



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$7t^2 + 4\sqrt{2} \cdot t \cdot x + 9t^2 - 9 = 0$$

Корни ~~данного уравнения~~ ^{поискать дискриминант} ~~этого!~~

(поискать дискриминант)

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 9 \cdot t^2 + 4 \cdot 9 = 4 \cdot 9 - 4t^2$$

$$= 36 - 4t^2$$

Данное уравнение имеет 2 решения при дискриминанте $\geq 0 \Rightarrow$

$$36 - 4t^2 \geq 0 \Rightarrow 36 \geq 4t^2 \Rightarrow 9 \geq t^2 \Rightarrow$$

$$3 \geq t \geq -3$$

поискать корни: $x = \frac{4\sqrt{2} \cdot t \pm \sqrt{36 - 4t^2}}{2}$

По Теореме:

$$9t^2 - 9 = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \text{если } x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ (одно)}$$

$$\text{то: } 9t^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 1 \Rightarrow \text{одно } t \geq 1, t \leq -1$$

$\Rightarrow$ у данного уравнения ^{действ.} 2 решения ($D \geq 0$),

это произведение их коэффициентов при

$$t \in (3; 1) \cup (-1; -3)$$

$$\text{Ответ: } t \in (3; 1) \cup (-1; -3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a - b = 12 \\ a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 12 + 6 \\ (a + b + 3) \cdot (a + b) = 19p^4 \\ (25 + 6)(12 + 6) = 19p^4 \\ 180 + 27b + 6^2 = 19p^4 \end{cases}$$

Заметим, что если

$a + b$ делится на p
и $a + b + 3$ делится на p ,
то p — простое.

Или $a + b \equiv 0 \pmod{p^4}$ или
 $(a + b + 3) \equiv 0 \pmod{p^4}$, при
этом второе множение
не делится на p
 ≥ 19

Если одно из чисел делится на p ,
при этом p — простое то второе
делится 3 разами.

$$p = 3$$

т.к. числа имеют
 $a + b + 3$ и $a + b$ на

$$\begin{cases} (a + b + 3)(a + b) = 19 \cdot 3^4 \\ a = b + 12 \end{cases}$$

$$(2b + 15)(2b + 12) = 19 \cdot 3^4$$

$$100 + 6b^2 + 27b + 180 = 19 \cdot 3^4$$

$$D = 27^2 - 4(100 - 180) = 27^2 - 4(-80) = 27^2 + 320 = 729 + 320 = 1049$$

$$D = 3^2 \cdot 117 = 3^2 \cdot 13 \cdot 3 = 3^4 \cdot 13$$

Заметим, что

$2b + 15$ — нечетное,
 $2b + 12$ — четное (при b нечетном)

$\Rightarrow$ их произведение

четно, но их произведение

$19 \cdot 3^4$ — нечетное противоречие

$\Rightarrow$ этот вариант не подходит.

$$\begin{cases} a + b = p^4 \\ a + b + 3 = 19 \\ a + b = 16 \\ a - b = 12 \\ a = b + 12 \\ a + b = 16 \\ 2b + 12 = 16 \\ b = 2 \\ a = 14 \end{cases}$$

и $p = 2$ подходит
это решение.

$$\begin{cases} a + b + 3 = p^4 \\ a + b = 19 \\ a + b = 19 \\ a = b + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b + 12 = 19 \\ 2b + 12 = 7 \end{cases}$$

b — натуральное

$\Rightarrow$ нет решений.

в данном случае.

ответ: $b = 2$

$a = 14$.

Итак, в вариантах,

показав, что других

нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим: $AB = 2x$, $AP = 2x$

$BC = 6$
 $\angle C = \angle AHC$
 $\cos(2\alpha) = -\frac{3}{4}$
 (по кос.)

$DM = MN = NC = x$

$\angle ACN = \alpha$
 коэффициент подобия $= 2$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{NC}{MC} = \frac{1}{2}$

$\angle KAC = \angle KBC$
 из подобия

$X = \frac{AB}{2} = \frac{2x}{2} = x$

AN — биссектриса $\triangle ABC$ т.к. биссектриса делит сторону BC в отношении $\frac{AB}{AC} = \frac{2x}{x} = 2$ т.к.

$AC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ т.к. AN — биссектриса

$\Rightarrow AC^2 + AB^2 \angle BAC = 2 \angle KAC = 2\alpha$

можно Tn косинусов $AB^2 + AC^2 -$

$2 \cos(2\alpha) \cdot AB \cdot AC = BC^2 = 4x^2 + x^2 + \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 2x \cdot x$

$\Rightarrow 6^2 = 5x^2 + 3x^2 \Rightarrow 6 = 2\sqrt{2}x$

$\Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1,5\sqrt{2}$

$AB = 2x = 3\sqrt{2}$

ответ: $3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку к нам:

☐	☐	☐	3!	3
☐	☐	☐	2!	2
☐	☐	☐	1!	1

Заметим, что на 6
рядов может сидеть
по 2 человека

дока

=>

11 человек, а мест
видно из рисунка, всего 12,
значит всего 12 карт

тогда вариантов 12 - 12 вариантов, у которых

и наименьшие ростом $L \neq M$

Всего вариантов раскладки (без учета не
подходящих) = 12!

варианта, когда есть 2 человека (один сзади, другой
спереди) как у человека сзади, остальные

подходят, тогда вариантов раскладки карт в
ряд 2 варианта, всего таких раскладов 8 => вариант

такого расклада

Заметим, что если в ряду нет пустого
места, то этот ряд 1-й и 2-й сзади

3х человек можно рассадить однозначно

тогда если пустое место (например в первом
ряду), то рассадить всех можно таким образом

человек: $3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!$

(выбрав 3-го, выбрав 3-х сзади, выбрав 3-х
сзади и поставив, всех остальных)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(DE - OD) \cdot (DE^{N5} + OD) > 6$$

при этом по НР-ву $\triangle BOE$

$$DO + PE > OE \Rightarrow DO + PE$$

$$DO + R > DE \Rightarrow (DE - DO) < R.$$

~~Замечание, что максимальное значение~~

~~функции достигается при равенстве, тогда~~
~~найдем эту~~

Заметим, что максимальное значение
функции достигается на катете и

гипотенузы достигается когда $DE = \sin(\omega) \cdot PE$

$$\text{-- макс} = (1 + \sin(\omega)) \cdot DE \text{ при этом.}$$

$$\text{то значение } PE = \frac{R}{\cos(\omega)}, \text{ а } R = \frac{PE}{\cos(\omega)} \Rightarrow$$



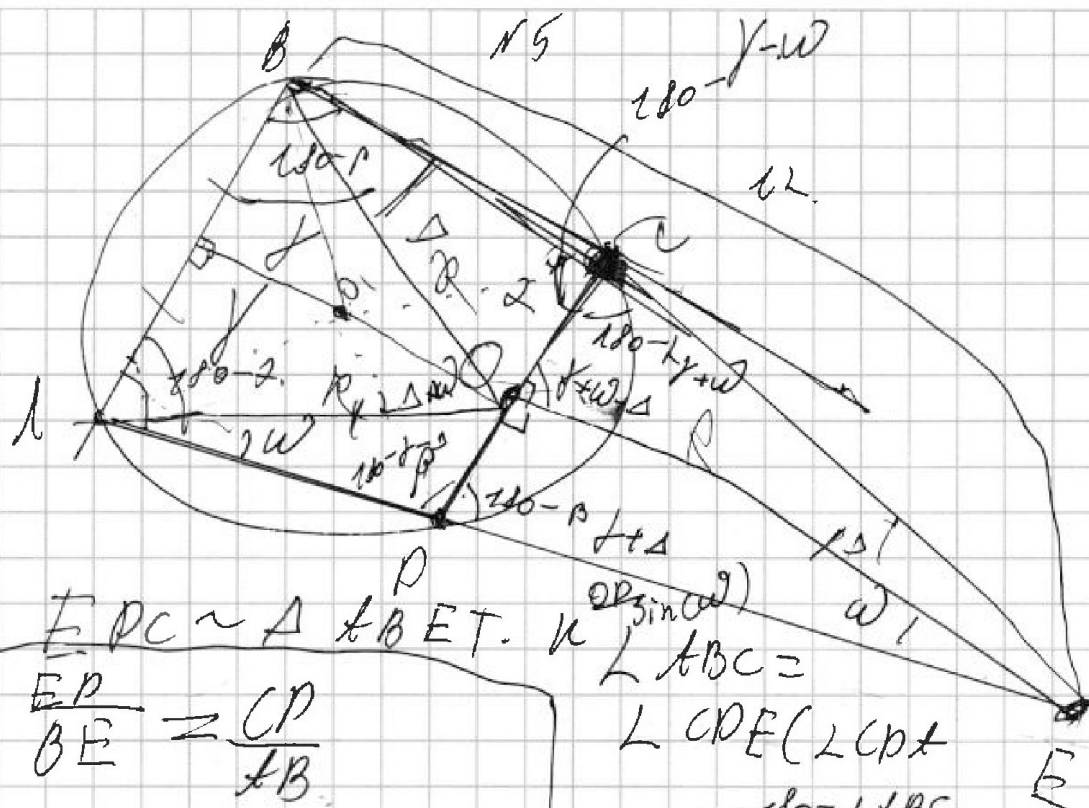
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Delta EPC \sim \Delta ABET. \text{ и } \angle ABC =$$

$$\Rightarrow \frac{EP}{BE} = \frac{CP}{AB}$$

Также заметим, что $\angle POE = \angle EOC = 90^\circ$

$$\text{т.к. } \angle EOP = \alpha + \delta (= \angle ABC)$$

$$\angle OEP = \omega \text{ т.к. } \angle OEP = \rho / \delta$$

$$\Rightarrow \angle CPE = \alpha + \delta + \omega$$

т.к. смежные с треугольником, но сумма всех углов в $\triangle ABE \neq 180^\circ \Rightarrow \alpha + \delta + \omega = 90^\circ$

Тогда пусть радиус окружности $\triangle ABE = R$

$$R^2 = PE^2 + OE^2 \text{ но т.к. } \angle POE = 90^\circ$$

Заметим, что с помощью $\angle POE$

$$R^2 = PE^2 + OE^2 \text{ (суммарно) } R^2 = OE^2 + OE^2 \cos^2 \omega$$

$$R^2 \geq OE^2 \Rightarrow \sqrt{R^2 - OE^2} \geq OE \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

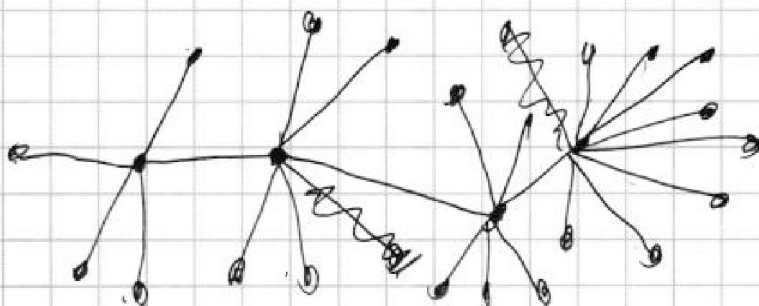


СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\Rightarrow$ количество деревьев кроме тех
 $4-x=21$ (деревья из остальных деревьев
горюхи идут только в эти 4 (т.к. степень
каждой - 1), а если горюхи, то только
деревья и больше, то найдется такая
деревья (не из 4-х указанных), со степенью ≥ 2
а такого не бывает по условию $\Rightarrow$ всего 25
деревьев

Пример:



тут всего 25 деревьев, условия
выполняются
ответ: ~~25~~ 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим рассуждать дальше
 $y + t = x$ Мы дошли до того (на предыдущей
странице), что $y(y+t) = 0$

т.е. тогда есть 2 варианта для y :

$\begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$ если $y=0$ то $x=t$ если
 $y=-1$ то $x=0$, оба этих варианта

подходят, упрощаем:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=t \\ y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

ответ: $(0; -1)$ и $(1; 0)$ так же это

равно: $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \\ y=-1 \\ x=0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

Т.к. значение под корнем не отриц. $\Rightarrow$

$$1-|x-y-1| \geq 0 \Rightarrow 1 \geq |x-y-1|$$

Рассмотрим модуль, рассмотрим 2 варианта:

$$x \geq y+1$$

$$\text{тогда: } |x-y-1| = x-y-1$$

$$\Rightarrow 1 \geq x-y-1$$

$$y+2 \geq x$$

$$x \geq y+1$$

т.к. x и y — целые то
рассмотрим 2 варианта:

$$x = y+2, x \neq y+1.$$

$$x < y+1$$

тогда:

$$|x-y-1| = y+1-x$$

$$\Rightarrow 1 \geq y+1-x$$

$$x \geq y$$

но при этом

$$x < y+1 \text{ — противоречие}$$

$\Rightarrow$ данный вариант
нам не подходит.

$$\sqrt{2y+4-2y-(y+2)^2-y^2}$$

$$+ \sqrt{1+1+y-y+2} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y+4-y^2-y^2} = 2$$

$$\Rightarrow 4 = 4-(y+2)^2-y^2$$

$$\Rightarrow (y+2)^2+y^2=0$$

но т.к. $y \geq 0$

$$\Rightarrow 2y^2+4y+4=0$$

$$D = 16-32 = -16$$

$$D < 0 \Rightarrow y \in \emptyset$$

В данном

случае $\Rightarrow$ решение не существует

$$y+1 = x \text{ подставим}$$

$$\sqrt{2+2y-2y-(y+1)^2-y^2}$$

$$+ \sqrt{1-1} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2-(y+1)^2-y^2} = 1$$

$$\Rightarrow 2-(y+1)^2-y^2 = 1$$

$$y+1+y^2-1=0$$

$$y^2+2y+1-y^2=0$$

$$2y+2=0$$

$$y(y+1)=0$$

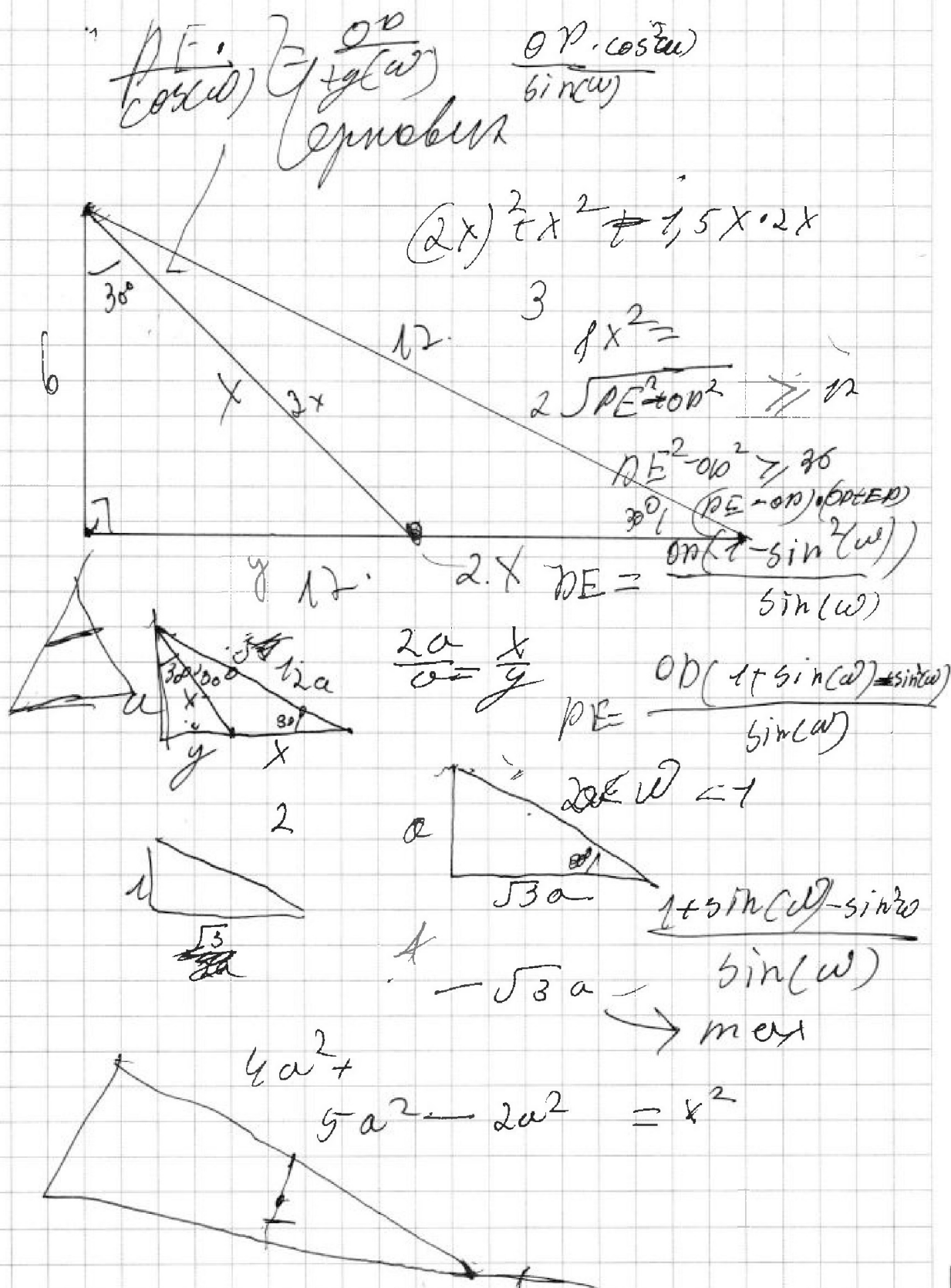


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



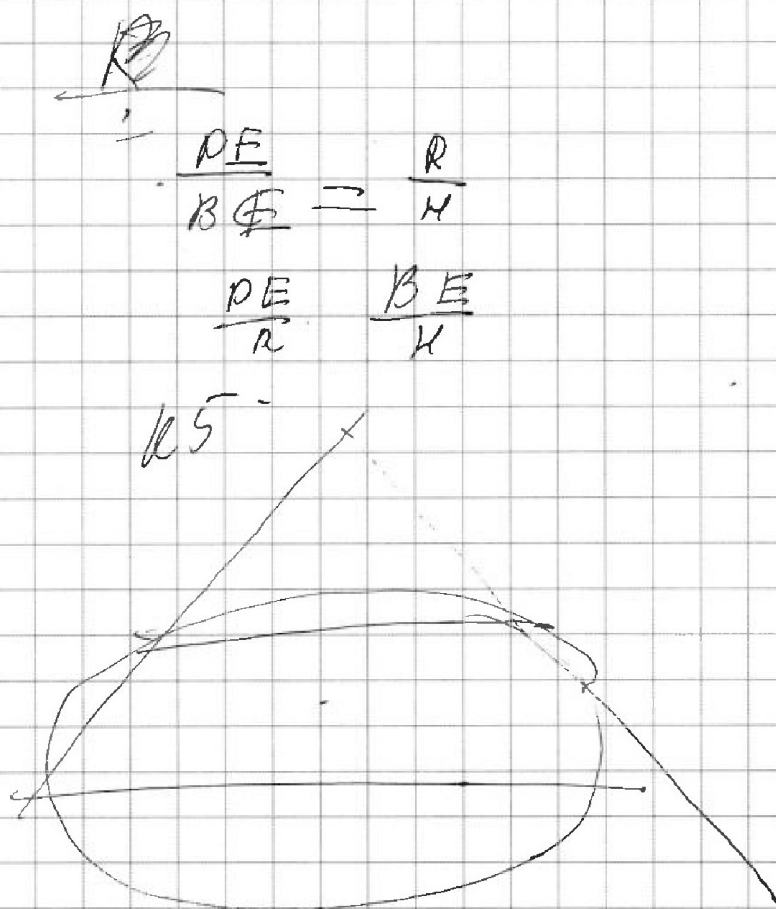


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{2-|x-y-1|} = 2.$$

$$2x \geq 2y + x^2 + y^2 \quad 1 - |x-y-1| \geq 0$$

$$2x - x^2 - 2y - y^2 \geq 0 \quad \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Phi = 4 - 8y - 8y^2$$

это параболы направлены
вниз вниз $\Rightarrow$ при $\Phi \geq 0$

условие что $2x - x^2 - 2y - y^2 \geq 0$
исполнение

$$\Rightarrow 4 - 8y - 8y^2 \leq 0$$

$$8y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad 1 + x - y - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq y + 1$$

$$\Phi = 6y + 4$$

$$\sqrt{2-x-x^2+2-y-y^2} + \sqrt{2-|x-y-1|} = 2.$$

Т.к. $(2-x) \cdot x + y(2-y) - \text{целое}$, $2 - |x-y-1|$
тоже целое, то:

$$\frac{1}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}$$

$$\frac{1}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}$$

$$(26+15)(24+12)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$