-1}+\sqrt{1-|0|}=1+\sqrt{2}\neq 1$, для $x=1$, $y=0$ $\sqrt{2-1+0-0}+\sqrt{1-|-1|}=1$ выполняется.

Если же $x>0$, $y<0$, и $|y|$ меньше чем $|x|$ на 1, 2 или 3, то слагаемое $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}=\sqrt{x(2-x)+2y-y^2}$, ~~которое~~ имеет смысл только при $x\leq 2$ и тогда $|y|\leq 2-1=1$. Значит опять получаем варианты $x=2$, $y=\pm 1$ или 0; $x=1$, $y=0$ или -1; $x=0$, $y=-1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Но из этих случаев не были ещё разобраны только $x=2$, $y=-1$; $x=1$, $y=-1$ и $x=0$, $y=-1$.

Если $x=1$, $y=-1$, то $\sqrt{2-1-2-1}<0$ — не имеет смысла; если $x=2$, $y=-1$, то $\sqrt{4-4-2-1}<0$ — не имеет смысла; если $x=0$, $y=-1$, то $\sqrt{0-2-1-0}<0$ ~~также~~ не имеет смысла. ~~Также при $x=y=0$~~

Значит подходят только $x=2$, $y=1$ (и наоборот), $x=2$, $y=0$ (или наоборот), $x=1$, $y=0$ (или наоборот).

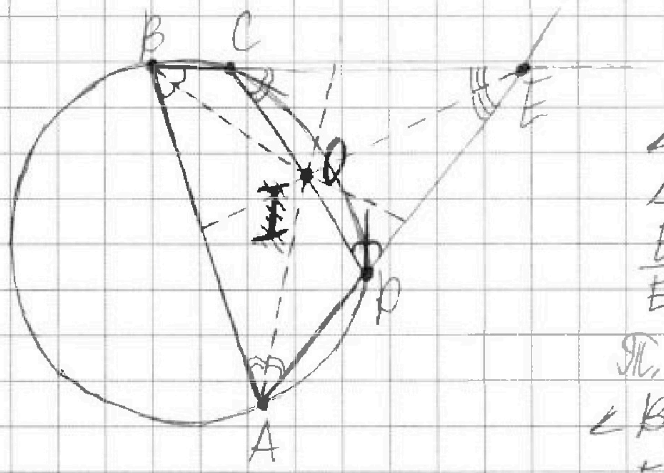
Ответ: $(2;1)$; $(1;2)$; $(2;0)$; $(0;2)$; $(1;0)$; $(0;1)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Если $ABCD$ — вписанный, то $\angle BAD = \angle DCE$ и $\angle ABC = \angle CDE \Rightarrow$ $\triangle BEA \sim \triangle DEC \Rightarrow$

$$\frac{ED}{EB} = \frac{EC}{AE} = \frac{CD}{AB} = \frac{ED}{10}.$$

Т.к. EO — биссектриса $\angle BEA$, то $\frac{ED}{DO} = \frac{EC}{OC} = \frac{ED\cdot AE}{10}\cdot\frac{1}{OC} = \frac{ED\cdot AE}{10\cdot OC}$,

$DO = \frac{10\cdot OC}{AE}$. Заметим, что ~~при росте AE~~ также $ED = \frac{10\cdot EC}{AE}$. Тогда их сумма равна $\frac{10\cdot(EC+OC)}{AE}$. ~~Также из степени точки E~~ $EC\cdot\cancel{EB}$ ~~где EC+OC ⇒~~

~~⇒ BE = 10 ⇒~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

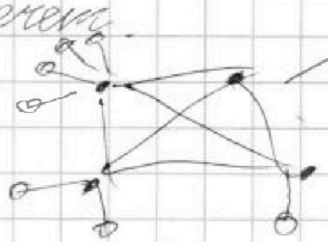
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$3+4+5+7^{-2k}$ — с висячими.

k дорог между данными четырьмя деревнями.

$3+4+5+7=19$ — нечет. 7 висяч.



~~1 висячая~~ ~~3 висяч.~~ ~~5~~, 7, ... 9, 11, 13.

Но в то же время 3, 4, 5, 7 должны ~~быть~~ связаны $\Rightarrow$ мин. 3 ребра (6 степеней) — ост. 13, макс. 6 ребер (12 степеней) — ост. 7.

~~5~~, ~~7~~, ~~9~~, 11, 13, 15, 17 деревень может быть.

№7

$$\underbrace{\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}}_{1}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1.$$

~~Если $x+y\geq 2$, то~~

$3\geq x+y\geq 1$

$|x+y-2|\leq 1.$

$$\sqrt{-(x^2-2x+1)+\cancel{1}-(y^2-2y+1)+1}+\sqrt{1}$$

~~0, 1; 1, 0~~

$(x+y)=1, 2$ или 3.

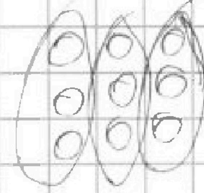
Если x (y) хотя бы 3 или -3, то $1<0$, $\sqrt{1}$ — не сущ. $\Rightarrow$ x или y (БОО x) ≤ 2 по модулю

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N4



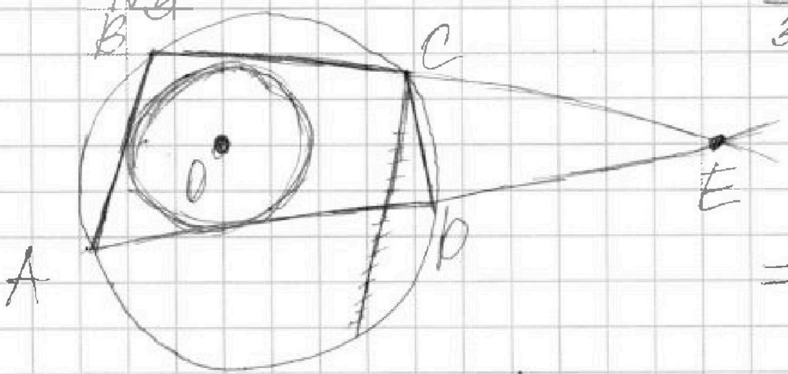
1 2 3 4 5 6 7 8

8 — не может сидеть в первом ряду, иначе 2 места свободно и всего 7 занято.

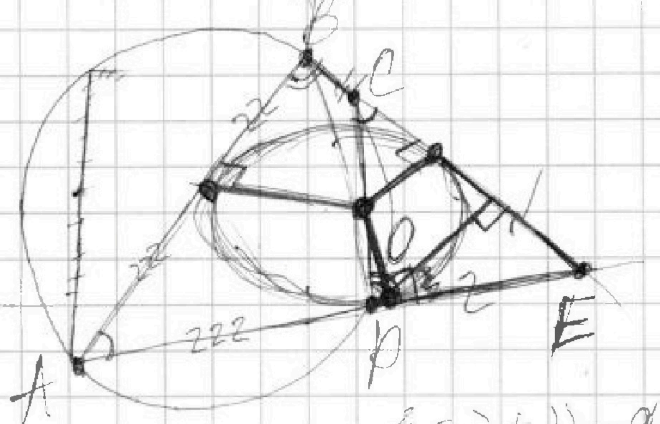
1 — не сидит в последнем ряду.

$$\frac{\cancel{9}\cdot 3\cdot 8!}{3!\cdot 3!} + \frac{6\cdot 8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{8!}{12} + \frac{8!}{12} = \frac{8!}{6}$$

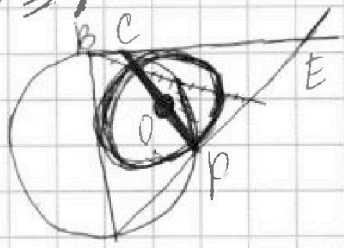
N5



~~EC·CB = ED·DA~~

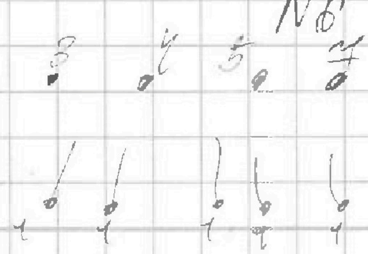


$PO \geq r$



$\frac{2}{3} =) +)) - 90°$

N6



~~В графе нет циклов!~~

он — дерево ⟹

рёбер = вершины − 1.

рёбер = $(3+4+5+7-2k)+k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$k\cdot(k+15)=17\cdot32.$

$k_1=17$

$k_2=-32$

$k^2+15k-17\cdot32=0.$

$D=225+8\,17\cdot128=$
$=2401=49^2.$

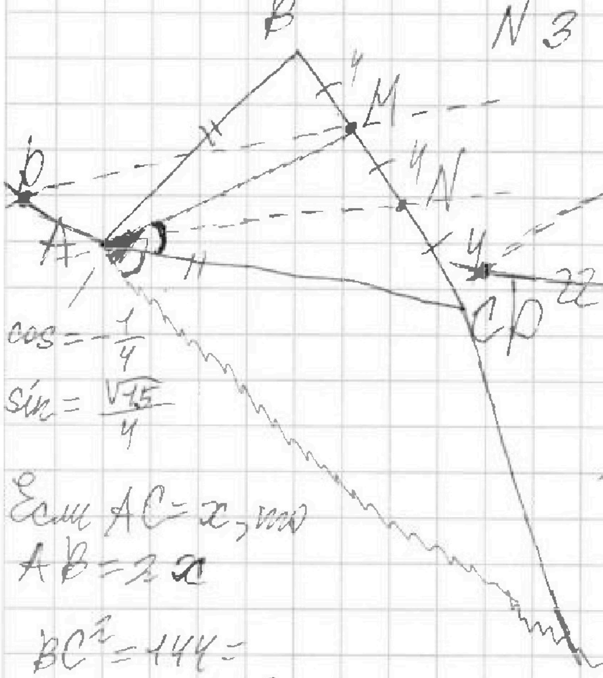
$k_1=\dfrac{-15+49}{2}=17.$

$k_2=\dfrac{-15-49}{2}=-32.$

1) $a-b=17$
$a+b=40$ $\Rightarrow b=\dfrac{23}{2}$ – не нат.

2) $a-b=-32$
$a+b=40$ $\Rightarrow b=\dfrac{72}{2}=36,\ a=4$

N3

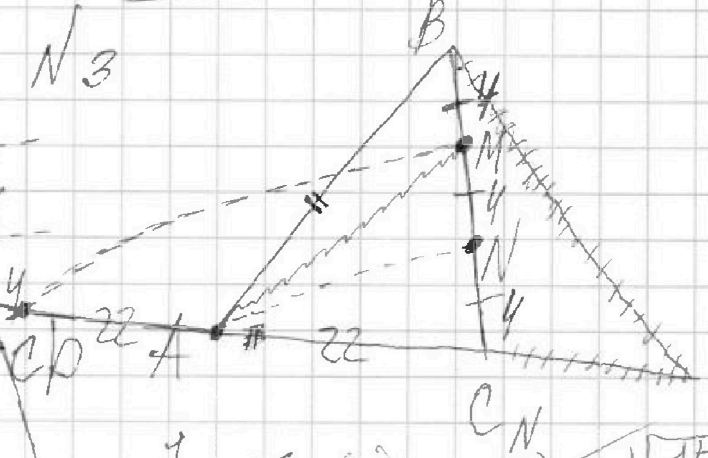


$\cos=-\dfrac{1}{4}$

$\sin=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Если $AC=x$, то
$AB=2x$

$BC^2=144=$
$=5x^2+x^2=6x^2$



$\dfrac{1}{2}\cdot\sin(2\angle CAN)=\dfrac{\sqrt{15}}{8}=$
$=2(\sin\angle CAN)\cdot(\cos\angle CAN),$

$\dfrac{AC}{CN}=\dfrac{AB}{BN}\Rightarrow AN$ – биссектр.

$x=2\sqrt6,\ \boxed{AB=4\sqrt6}.\ \angle CAN=\angle BAN\Rightarrow\angle BAC=$
$=2\angle CAN\Rightarrow\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{4}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N1

$\underbrace{1}_{a}x^2+\underbrace{2\sqrt{3}t}_{b}x+\underbrace{4t^2-1}_{c}=0.$

$D=12t^2-16t^2+16=4(1-t^2)=4(1-t)(1+t)$

от -1 до 1 не включ. всё хорошо.

$t\in(-1;1)$.

$x_1=(-\sqrt{3}t+\sqrt{(1-t)(1+t)})$

$x_2=(-\sqrt{3}t-\sqrt{(1-t)(1+t)})$

$3t^2-\cancel{\sqrt{3(1-t)(1+t)}\cdot t}+\cancel{\sqrt{3(1-t)(1+t)}\cdot t}-$

$-(1-t)(1+t)=3t^2+t^2-1=4t^2-1>$

$>0,\quad t^2>0{,}25$

$t>0{,}5$ или $t<-0{,}5$.

$t\in(-1;-0{,}5)\cup(0{,}5;1)$.

N2

$a+b=40$; a и b — натуральные.

$(a-b)^2+15(a-b)=17p^5$, p — простое.

$a=b$ не подх. $(a-b\leqslant 38)$.

$(a-b)(a-b+15)=17p^5$. $\leqslant 38\cdot 53=2014$.

p^5 — хотя бы $2^5=32$; далее

$3^5=243$, $5^5=3125$ $\Rightarrow$ подходит

только $2^5=32$. Тогда пусть $a-b=k$: