



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ 1 _ ИЗ _ 1 _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9(t^2 - 9) = 0$$

x_1, x_2 - решения

Если есть 2 корня, то дискриминант положителен. \Rightarrow

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

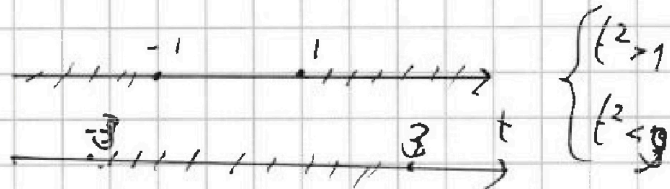
Если $x_1 \cdot x_2 > 0$, то по th. Виета $9(t^2 - 9) > 0$

$$t^2 > 1$$

$$8t^2 - 9t^2 + 9 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

$$t^2 < 9$$



$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

\uparrow кетим $\Rightarrow 19p^4$ - кетимал $\Rightarrow p^4$ - кетимал $\Rightarrow p=2$,
всего все группы примет числа кетимал \Rightarrow

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$2b^2 - 4b + 31b - 62 = 0$$

$$2b(b-2) + 31(b-2) = 0$$

$$(2b+31)(b-2) = 0$$

$$b = -\frac{31}{2} \quad b = 2 \Rightarrow a = 14$$

\uparrow
 b - кетимал \Rightarrow
не подходит

Ответ: $a = 14$ $b = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BC = 6 \Rightarrow BM = MN = NC = 2$

$AN \parallel DM \quad MC = 2NC \Rightarrow$

NA - сред. линия Δ

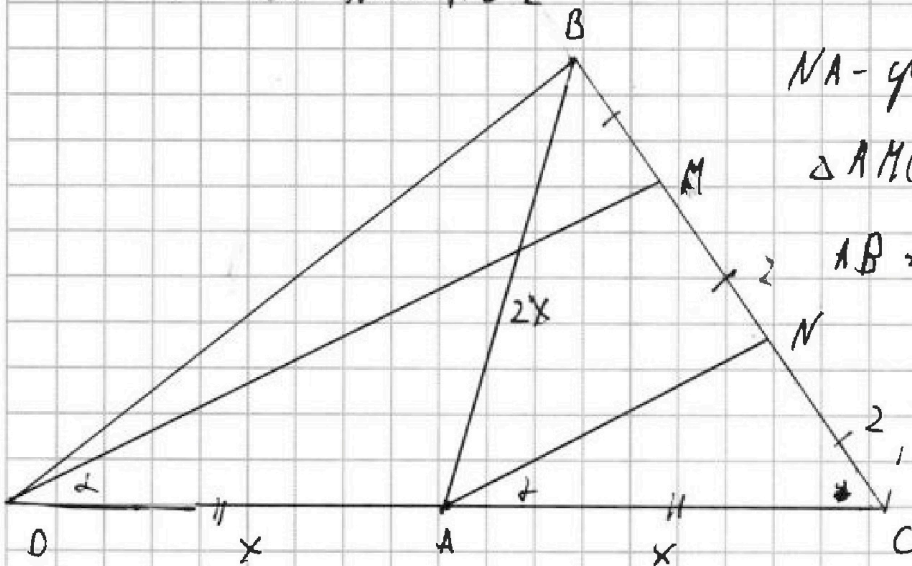
$\Delta AMC \Rightarrow DA = AC \Rightarrow$

$AB = 2 \cdot C$

$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$

$NA \parallel DM \Rightarrow$

$\angle MDC = \alpha$



$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

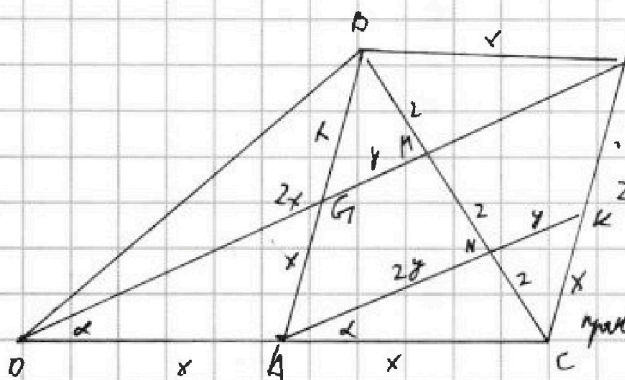
$-\frac{3}{4} = 1 - 2\sin^2 \alpha$

$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$

$\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}}$



пробегим FC, что

$FC \parallel AB \quad FC = AB,$

$\square ABFC$ -

паралелограмм $BM = MC \Rightarrow$

DM параллельна

через F \Rightarrow

По th. Фалеса $BG = AG$, ведь $BM = MC \quad BG \parallel AN$

Если $AN = 3y$, то $BG = y$ на параллельно $\Rightarrow MK = y \Rightarrow AK = 3y$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

th cos

$$x^2 = x^2 + 9y^2 - 2\cos\alpha \cdot 3y \cdot x$$

град КС

$$4 = x^2 + 9y^2 - 2\cos\alpha \cdot 2y \cdot x$$

гр Δ ANC

$$9y^2 = 6\cos\alpha \cdot yx$$

$$y = \frac{2}{3}\cos\alpha x$$

4x²

$$9y^2 = 2\cos\alpha \cdot x$$

$$4 = x^2 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 x^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3}\cos\alpha x^2$$

$$4 = x^2 \left(1 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3} \right)$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3}}$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}} = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 3}$$

Ответ: $AB = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 3}$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим мы выбрали каких-то 3 школьника, чтобы они сели в один ряд. Их рассадим - 1 вариант. Везде свободных мест нет \Rightarrow 1 место на первую парту, везде остальные встали немо. Второй сядет на вторую парту, везде третий встает немо.

Если мы выбрали двух школьников и посадили в один ряд, то сядут также записавшие:

к - мальчик в - девочка х - пустая

- 1) к в х
- 2) к х в
- 3) х к в
- 4) в х к

в этих случаях перед мальком сядет девочка. \Rightarrow количество вариантов

зависит от того, как мы распределим предметы учеников по партам

Выборать ряд, где 2 человека - 4 вар, посадить их - 4 вар
Выборать в него людей - C_{11}^2 . Выборать третье место в первый из оставшихся - C_3^3 ; во второй из оставшихся - C_6^3 ; в четвертой - 1 вар. \Rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

всего вариантов:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 1 =$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot 20 \cdot 84 =$$

$$4 \cdot 6720 \cdot C_{11}^2$$

Ответ: ~~6720~~ $\cdot C_{11}^2$
26880

из трех частей

$$C_6^3 = 20$$

$$C_9^3 = 84$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$|x - y - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$y \leq x \leq 2 + y$$

Сумма корней квадратного уравнения - целое \Rightarrow
сами корни - целые числа

$$0 \leq \sqrt{1 - |x - y - 1|} \leq 1 \Rightarrow$$

Если $\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 1$, то

$$x - y - 1 = 0 \quad x = y + 1$$

$$2y + x - 2y - y^2 - 2y - x - y^2 = x$$

$$-2y^2 - 2y = 0 \quad 2y(y + 1) = 0$$

$$\begin{matrix} y = 0 & x = 1 \\ y = -1 & x = 0 \end{matrix}$$

Если $\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0$

$$|x - y - 1| = 1$$

$$x - y - 1 = 1$$

$$x - y = 2$$

$$x = y + 2$$

$$x - y - 1 = -1$$

$$x = y$$

дискриминант ≤ 0

$$2y + x - 2y - y^2 - 4y - x - y^2 = 4$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{4}$$

$$2y^2 + 4y + 4 = 0 \quad (y + 2) = 0 \quad y = -2 \quad x = 4$$

$$2) x = y \quad 2x - 2x - x^2 - x^2 = 4$$

$$-2x^2 = 4 \quad x$$

Ответ: $y = 0 \quad x = 1 \quad y = -1 \quad x = 0$

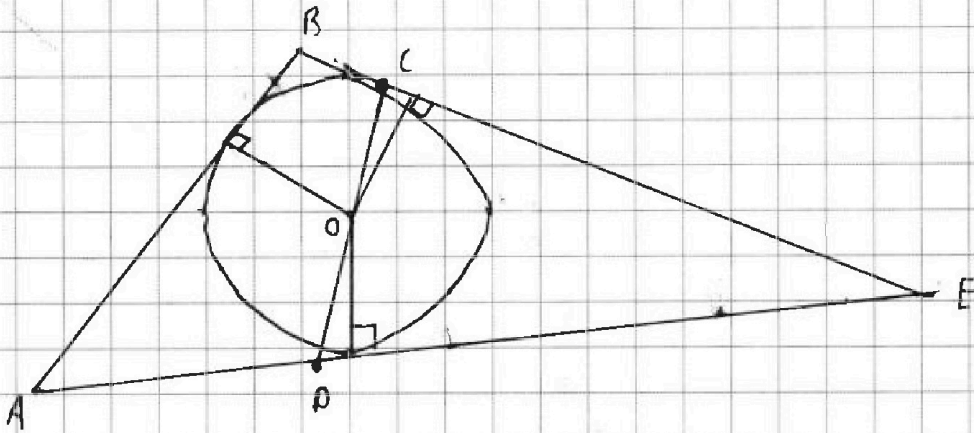


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим дерево, из которой выйдут 1 дерево.
Та или другая с задан, где 5, 6, 7 и 9 верш
или с дер., где один дерева. Рассмотрим
такой вер. Эти 2 дер. являются только друг
→ (другие) → из других деревьев
начать в эту ветвь ⇒ можно не может быть.
⇒ Все деревья с 1 деревом связаны с
дер. с верши 5, 6, 7 и 9.

Рассмотрим эти четыре дерева и верши
между ними. Дерев равно 3. Ведь через
оставшиеся верши мы не можем никаки
пробить, крате них ⇒ этот граф на 4 вершинных
связный, но в нем нет циклов, иначе
так можно добраться между верши дву-
мя способами ⇒ это дерево ⇒ у дерева на
n вершинных n-1 ребра ⇒ между этими 4 вер-
шинами 3 ребра ⇒ осталось 24 верши ⇒ у нас
24 верши с 1 деревом ⇒ ответ: 28 деревьев



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a triangle ABC and its orthic triangle. The diagram shows triangle ABC with altitudes AD, BE, and CF intersecting at H. The orthic triangle is formed by the feet of these altitudes. Angles are labeled with α and β . The orthic triangle is inscribed in ABC, and ABC is inscribed in the orthic triangle.

Left side notes:

- $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$
- $\sqrt{17} \cdot \sqrt{2}$
- $2 + 2 + 2\sqrt{2}$
- $8 - 4 - 16 - 4$
- $2(y+k) - 2y - y^2 - 2y^2 - k^2 - y^2$
- $2k - y - y^2 - 2y^2 - k^2 - y^2$
- $2k - y - y^2 - 2y^2 - k^2 - y^2$
- $1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{3}{4}$
- $2\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1}{8}$
- $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$
- $\frac{2}{4} = 2\sin^2 \alpha$
- $\frac{2}{8} = \sin^2 \alpha$

Right side notes:

- CAN
- 4
- $2(y+k) - 2y - y^2 - 2y^2 - k^2 - y^2$
- $2(y+k) - 2y - y^2 - 2y^2 - k^2 - y^2$
- $1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{3}{4}$
- $2\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1}{8}$
- $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$
- $\frac{2}{4} = 2\sin^2 \alpha$
- $\frac{2}{8} = \sin^2 \alpha$

Bottom notes:

- $\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$
- $2\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$
- $4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin 2\alpha)^2$
- $\cos 2\alpha = \sqrt{1 - 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$
- $\sqrt{1 - 4\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}$
- $1 - 4\sin^2 \alpha + 4\sin^4 \alpha$
- $1 - 2\sin^2 \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА ___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - 2x + 1$

$(b+12)^2$

$(a+b)^2 + 3(a+b)$

$(a+b)(a+b+3)$

$(b^2 + 12)(b^2 + 15) = 19p$

$(b^2 + 12)(b^2 + 15) = 304$

$(b+12)^2 + 2(b+12)b + b^2 + 3(b+12) + 3b$

$(a+b)^2 + 3(a+b)$

$(a+b)(a+b+3) = 19p$

$(2b+12)(2b+15) = 19p$

$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$

$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$

$a = b + 12$

$\triangle ABC$ with inscribed circle

19

16

304

19 \cdot 16

$\sqrt{2} - 3$

$\sqrt{5} \begin{matrix} 6 & 7 & 2 & 0 \\ - & 8 & & \\ \hline 0 & 2 & 5 & 2 & 8 & 0 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \times 19 \\ 8 \\ \hline 152 & 42 \end{matrix}$

1 2 0
12
11-3
 $\sqrt{2}$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \cdot & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 24-9 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & 1 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 49 \\ 1 = 54 \\ 64 - 49 \\ 15 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$

0 A B C

$\begin{matrix} 0 & 1 & 7 & 17 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 18 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 9 & 19 & 32 & 84 & & & \\ 3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & \\ 4 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ 5 & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 6 & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \times 24 \\ 80 \\ \hline 672 & 0 \end{matrix}$