МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра $t$, при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа $a$ и $b$ таковы, что $a-b=12$, а значение выражения $a^2+2ab+b^2+3a+3b$ равно $19p^4$, где $p$ – некоторое простое число. Найдите числа $a$ и $b$.

3. [5 баллов] На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $M$ и $N$ так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная $AN$ и проходящая через точку $M$, пересекает продолжение стороны $AC$ за точку $A$ в такой точке $D$, что $AB = CD$. Найдите $AB$, если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
CAN

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон $BC$ (за точку $C$) и $AD$ (за точку $D$) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$. Центр $O$ окружности, вписанной в треугольник $ABE$, лежит на отрезке $CD$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+4\sqrt{2}tx+9t^2-9=0$

$\Rightarrow x_1; x_2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow D>0$

$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2}t)^2 - 9(t^2-1) = 8t^2-9t^2+9 = 9-t^2>0$

$x = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2}$ (т.к. $9-t^2>0$, $x$ действителен) $t \in (-3;3)$

$x_1 x_2 > 0$

$x_1 x_2 = 9t^2-9$ из теор. Виета

$9(t^2-1)>0 \Rightarrow t \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

$\begin{cases} t \in (-3;3) \\ t \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow$ Ответ: $t \in (-3;-1) \cup (1;3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a-b=12 \quad a, b \in \mathbb{N}$

$a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4 \Rightarrow (a+b)^2+3(a+b)=(a+b)(a+b+3)$

$\Rightarrow (a+b)(a+b+3) \vdots 19; \ \vdots p^4$

$a-b=12 \Rightarrow a+b=2b+12$

$\underbrace{(2b+12)}(2b+15)=19p^4$

$2b+12=2(b+6) \vdots 2 \Rightarrow 19p^4 \vdots 2 \Rightarrow p^4 \vdots 2 \ (19 \not\vdots 2) \Rightarrow p \vdots 2 \Rightarrow p=2$ (прост)

$(2b+12)(2b+15)=19\cdot 2^4=16\cdot 19$

$2b+15=2(b+7)+1 \not\vdots 2 \Rightarrow (2b+12) \vdots 16$

т.к. 19 − прост, и $2b+15>17$, если $(2b+12) \vdots 19$, $(2b+15)$ не включ. ~~пр~~ ни одного прост. ~~множ~~ дел. ~~кр~~ $(2b+12)(2b+15)$, что невозможно. $\Rightarrow (2b+12) \not\vdots 19 \Rightarrow 2b+12=16;\ 2b+15=19$

$\Rightarrow b=\dfrac{16-12}{2}=2 \Rightarrow a=2+12=14$

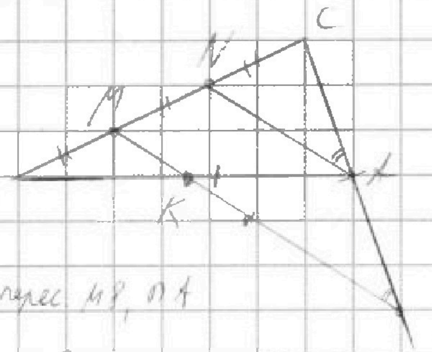
Ответ: $a=14$; $b=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!




$BM = MN = NC$; $M, N \in BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{3}$

$AB = CD$ $\quad MD \parallel NA$

$BC = 6$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$ $\quad$ Найти $AB$

K − перес. MD, BA

$MD \parallel NA$, $MN = NC \Rightarrow NA$ − сред. лин. $\triangle MDC \Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle NAC$

$\Rightarrow \angle CAN = \angle CDM$

$MK$ − ср. лин. $\triangle$ ~~BNA~~ $\Rightarrow BK = KA = CD = AD = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \triangle KAD$ − р/б (с осн. KD) $\Rightarrow \angle DKA = \angle KDA \Rightarrow \angle KAD = 180^\circ - 2\angle CAN$

теор. кос. ($\triangle KAD$)

$$KD^2 = 2\frac{AB^2}{4} - 2\frac{AB^2}{4}\cos(180^\circ - 2\angle CAN) =$$

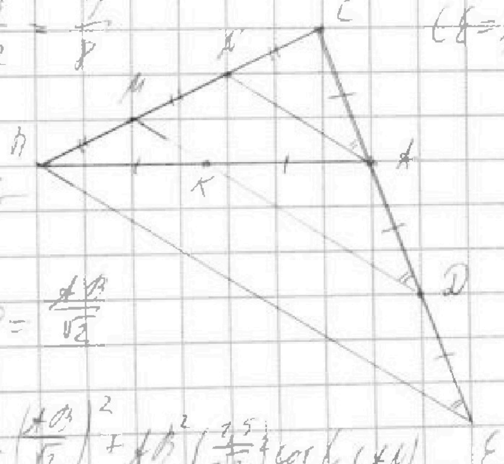
$$= \frac{AB^2}{2}\left(1 + \cos(2\angle CAN)\right) = \frac{AB^2}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{AB^2}{8} \quad KD = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$$

$\cos(2\angle CAN) = 1 - 2\sin^2(\angle CAN)$

$\sin^2(\angle CAN) = 1 - \cos^2(\angle CAN) \to \cos^2(\angle CAN) = 1 - \frac{1 - \cos(2\angle CAN)}{2} =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\angle CAN)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

$\cos(\angle CAN) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$




$CE = 1{,}5\,AN$

~~теор. кос. ($\triangle BAC$) ($\triangle NAC$)~~

проведем $BE \parallel NA$; $E \in CD$

$\triangle BAE \overset{2}{\sim} \triangle KAD \Rightarrow BE = 2KD = \frac{AB}{\sqrt{2}}$

теор. кос. ($\triangle BCE$): $\quad BC^2 = (1{,}5\,AN)^2 + \left(\frac{AB}{\sqrt{2}}\right)^2 + AB^2\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{2}}\right)\cos(\angle CAN)$

$AB^2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2{,}25\right) = AB^2\left(2{,}75 + \frac{3}{8}\right) = AB^2 \cdot 3\frac{1}{8} = BC^2 = 6^2 = 36$

$AB^2 = \frac{36}{3{,}125} = \frac{36 \cdot 8}{25} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{25} \Rightarrow AB = \frac{3}{5} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{5} = 2{,}4\sqrt{2}$ Ответ

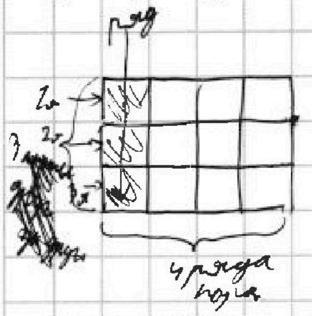
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

т.к. все ученика разного роста, неформал. общн. отсортируем их по росту и назовём ~~"1"~~ самого низкого "1", следующего "2" и т.д.




всего $4 \cdot 3 = 12$ парт

$12 - 11 = 1 \Rightarrow$ ~~1 парта~~ свободна всего 1-а парта $\Rightarrow$ гарантир. есть 3 ряда парт, полностью заполненных. назовём их полными.

~~пусть~~

~~рассм.~~ рассаживать учеников ~~по рядам~~

~~пусть~~

если выбрать 3 ученика, которые ~~ряд~~ будут сидеть на полном ряду, их рассадка однозначна: низший за 1й партой, средний на 2й, высочайший за 3й

$\Rightarrow$ кол-во спб заполнить самый левый полный ряд $C_{11}^3$ (способы выбрать 3 человека из 11)

~~самым~~ следующий полный — $C_8^3$ ~~если~~ при фиксированном 1-м ряде

3-й — $C_5^3 \Rightarrow$ сущ. $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{11!}{3! \cdot (11-3)!} \cdot \frac{8!}{3!(8-3)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} =$

$= \frac{11!}{3! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!}$

при выбранном заполнении всех полных рядов остаётся 2 ученика, находящихся на неполном — ~~ряд~~ $a, в$ $(a < в)$

сущ. 4 способа их рассадить на оставшийся ряд:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | в | a | |
| | | в | a |
| в | a | | в |

в
с в
а

отбрасываются т.к. перед а должен сидеть уч-ка роста $< a$, $в > a$

$\Rightarrow$ всего в 4 раза больше способов рассадки учеников ~~в~~ (без учёта порядка рядов)

$\frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 11!}{(3!)^3}$

сущ. $C_4^3$ вар. расстановить полные ряды:

| | | | |
|---|---|---|---|
| n | n | n | |
| | n | n | n |
| n | | n | n |
| n | n | | n |

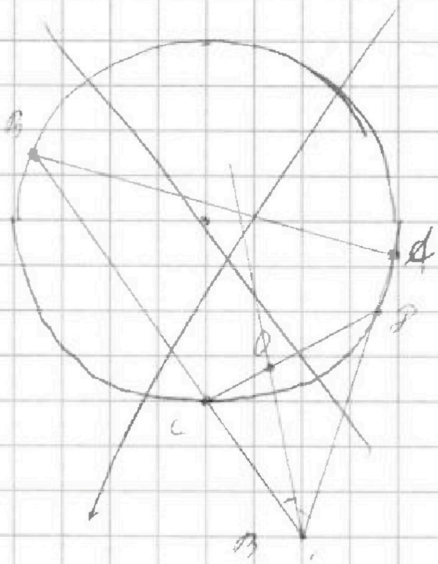
$\Rightarrow$ всего $\frac{2 \cdot 11!}{3!^3} \cdot 4 = \frac{11!}{3^3}$ ~~ответ~~ $= \frac{11!}{27}$ ответ

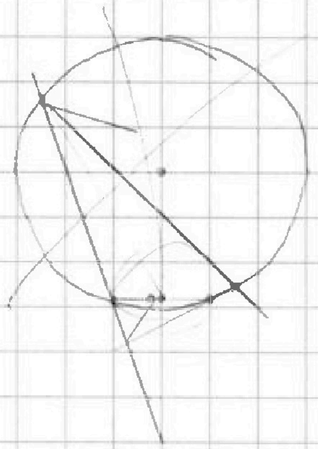
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ |

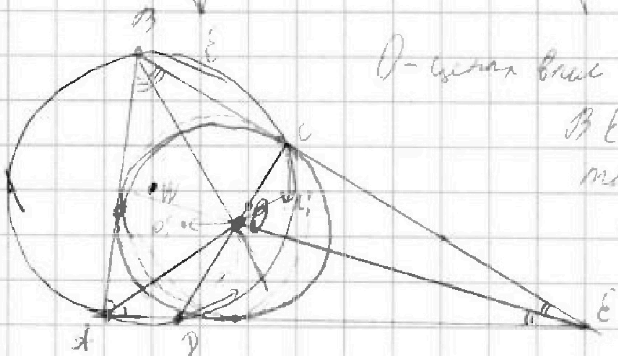
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



O - центр опис около четырехуг. окр




O - центр впис в △ABE окр ⇒ BO - бисс ∠ABC

BE = ?

AO - бисс ∠DAB

max (DE + DO)

$\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CO}$

Зафиксируем A, B и сдвинем O ~~к~~ в $O_1'$ в пределах △ABO

∠ABO₁' < ∠ABO ⇒ C', D' ~~сдвинут~~ C' сдвинулся по ~~ч~~ ч.с.

∠BAO₁' < ∠BAO

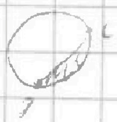
D' против ч.с. ⇒ отр C'D' лежит вне △ABO; в ~~том~~ этой стран. DE

Аналог если сдвинуть OB ус. DC,

D сдв по ч.с.

C против ч.с. ⇒ $D_2'C_2'$ будет вне уг. DC ⇒ вне O

отр DC и ~~дуги~~ малой дугой DC (далее - уголок DC)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

пусть всего $n$ деревень

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой, граф $\Gamma$, вершины которого – деревни, а рёбра – дороги (вершины соед., если между соотв. дерев. есть ~~*~~ неразрывная через другие деревни дорога) связный

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой 1м способом, в $\Gamma$ нет циклов $\Rightarrow$ $\Gamma$ – дерево.

в дереве на $n$ вершинах $n-1$ рёбер

$\Rightarrow$

$$\frac{5+6+7+9+(n-4)}{2} = n-1$$

$n-4$ деревень, в которые входит 1-а дорога

(сумма степеней вершин есть удв. число рёбер)

~~23~~ $\frac{23+n}{2} = n-1$

$23+n = 2n-2$

$25 = n$

~~Ответ~~: на острове 25 деревень. Ответ: 25

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=2$ $\quad x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$

подкор. выр. $\geqslant 0 \Rightarrow |x-y-1|\leqslant 1$; $2x\geqslant 2y+x^2+y^2$

$1-|x-y-1|\leqslant 1\Rightarrow \sqrt{1-|x-y-1|}\leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{2x-2y-x^2-y^2}\geqslant 2-1=1$

$|x-y-1|\leqslant 1\Rightarrow \begin{cases} x-y-1\leqslant 1\Rightarrow x-y\leqslant 2\\ x-y-1\geqslant -1\Rightarrow x-y\geqslant 0\end{cases}$ $\quad x-y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-y\in\{0;1;2\}$

пусть $x-y=0$

$x=y$

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x-y-1|}=\underbrace{\sqrt{-2x^2}}_{\text{невозм}}+\sqrt{0}$

пусть $x-y=1$

$x=y+1$

$\sqrt{2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2}+\sqrt{1-|1-1|}=\sqrt{2y+2-2y-y^2-2y-1-y^2}+\sqrt{1}=$

$=\sqrt{-2y^2-2y+1}+1=2$

$\sqrt{-2y^2-2y+1}=1$

$-2y^2-2y+1=1$

$-2y(y+1)=0$

$y=0,-1$

$x=1,0$

пусть $x-y=2$

$x=2+y$

$\sqrt{2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2}+\sqrt{0}=\sqrt{4-2y^2-4y-4}=\sqrt{-2y(y+2)}=2$

$-2y(y+2)=4$

$-2y^2-4y-4=0$

$y^2+2y+2=0$

$D=4-4\cdot 2\cdot 1=-4\Rightarrow$ корней у выр. нет $\Rightarrow$ случай $x-y=2$ невозможен

Ответ: $(x,y)\in\{(0,-1);(1,0)\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a_1$ — $a_1: k-2$

$a_2$ — $a_2: a_1 \geq k \to k-a_1-1$

$a_3$ — $a_1: a_2 \to k-a_2$

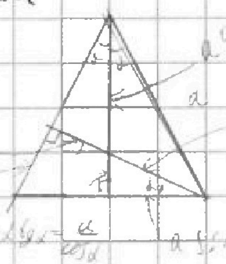
$x(2-x)-y(2+y)$

$2x-2y-(x+y)^2+2xy$

$x(2+y)-y(2-x)-(x+y)^2>0$

$5+8+7+9=$

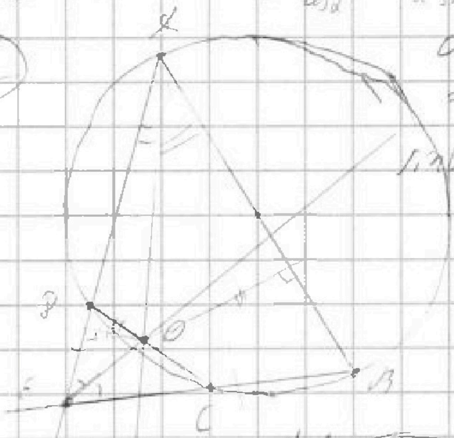
$=11+9+7=27$

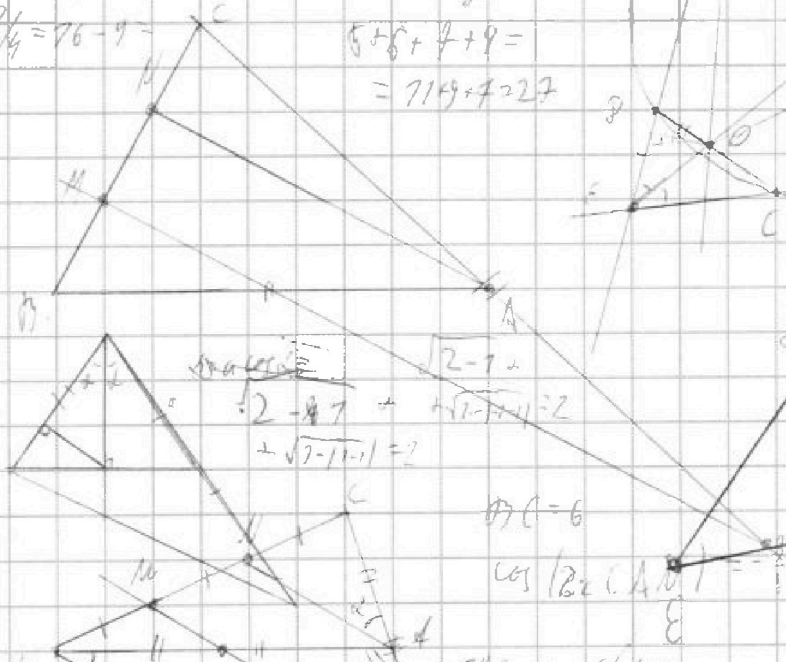


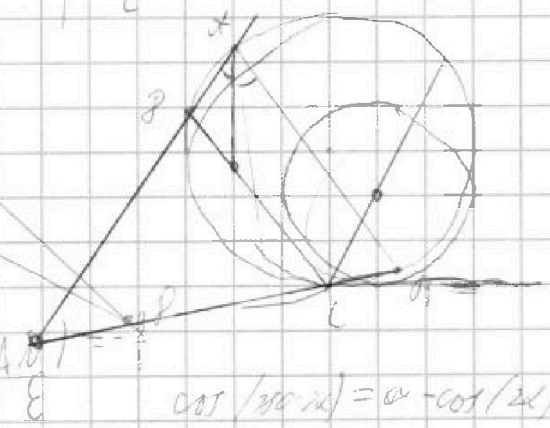
$a \operatorname{tg} \alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{a-2a\sin^2\alpha}{a}$

$= 1-2\sin^2\alpha$







$BC=6$

$\cos(\angle CAB)$

$\cos(180-2\alpha) = a - \cos(2\alpha)$

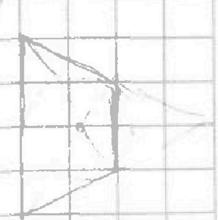
$180-2\alpha$

$BE^2 = 2BA^2 - 2BA^2\cos(180-2\alpha) =$

$= 2BA^2\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{2BA^2}{4}$

$BE = \frac{BA}{\sqrt{2}}$

$BC^2 = BE^2 + 0{,}25AD^2 -$



$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4} = 1-2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = \frac{7}{4}$

$\sin^2\alpha = \frac{3{,}5}{4}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = \frac{1}{8}$ $\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!