



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 10

- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle C) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парты перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t^2 + x + 9t^2 - 9 = 0$$

x_1, x_2 - решения

Если есть 2 корня, то дискриминант полож. \Rightarrow

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

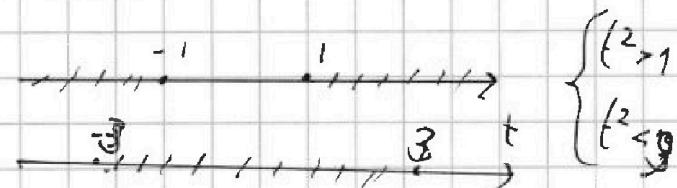
Если $x_1 \cdot x_2 > 0$, то по th. Виетта $9t^2 - 9 > 0$

$$t^2 > 1$$

$$8t^2 - 9t^2 + 9 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

$$t^2 < 9$$



$$t \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a + b = 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

Чётн $\Rightarrow 19p^4$ - чётн $\Rightarrow p^4$ - чётн $\Rightarrow p = 2$,

того все другие простые числа исключены \Rightarrow

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$2b^2 - 4b + 31b - 62 = 0$$

$$2b(b-2) + 31(b-2) = 0$$

$$(2b+31)(b-2) = 0$$

$$b = -\frac{31}{2} \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 14$$

$b = -\frac{31}{2}$ - неприродное \Rightarrow

и $b = 2$ подходит

Отвр: $a = 14 \quad b = 2$

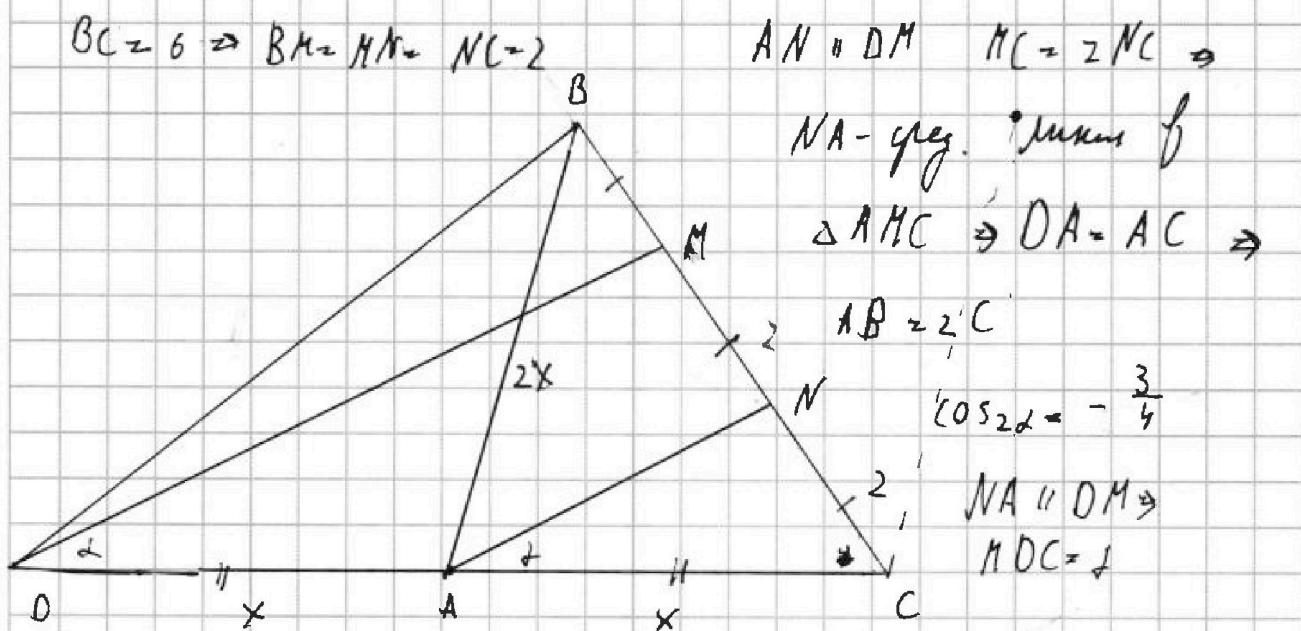


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$-\frac{3}{4} = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4} \quad \sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

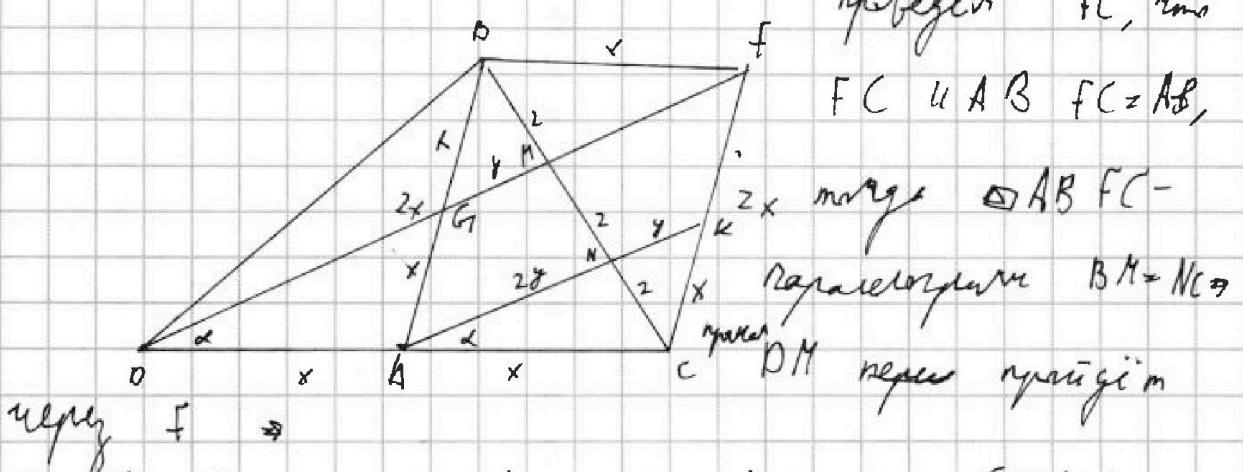
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

приведём FC , \angle к ней

$FC \parallel AB$ $FC = AB$,

$\angle AFB = \angle FCB$

параллелограмм $BK = NC$



Если $AN \perp f$, то $BK \perp f$ по наследству $\Rightarrow NK \perp f \Rightarrow \angle NKF = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

th cos

$$x^2 + x^2 + 9y^2 - 2\cos 2 \cdot 3y \cdot x \quad \text{график}$$

$$y = x^2 + 9y^2 - 2\cos 2 \cdot 3y \cdot x \quad \text{дискриминант}$$

$$4x^2 + 9y^2 = 6\cos 2 \cdot 3y \cdot x$$

$$y = \frac{3}{3} \cos 2 \cdot 3y \cdot x$$

$$9y^2 = 2\cos 2 \cdot 3y \cdot x$$

$$y = x^2 + \frac{16}{9} \cos^2 x^2 - 2\cos 2 \cdot \frac{4}{3} \cos 2 x^2$$

$$y = x^2 \left(1 + \frac{16}{9} \cos^2 x^2 - 2\cos 2 \cdot \frac{4}{3} \right)$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9} \cos^2 x^2 - 2\cos 2 \cdot \frac{4}{3}}$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{18}} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{1 + \frac{2}{9} - \frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 3}$$

$$\text{Ответ: } AB = \frac{3\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 3} = \frac{9}{\sqrt{9} - \frac{1}{3}\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим что выбрали каких-то 3 школьников, чтобы они сели в один ряд. Их расположение - 1 вариант. Всёх свободных мест нет \Rightarrow 1 слот на первого парня, ведь остаётся всего него.

Второй слот на второго парня. ведь осталось всего него.

Если мы выбрали группу школьников и находим в один ряд, то есть такие задания:
к-какие? в-важные x-нужная

1) К в x в шахах между первым и вторым местом

2) К x в

3) x К в сидят боком. \Rightarrow классисты боялись

4) в x К

первое первое место
- парные
- наименее
затруднительные участники по возрасту

результат.

Выберем пару, где 2 человека - 4 пар, подадим их в таблицу

Выбор из трех мест - C_3^2 . Выберем третью пару

из первых из оставшихся - C_2^1 ; из второй из оставшихся -

- C_2^1 ; из четвертой - 1 пар. \Rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

бес бар:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 1 =$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot 20 \cdot 84 =$$

$$4 \cdot 6720 \cdot C_{11}^2$$

Отв: ~~6720~~ - C_{11}^2
26880

Уг треуг ласмл

$$C_6^3 = 20$$

$$C_9^3 = 84$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$|x - y - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$y \leq x \leq 2 + y$$

Сума двох корней двух чисел - целое \Rightarrow
сумма корней - целые числа

$$0 \leq \sqrt{1 - |x - y - 1|} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\text{Если } \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 1, \text{ то}$$

$$x - y - 1 = 0 \quad x = y + 1$$

$$\begin{aligned} 2y + x - 2y - y^2 - 2y - x - y^2 - x \\ -2y^2 - 2y = 0 \quad 2y(y + 1) = 0 \quad y = 0 \quad x = 1 \\ y = -1 \quad x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Если } \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0$$

$$\begin{aligned} |x - y - 1| = 1 \rightarrow x - y - 1 = 1 \quad x - y = 2 \quad x = y + 2 \\ x - y - 1 = -1 \quad x = y \quad \text{засечка} \downarrow < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y + x - 2y - y^2 - 4y - x - y^2 = 4 \\ 2y^2 + 4y + 4 = 0 \quad y + 2 = 0 \quad y = -2 \quad x = -4 \end{aligned}$$

$$2x + 2y - 2x - x^2 - x^2 = 4$$

$$-4x^2 = 4 \quad x = 1$$

Отв: $y = 0 \quad x = 1 \quad y = -1 \quad x = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

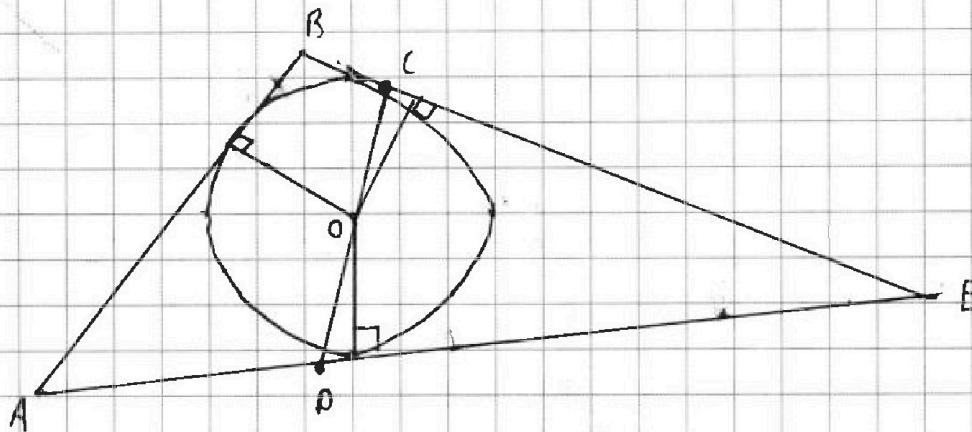
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим дерево, из которого состоит 1 дерево.
Он же состоит из деревьев, где 5, 6, 7 и 9 дерев
или с дер., где одна деревня. Рассмотрим
такие бар. Такие 2 дер. Сразу можно для
→ (других \Rightarrow из других деревьев
получить в эту деревню \Rightarrow можно не писать бар).
 \Rightarrow Все деревни из 1 деревней состоят из
дер. с дер. 5, 6, 7 и 9.

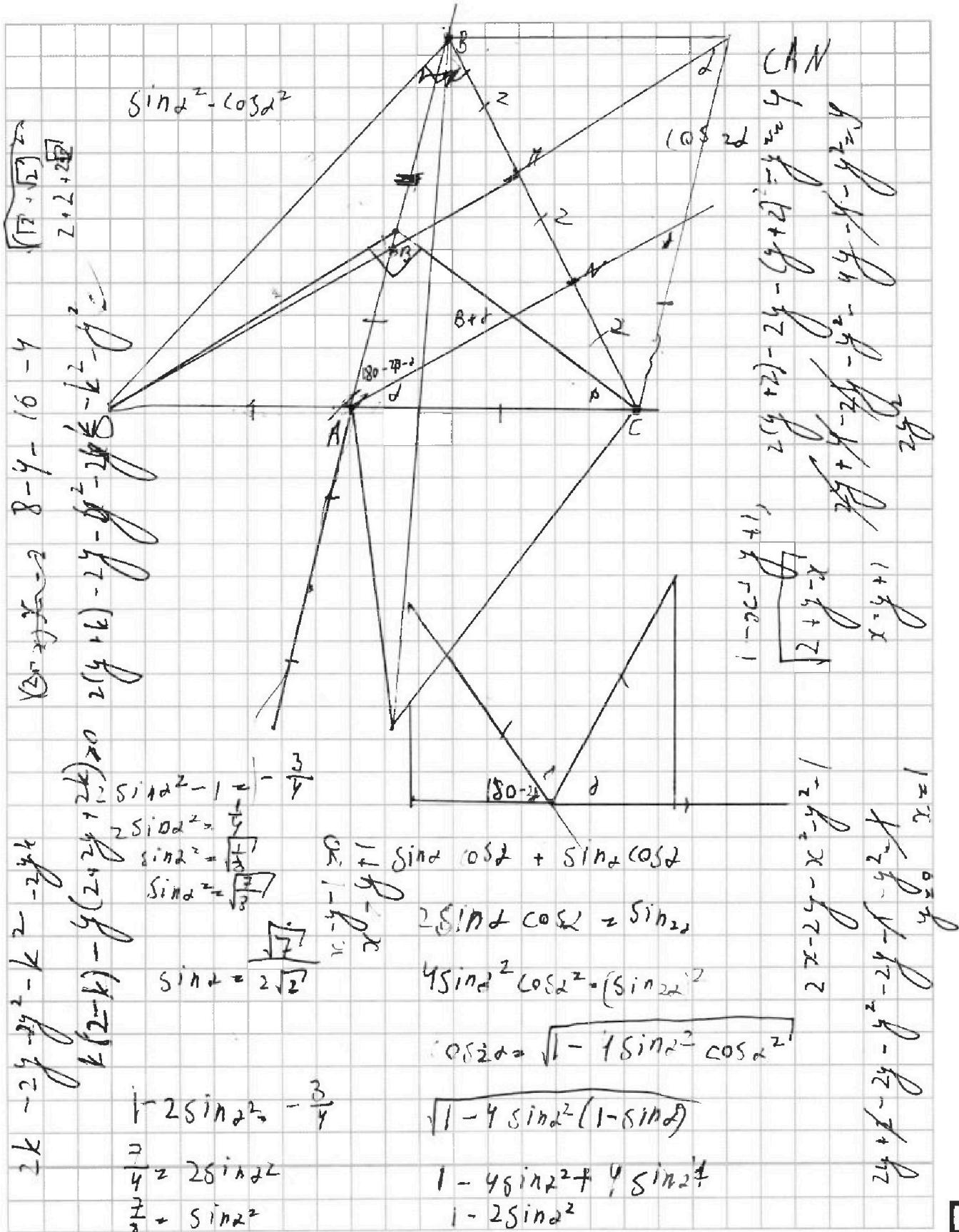
Рассмотрим эти четыре деревни «дерева»
между собой. Дерево ровно 3. Всё через
смежные города и не через города
посредине, кроме них \Rightarrow этих групп на 4 вершины
составляй, но в них нет узлов, кроме
также конечно же гранических групп между группами деревьев
не попадают \Rightarrow таких деревьев \Rightarrow 4 дерева на
4 вершинах $n-1$ ребра \Rightarrow каждая группа 4 вер-
шинам 3 ребра \Rightarrow получаем 24 дерева \Rightarrow 4 на
24 города (1 деревеню \Rightarrow ответ: 28 деревень)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

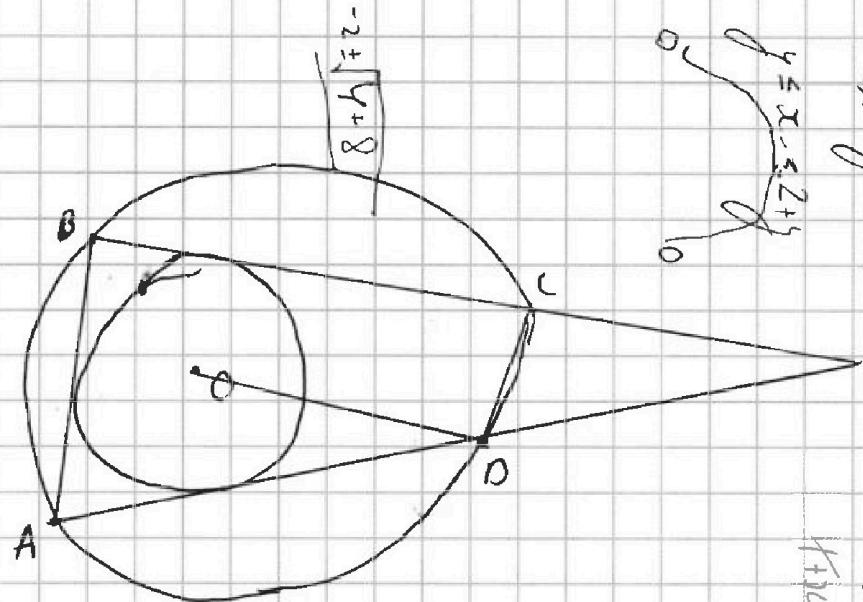




На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$-1 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$0 \leq x - y \leq 2$$

$$y \leq x \leq y + 2$$

$$x = y + k$$

$$0 \leq k \leq 2$$

$$2x - x^2 - 2y - y^2 \geq 0$$

$$2x - x^2 \geq 2y + y^2$$

$$2y + 2k - y^2 - 2yk - k^2 \geq 2y + y^2$$

$$2k - 2y^2 - 2yk - k^2 \geq 0$$

$$2k - k^2 \geq 2y^2 + 2yk$$

$$\frac{k(2-k)}{2} \geq y(y+k)$$

$$2(y+k) - 2y - (y+k)^2 - y^2 \quad 1 - y + k - y - 1 = 0$$

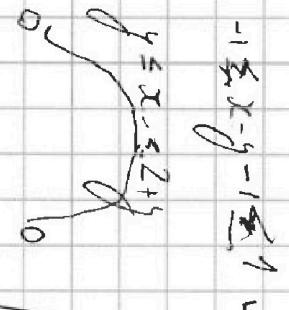
$$2y + 2k - 2y - y^2 - 2yk - k^2 - y^2$$

$$-2y^2 - 2yk - k^2 + 2k$$

$$-2y^2 - 2yk$$

$$-2y^2 - 2yk - k(k-2)$$

$$\frac{(2-(x-1))^2 - (y+1)^2}{2}$$



$$2x - 2y - x^2 - y^2 + 1 - 4\sqrt{1 - 12x - 3y - 11} = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

