



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAM) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 =$$

$$D = 12t^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

$$x_1 x_2 = 4t^2 - 4 > 0$$

$$12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$-4t^2 + 16 > 0 \quad | :(-4)$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$4t^2 - 16 < 0 \quad | :4$$

$$(t-2)(t+2) < 0$$

$$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$a+b=40$$

$$40-b=a$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(40-2b)(40-2b+15) = 17p^5$$

$$\cdot 2 \Rightarrow 17p^5 : 2 \Rightarrow p^5 : 2 \Rightarrow p=2$$

$$a+b=40$$

$$(40-2b)(55-2b) = 17 \cdot 32$$

$$2200 - 80b - 110b + 4b^2 = 544$$

$$1656 - 190b + 4b^2 = 0$$

$$828 - 95b + 2b^2 = 0$$

$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$

$$D = 9025 - 6624$$

$$D = 2401 = 49^2$$

$$95 \pm 49$$

$$b_{1,2} = \frac{4}{2}$$

$$b_1 = \frac{46}{4} \quad b \in \mathbb{N} \quad b_2 = 36 \Rightarrow a = 4$$

Ответ: $b=36; a=4$

$a, b = ?$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 49 \\ \hline 349 \\ 152 \\ \hline 1962 \end{array}$$

17

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 55 \\ \hline 110 \\ 110 \\ \hline 2200 \\ + 32 \\ \times 17 \\ \hline 224 \\ 32 \\ \hline 544 \\ \cdot 9 \\ 2200 \\ \hline 544 \\ \overline{) 1656} \overline{) 2} \\ 16 \\ \hline 5 \\ \overline{) 4} \overline{) 170} \overline{) 2} \\ 4 \\ \hline 26 \\ \overline{) 10} \\ 20 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 95 \\ \hline 1475 \\ 855 \\ \hline 9025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 49 \\ \hline 36 \\ 164 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9025 \\ - 6624 \\ \hline 2401 \\ \overline{) 2401} \\ 239 \\ \hline 1 \\ \overline{) 95} \overline{) 1} \\ 95 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ \overline{) 124} \\ \hline 0 \end{array}$$



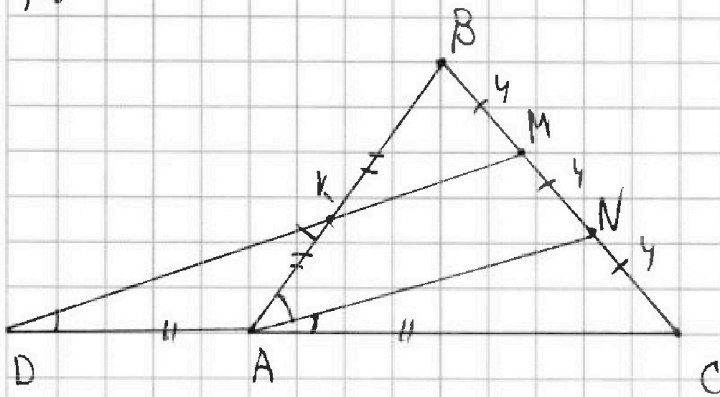
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



Решение: т.к. $DM \parallel AN \Rightarrow$

① ~~В~~ $\triangle ABN$ по т. Фалеса

$$BK = KA = \frac{1}{2} AB$$

② $\triangle DMC$: по т. Фалеса:

$$DA = AC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$$

$\triangle DAK$ равнобедренный \Rightarrow

$$\angle KDA = \angle DKA \text{ но}$$

$$\angle KDA = \angle CAN \text{ т.к. } NA \parallel DM \Rightarrow$$

$$\angle BMN = \angle DKA = \angle CAN$$

$\triangle ABC$ по т. кос:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 2(\angle CAN)$$

$$144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 - 2AB \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} AB^2$$

$$144 = \frac{3}{2} AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{144 \cdot 2}{3}} = \sqrt{96}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{144 \cdot \frac{2}{3}} \\ \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2} \\ \hline 6\sqrt{2} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Заметим, что всегда 3 ряда заполнены учениками полностью.

Рассмотрим 1 ряд кол-во способов выбрать ученика на 1 из рядов: C_8^3

Эти выбранные 3 ученика будут однозначно рассаживаться

за каждый ряд. Т.к. выбираем н.б. 1 ряд из трех то $3 \cdot C_8^3$ - кол-во
способов выбрать 3-ех учеников и рассадить их за 1 из 3 рядов.

Рассмотрим оставшихся 5 человек. Для них $2 \cdot C_5^3$ - выбрать

3-их и рассадить за 1 из оставшихся 2 рядов.

Рассмотрим оставшихся 2 человека:

C_2^2 - выбрать 2 человека из 2. Теперь посмотрим как они могут

сидеть:

a_j	a_i	<input type="checkbox"/>	}	3 C_2^2 - кол-во способов выбрать оставшихся двух и рассадить
a_i	<input type="checkbox"/>	a_j		
<input type="checkbox"/>	a_i	a_j		

($a_j \geq a_i$ по росту)

на оставшихся ряд. Таким образом, всего способов:

~~$3 \cdot C_8^3 + 2 \cdot C_5^3 + 3 \cdot C_2^2 = 191$ способов.~~

~~Ответ: 191 способ.~~

$$3 \cdot C_8^3 \cdot 2 \cdot C_5^3 \cdot 3 \cdot C_2^2 = 3$$

$$= 18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$$

Ответ: $18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

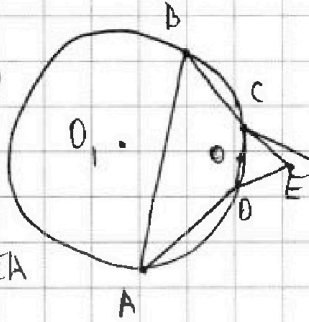
№5.

CD - диаметр

Окр-ти с ц. O. ⇒

как

CE = ED - касат. ⇒



Т.к. $EC \cdot EB = ED \cdot EA$

(ст. точки E относит. окр-ти с ц. O1) ⇒

$EB = EA = 10$. ⇒ ABCD - равнобок. трапеция. ⇒ $CD \parallel AB$. ⇒

$\triangle CDE \sim \triangle ABE$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

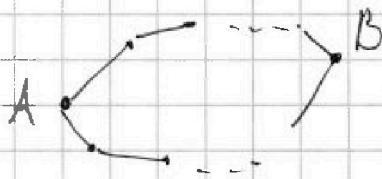
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. Введён граф, где вершины - деревни, а рёбра - дороги.

~~Ж~~. Заметим, что т.к. из каждого города можно попасть в любой другой, то этот граф связный, значит у него на n вершин хотя бы $n-1$ дорога. Допустим, что граф по условию должен быть деревом:

Допустим это не так, ~~значит~~ ~~тогда~~ значит у него $\geq n$ дорог. ~~тогда~~ Тогда, в этом графе найдётся цикл:

а значит от деревни А в В можно пройти



2 способами?! Значит наш граф - дерево. Значит в нём как минимум две висячие вершины \Rightarrow Деревья ≥ 6 .

Всего пусть только 4 деревни, есть n , тогда:

$$\frac{19+n}{2} = n-1 \text{ - ребер.}$$

$$n=21$$

пусть всего n деревень \Rightarrow 4 деревни со степ. 3, 4, 5, 4 и $n-4$ со

степ. верш 7. всего ребер: $n-1 = \frac{19+n-4}{2}$

$$2n-2 = 15+n$$

$$\boxed{n=17}$$

Ответ: 17.

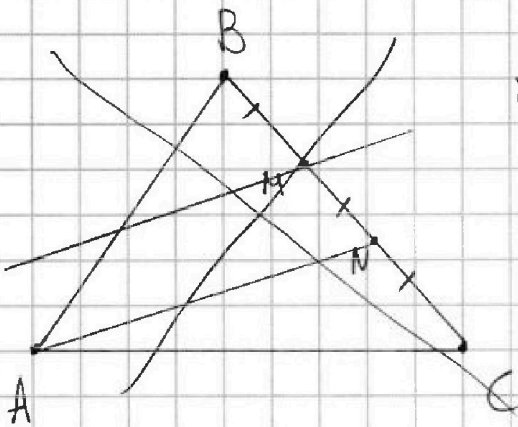


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\cos(2\alpha)$

$$3+4+5+7=$$

$$= 19$$

$$AB=CD$$

$$AB=?$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

Решение:

т.к. $DM \parallel AN$ то

$\triangle DMC$:

AN - ср. линия \Rightarrow

$$PA = AC = \frac{1}{2} AB$$

В $\triangle ABM$:

$$1) KM \parallel AN \quad (BM=MN) \Rightarrow AK=KB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle DAK - \text{равноб.}$$

$$\text{В } \triangle ANC: \text{ по т. кос: } NC^2 = AC^2 + AN^2 - 2AC \cdot AN \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$\text{В } \triangle DMC \text{ по т. Менелас: } \frac{KM}{DK} \cdot \frac{DA}{AC} \cdot \frac{CB}{BM} = 1$$

$$\frac{KM}{DK} = \frac{1}{3}, DK = 3KM \Rightarrow DK = \frac{3}{4} DM$$

$$\text{В } \triangle DAK \text{ по т. кос: } AK^2 = DA^2 + DK^2 - 2DA \cdot DK \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$DK = 2DA \cdot \cos(\angle CAN)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$0 \leq \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{1-|x+y-2|} \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

Т.к. $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

① $x+y=1$ (1)

② $x+y=2$ (2)

③ $x+y=3$ (3)

(1) $x+y=1 \Rightarrow \sqrt{2-x^2-y^2} + \sqrt{1-1} = 1$

(2) $x+y=2 \Rightarrow$

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = 1 \uparrow^2$$

$$2-x^2-y^2 = 1$$

$$x^2+y^2 = 1$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2} + 1 = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \Rightarrow -1 \leq x; y \leq 1 \end{cases}$$

$x=-1 \Rightarrow y=2 \quad x^2+y^2 > 1$?!

$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ (✓)

$x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ (✓)

$y=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow x^2+y^2 > 1$?!

$$-4 \leq x; y \leq 4$$

① $x=-4 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x^2+y^2 > 4$?!

② $x=-3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$?!

③ $x=-2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x^2+y^2 > 4$?!

④ $x=-1 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$?!

⑤ $x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4, x+y=2$ (✓)

⑥ $x=1 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$?!

⑦ $x=2 \Rightarrow y=0$ (✓)

⑧ $x=3 \Rightarrow y=-1 \quad x^2+y^2 > 4$?!

⑨ $x=4 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow x^2+y^2 > 4$?!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 (Продолжение)

$$(3) \quad x+y=3 \Rightarrow \sqrt{6-x^2-y^2} = 1$$
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$-2 \leq x, y \leq 2$$

- ① $x=-2 \Rightarrow y=5 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$ (?)
- ② $x=-1 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$?!
- ③ $x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$?!
- ④ $x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x^2+y^2 = 5$ ✓
- ⑤ $x=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x^2+y^2 = 5$ ✓

Ответ: $(0; 1); (1; 0); (0; 2); (2; 0); (1; 2); (2; 1)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x; y) = ?$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 2$$

$$|x+y-2| \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$x+y = 1; 2; 3$$

① $x+y=1 \Rightarrow$

$$\sqrt{2-x-y^2} = 1$$

$$2-x-y^2 = 1$$

$$\begin{cases} 1 = x+y \\ 1 = x+y^2 \end{cases}$$

② $x+y=2$

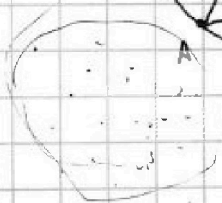
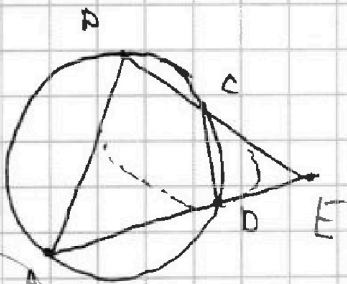
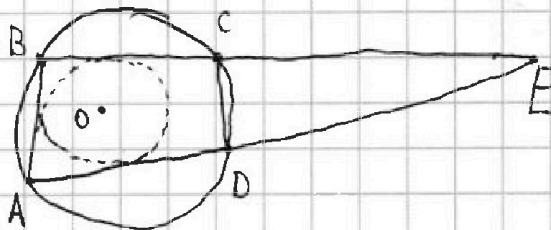
$$\sqrt{4-x^2-y^2} = 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

③ $x+y=3$

$$\sqrt{6-x^2-y^2} = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$



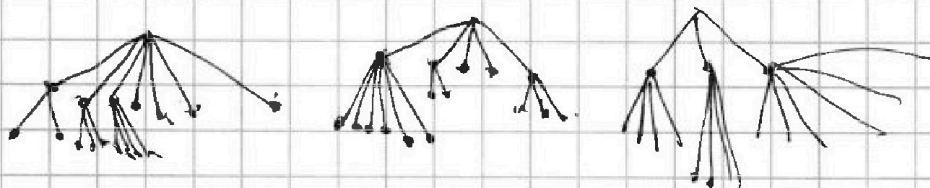


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

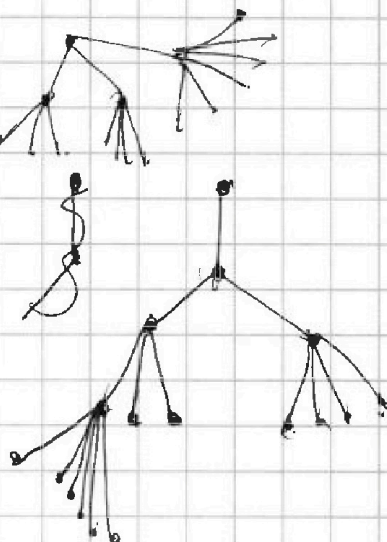
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{19+n}{2} = n-1$$

$$19+n = 2n-2$$

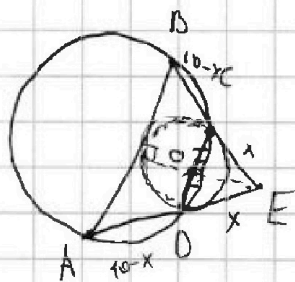
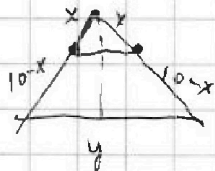
$$n = 21$$



$$\frac{19+(n-y)}{2} = n-1$$

19

$$\frac{10-x}{y}$$



$$BE = 10$$

(ED+DO) min ↓



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} DM^2 - \frac{1}{2} AB \cdot DM \cdot (\cos \angle CAN)$$

$$16 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{16} DM^2 - \frac{1}{4} AB \cdot DM (\cos \angle CAN) - \text{пот. кос в } \triangle BKM$$

$$\frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} DM^2 - \frac{1}{2} AB \cdot DM \cdot (\cos \angle CAN) = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{16} DM^2 - \frac{1}{4} AB \cdot DM \cos \angle CAN$$

$$\frac{3}{16} DM^2 = \frac{1}{4} AB \cdot DM (\cos \angle CAN) \quad | \cdot 4$$

$$\frac{3}{4} DM = AB \cdot (\cos \angle CAN)$$

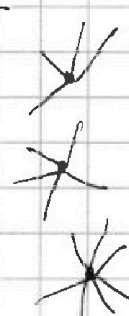
$$64 = DM^2 + DC^2 - 2DM \cdot DC (\cos \angle CAN)$$

$$64 = DM^2 + AB^2 - 2DM \cdot AC \cos \angle CAN$$

$a_1 < a_2 < \dots < a_3$



$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 50$$



$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

$$3(C_2^3 + C_3^3 + C_2^2) =$$

=

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3+6 \\ 0 & 0 & 0 & 3+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 21$$

$$\begin{array}{r} + 168 \\ + 13 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ + 23 \\ \hline 191 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \\ + 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$\begin{array}{r} + 22 \\ + 22 \\ \hline 140 \\ \times 3 \\ \hline 420 \end{array}$$

