



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
C AN
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 ^{различных}
 Квадратное уравнение имеет 2 действительных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$. По т. Виета произведение корней — свободный коэффициент. Тогда составим сис-му: уравнения

$$\begin{cases} 16 - 2t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0 \\ 9t^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4t^2 + 36 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4t^2 > -36 \\ t^2 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 < 9 \\ t^2 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{t < -3} \\ \cancel{t < 3} \\ \cancel{t < 3} \end{cases} \quad \begin{cases} t < -1 \\ t > 1 \\ t > -3 \\ t < 3 \end{cases}$$

Ответ: ~~(-3; -1)~~

Ответ: (-3; -1) ∪ (1; 3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Из условия получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a^2+2ab+b^2+3a+3b=19p^4 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) (a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

Разность любых чисел $(a+b)$ и $(a+b+3)$ нечётна, поэтому из этих 2-х чисел ~~1~~ одно точно делится на 2. Значит их произведение чётно. $19p^4 : 2 \Leftrightarrow p^4 : 2 \Leftrightarrow p : 2$. Существует только одно чётное простое число, это число 2. Значит $p=2$. Вернёмся к системе.

$$\begin{cases} a-b=12 \\ (a+b)(a+b+3)=19 \cdot 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=12 \\ (a+b)(a+b+3)=19 \cdot 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=12 \\ (a+b+3) = \frac{19 \cdot 16}{a+b} \end{cases}$$

Пусть $x=a+b$. Сделаем замену.

$$\begin{cases} a-b=12 \\ \frac{19 \cdot 16 - x^2 - 3x}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=12 \\ x \neq 0 \\ x^2 + 3x - 19 \cdot 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=12 \\ x \neq 0 \\ \begin{cases} x=16 \\ x=-19 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=12 \\ \del{x \neq 0} \\ \begin{cases} a+b=16 \\ a+b=-19 \end{cases} \end{cases}$$

Поскольку a и b — натур. числа, $a+b \neq -19$

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a+b=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=2 \end{cases}$$

Ответ: $a=14$; $b=2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

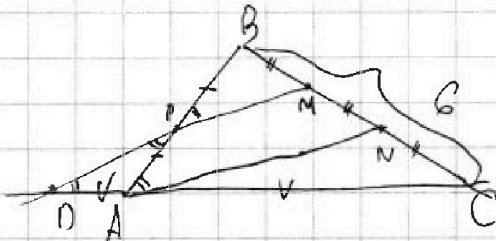
N3

$$AB = CD$$

По т. Фалеса: $AD = AC$; $BP = PA$.

Из условия $\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AP = AD$.

Тогда $\triangle ADP - \triangle PDB$, по ~~двум~~ двум OP .



$\angle ADP = \angle APD$ по св-ву $\triangle ADP$.

$\angle APD = \angle BPM$ как вертикал.

$\angle BPM = \angle BAN$ по св-ву пар. прямых.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

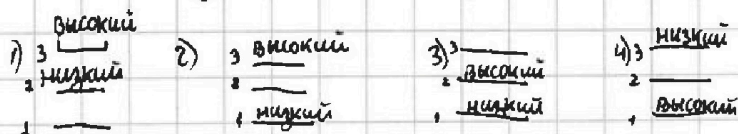
СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Рассчитаем кол-во способов выбрать кто и на каком ряду будет сидеть. Получится ~~$C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$~~ способов, т.к. мы для каждого из трёх рядов выбираем 3 человека, а двое оставшихся садим на последний. Теперь посмотрим кол-во расстановок в пределах одного ряда. На 3-х рядах, где сидят по 3 человека, посадить их можно единственным образом (самый высокий сзади, а самый низкий спереди). А на ряду, где расположатся 2 человека, можно посадить их четырьмя способами:



Ж. Ещё осталось выбрать ряд, на к-ром сидят 2 человека (4 способа это сделать)

Тогда всего способов расставить ребят $4 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4$

Ответ: $16 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

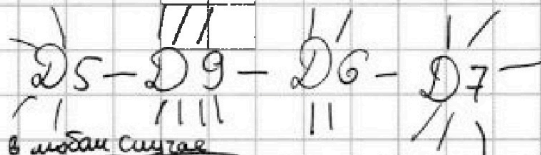


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Приведу пример (ваши "крупные" деревья)



3 дороги соединяют "крупные" деревья, а сумма всех остальных дорог равна кол-ву не "крупных" деревьев. Пусть a и b — кол-во ~~гор~~ дорог, исходящих из городов, стоящих соответственно с левого и правого краёв нашей последовательности, а c и d — кол-во дорог из городов, стоящих соответственно на 2-м и 3-м местах. Тогда общее число деревьев считается по формуле:

$$4 + (a-1) + (b-1) + (c-2) + (d-2) = a + b + c + d - 2 = 5 + 9 + 6 + 7 - 2 = 25$$

Ответ: 25 дорог деревьев



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2}$$~~

N 7

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

~~Раскроем модуль, рассмотрим 2-е слагаемое. Подкоренное выражение должно быть равно нулю неотрицательно~~

Рассмотрим подкоренное выражение 2-го слагаемого и раскроем модуль при $y \leq x-1$ $1-x+y+1 = y-x+2 \geq 0$, т.к. подкоренное выражение неотрицательно

Отсюда $\begin{cases} y = x-1 \\ y = x-2 \end{cases}$

при $y \geq x-1$ $1+x-y-1 = x-y \geq 0$

Отсюда $\begin{cases} y = x \\ y = x-1 \end{cases}$

~~Но стоит проверить, при каких значениях переменных первое подкоренное выражение тоже неотрицательно.~~

~~1) $y = x-2$.~~

~~1) при $y = x-2$~~

~~$$2x-2(x-2)-x^2-(x-2)^2$$~~

~~$$2x-2(x-2)-x^2-(x-2)^2 = 2x-2x+4-x^2-x^2+4x-4 = -2x^2+4x =$$~~

~~$$= -2(x^2-2x)$$~~

~~$$-2(x^2-2x) \geq 0$$~~

~~$$x^2-2x \leq 0$$~~

~~$$(x-1)^2 \leq 1$$~~

~~РАСПАД~~

~~$$-1 \leq x-1 \leq 1$$~~

~~$$0 \leq x \leq 2$$~~

2) при $y = x-1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x - 2(x-1) - x^2 - (x-1)^2 = 2x - 2x + 2 - x^2 - x^2 + 2x - 1 = -2x^2 + 2x + 1$$

$$-2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

~~Для того чтобы решить это неравенство, рассмотрим график 2р-к рав-ва.~~

~~Это парабола ветвями вниз. $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-2)(1)}}{-4} = 2, 0$~~

~~Корни: $\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-2)(1)}}{-4}$ т.е. 4 и -2~~

Теперь подставим полученные y .

~~при $y = x$~~

при $y = x$

$$\sqrt{-2x^2} + \sqrt{1 - |x - x - 1|} = 2$$

$$-2x^2 = 4$$

$$x^2 = -2$$

⊖

2) при $y = x - 1$

$$\sqrt{2x - 2(x-1) - x^2 - (x-1)^2} + \sqrt{1 - |x - x - 1|} = 2$$

$$\sqrt{2x - 2x + 2 - x^2 - x^2 + 2x - 1} + 1 = 2$$

$$\sqrt{-2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$-2x^2 + 2x + 1 = 1$$

$$-2x^2 + 2x = 0$$

$$-2x(x-1) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Тогда получаем $x=0; y=-1$ и $x=1; y=0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \text{ при } y = x - 2$$

$$\sqrt{2x - 2(x-2) - x^2 - (x-2)^2} + \sqrt{1 - |x - x + 2 - 1|} = 2$$

$$\sqrt{2x - 2x + 4 - x^2 - x^2 + 4x - 4} + 0 = 2$$

$$\sqrt{-2x^2 + 4x} = 2$$

$$-2x^2 + 4x = 4$$

$$-2x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 < 0$$

⊖

$$\text{Ответ: } (0; -2); (1; 0)$$

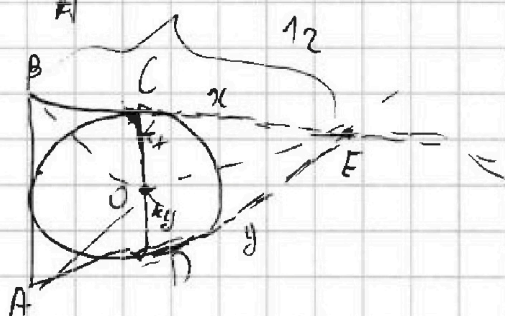
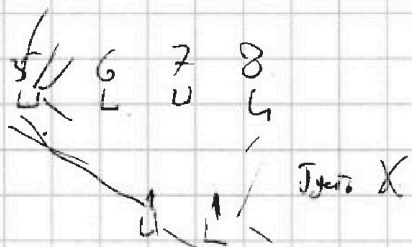
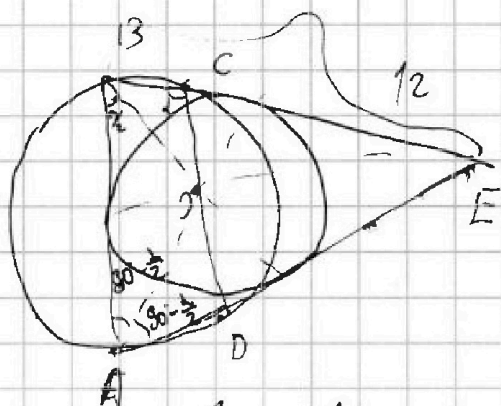
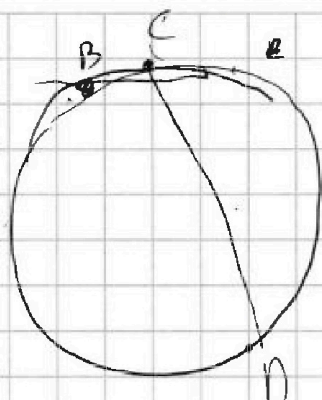


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$5 + 6 + 7 + 8 + (x - 4)$$

дере без шишек

$$\frac{26 + (x - 4)}{12}$$

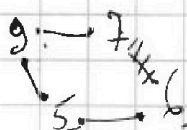
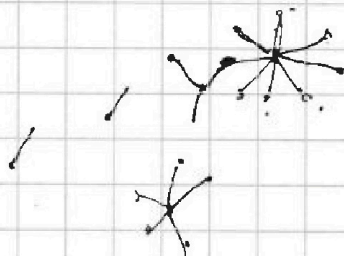
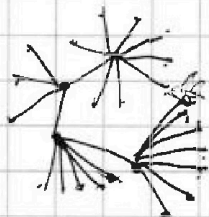
всего
друз
с повторами

ABCD - квадрат

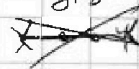


длина "друз"

1) между
"кружками"
3 друзей
3) ост. x



1) кружочки - деревья квадрат
оставшиеся друзья - друзья





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} - 2 \neq \sqrt{|-x-y-1|} = 2$
 $y=x$
 $\sqrt{(x-1)^2 + (x+1)^2} - 2 = 2$
 $(x-1)^2 + (x+1)^2 - 2 = 4$
 $-x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 + 2 = 4$
 $2x^2 = 4$
 $y = x = \pm\sqrt{2}$
 $(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) - 2 = 2\sqrt{2} - 2 + 2 + 2\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2}$

$y = x+1$
 $\sqrt{(x-1)^2 + (x+1)^2} - 2 + \sqrt{|-x-x-1-1|} = 2$
 $y = x-1$
 $\sqrt{(x-1)^2 + (x-1)^2} - 2 + \sqrt{|-x-x+1-1|} = 2$
 $x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 - 2 = 1$
 $2x^2 - 2x - 2 = 1$
 $2x^2 - 2x - 3 = 0$
 $x^2 - x - 1 = 0$
 $D = 1 + 4$
 $x = 1 \pm \sqrt{5}$

$y = x\sqrt{2}$
 $\sqrt{(x-1)^2 + (x\sqrt{2})^2} - 2 + \sqrt{|-x-x\sqrt{2}-1|} = 2$
 $2(x-1)^2 - 2 = 4$
 $x^2 - 2x + 1 - 2 - 4 = 0$
 $x^2 - 2x - 5 = 0$
 $D = 4 + 20 = 24$

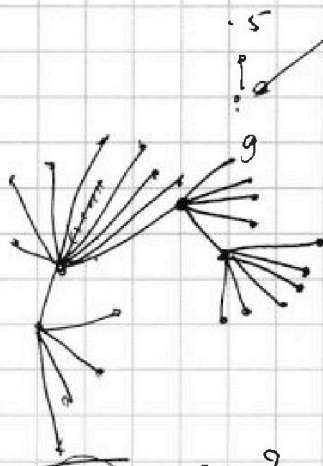


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^3} + 0 = 9$$

$$-2x^2 = 4$$

6) два от. дорожки к деревьям

- 5-9-7-6
- 5 6 9 7
- 5 6 7 9
- 5 7 6 9
- 5 7 9 6
- 6 5 9 7
- 6 5 7 9
- 6 7 9 5
- 6 7 5 9
- 6 9 5 7
- 6 9 7 5

если (краю)

- 5 и 7 ||| 7 и 5
- 5; 7 → +90
- 5; 6 → +9
- 5; 9 → 12
- 7; 6 → 11
- 7; 9 → 14
- 6; 9 → 13

в центр

- 6 и 9 ||| 9 и 6
- 6; 9 → +7 +4 = 11 | 25
- 7; 9 → 12 | 25
- 6; 7 → 9 | 25
- 5; 9 → 10 | 25
- 6; 5 → 7 | 25
- 7; 5 → 8 | 25

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$\sqrt{-(x-1)^2 - (y-1)^2 + 2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

$$\sqrt{-(x-1)^2 + (y-1)^2} + 2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 0 \Rightarrow x=y=1$$

$$\sqrt{2x-2(x-2)-x^2-(x-2)^2} + \sqrt{1-|x-x+2-1|} = 2$$

$$\sqrt{2x-2x-4-x^2-x^2+4x-4} = 2$$

$$-2x^2+4x=4$$

$$(I) \quad 2x^2-2x=-2$$

$$(II) \quad x^2-2x+2=0$$

$$4-4=0 \Rightarrow \emptyset$$

$$y \geq x-1$$

$$x \leq y+1$$

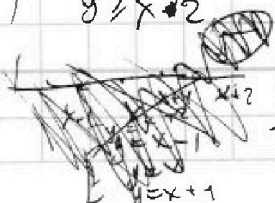
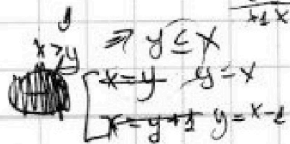
$$y < x-1$$

$$\sqrt{1-x+y+2}$$

$$\sqrt{y-x+2}$$

$$y+2 \leq x$$

$$y \geq x-2$$



$$x-2 \leq y$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

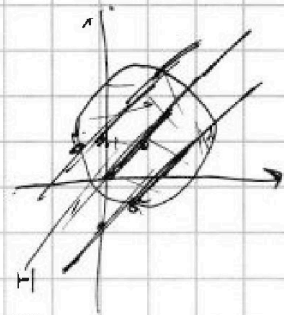
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) пусть $1 \text{ на } 1 \text{ на } 1$

$$C_{11}^2 \cdot C_{11}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$C_{12}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 4 = 4 \cdot (C_{12}^3)^3$$



$$-2(x^2 - 2x) \geq 0$$

$$x^2 - 2x \leq 0$$

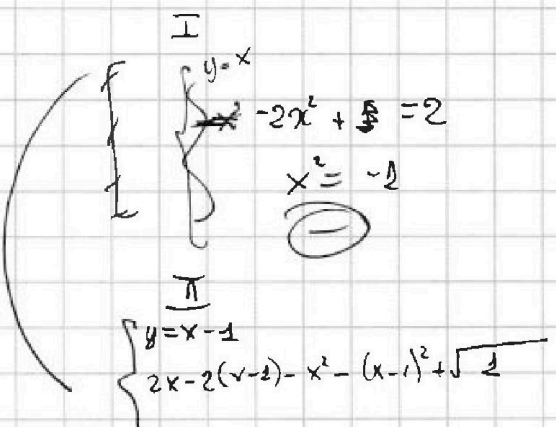
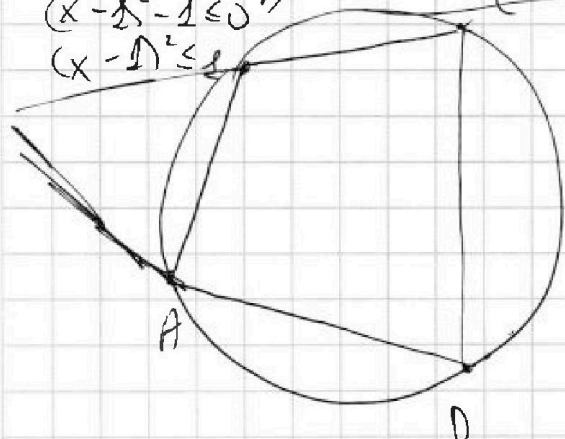
$$(x-1)^2 - 1 \leq 0 \quad B$$

$$(x-1)^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

B	B	-	H
-	H	B	-
H	H	H	B



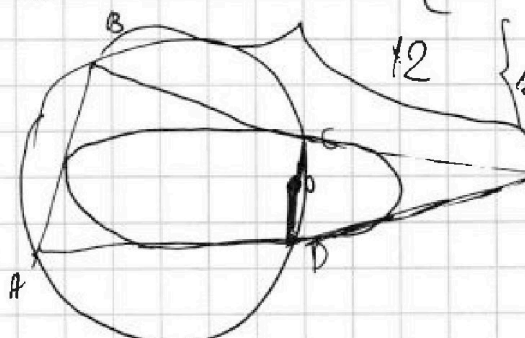
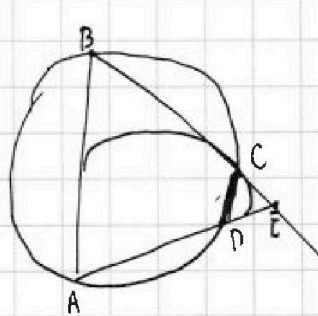
$$y = x$$

$$-2x^2 + 4x = 2$$

$$x^2 = -1$$

$$y = x - 1$$

$$2x - 2(x-1) - x^2 - (x-1)^2 + \sqrt{2}$$



$$y = x - 1$$

$$2x + 2x + 2 + 4x^2 + 2x + 1 + 1 = 0$$

$$2 + 2x = 0$$

$$1 + x = 0$$

$$x = -1$$

$$y = -2$$

$$y = x - 2$$

$$2x - 2(x-2) - x^2 - (x-2)^2 + \sqrt{2}$$

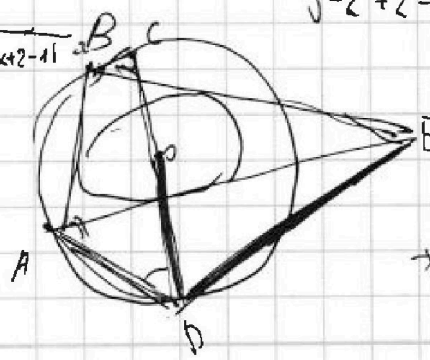
$$2x^2 - 2x + 4 + x^2 - 4x + 4 = 2$$

$$4x^2 = 2$$

$$x = 2$$

$$y = 0$$

$$\sqrt{4-4}$$



$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2 \geq -2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$$