



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

Условие на то, чтобы существовало два корня  
это  $D > 0$ .

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = \\ = 16 - 4t^2 > 0 \Leftrightarrow 16 > 4t^2 \Leftrightarrow 4 > t^2 \Leftrightarrow \boxed{2 > |t|}$$

Пусть теперь  $x_1$  и  $x_2$  - корни нашего уравнения.

$\Rightarrow$  по теореме Виета:  $x_1 \cdot x_2 = 4t^2 - 4 > 0$

$$\Leftrightarrow 4t^2 > 4 \Leftrightarrow t^2 > 1 \Leftrightarrow |t| > 1$$

$\Rightarrow$  Значит,  $1 < |t| < 2$ , или

$$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 40$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$p \in \mathbb{P}$$

$$a, b = ?$$

обозначим значение выраж. за  $t$

$$\Rightarrow 17p^5 = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = t$$

Если  $a+b=40$ , то  $a-b = a+b-2b < a+b-2 = 38$ , т.к.  $b \in \mathbb{N}$ ,  $\Rightarrow b \geq 1$ .

Т.к. 17 — простое и  $(a-b)(a-b+15) : 17$ , то

$$\begin{cases} (a-b) : 17 \\ (a-b+15) : 17 \end{cases}$$

аналогично  $b-a < 38 \quad | \cdot (-1)$

$$\Rightarrow a-b > -38$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -38 < a-b < 38 \\ -23 < a-b+15 < 53 \end{cases}$$

1) Если  $a-b : 17$ , то

$$a-b \in \{-34; -17; 0; 17; 34\}$$

(1.1) (1.2) (1.3) (1.4) (1.5)

$$\text{1.1) } \begin{cases} a-b = -34 \\ a-b+15 = -19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b+15 = -19$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t &= (-34) \cdot (-19) = \\ &= 2 \cdot 17 \cdot 19 \neq 17p^5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2} = 20 + \frac{a-b}{2}$$

1.1. остается



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1.2) \begin{cases} a-b = -17 \\ a-b+15 = -2 \end{cases} \Rightarrow t = (-17) \cdot (-2) = 17 \cdot 2 \neq 17p^5$$

1.2. отпадает

$$1.3.) \begin{cases} a-b = 0 \\ a-b+15 = 15 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \cdot 15 = 0 \neq 17p^5$$

1.3. отпадает

$$1.4.) \begin{cases} a-b = 17 \\ a-b+15 = 32 \end{cases} \Rightarrow t = 17 \cdot 32 = 17 \cdot 2^5 - \text{подходит}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(a-b) + (a+b)}{2} = \frac{17 + 40}{2} = 40 + \frac{17}{2} \notin \mathbb{N}$$

1.4. отпадает

$$1.5) \begin{cases} a-b = 34 \\ a-b+15 = 49 \end{cases} \Rightarrow t = 34 \cdot 49 = 2 \cdot 17 \cdot 7^2 \neq 17 \cdot p^5$$

1.5. отпадает

$$2) \text{ Если } a-b+15 \div 17 \\ \Rightarrow a-b+15 \in \{ \overset{2.1}{-17}, \overset{2.2}{0}, \overset{2.3}{17}, \overset{2.4}{34}, \overset{2.5}{51} \}$$

$$\text{Т.к. } a-b+15 < 53 \\ \overset{-23}{-}$$

$$2.1) \begin{cases} a-b+15 = -17 \\ a-b = -32 \end{cases} \Rightarrow t = (-17) \cdot (-32) = 17 \cdot 2^5 =$$

- подходит

$$a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2} = \frac{40 - 32}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$b = 40 - 4 = 36$$

$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$  этот случай полностью подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2.2) \quad a - b + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \cdot (a - b) = 0 \neq 17 \cdot p^5$$

2.2. отпадает

$$2.3) \quad \begin{cases} a - b + 15 = 17 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 17 \cdot 2 \neq 17 \cdot p^5$$

2.3. отпадает

$$2.4) \quad \begin{cases} a - b + 15 = 34 \\ a - b = 19 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 34 \cdot 19 = 2 \cdot 17 \cdot 19 \neq 17 \cdot p^5$$

2.4. отпадает

$$2.5) \quad \begin{cases} a - b + 15 = 51 \\ a - b = 36 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 51 \cdot 36 = 3 \cdot 17 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17 \neq 17 \cdot p^5$$

2.5. отпадает

Все случаи разобраны. Подойдет лишь один ответ в случае 2.1.

Ответ:  $\begin{cases} a = 4 \\ b = 36 \end{cases}$

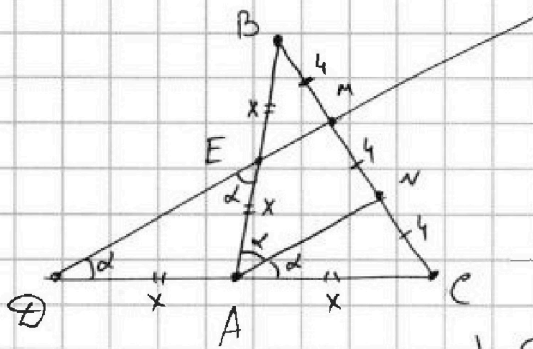


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1)  $N \notin$  отрезку  $MC$ , т.к. если это не так и  $N \in$  прямой  $BC$  и  $BM = MN$ , то  $N = B$ , ~~то~~ противоречие.  
2)  $\Rightarrow BM = MN = NC = \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$

3) Пусть  $AN \cap BC = E$  — точка пересечения  $AN$  и  $BC$  —  $E$ .  
 $\Rightarrow$  т.к. в  $\triangle BCN$   $EM \parallel CN$ ,  $M$  — середина  $BC$ , то  $EM$  — его средняя линия.  $\Rightarrow E$  — середина  $BN$ .

4) т.к. в  $\triangle ADC$   $AN \parallel CD$ ,  $N$  — середина  $CD$ , то  $AN$  — его средняя линия.  $\Rightarrow A$  — середина  $DC$ .  
А т.к.  $AB = CD$ , то  $\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = BE = EA = DA = AC$ .

5) Пусть  $\angle CAN = \alpha$ .  $\Rightarrow \angle ADC = \alpha$ , т.к.  $DM \parallel AN$   
6)  $\angle DEA = \angle EDA = \alpha$ , т.к.  $EA = DA$  / Док-но в пункте 4.  
7)  $\angle EAN$ , он же  $\angle BAN$ , равен  $\angle DEA = \alpha$ , т.к.  $DM \parallel AN$ .

8)  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $\angle CAN = \alpha \Rightarrow \cos(2 \cdot \angle CAN) = \cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$ .

9) Теорема косинусов для  $\triangle ABC$ , где  $2x$  обозначена половина длины  $AB$ , т.е.  $AC = x$ ,  $AB = 2x$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \cos(\angle BAC) \cdot AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow 12^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2x \cdot x$$

$$12^2 = 5x^2 + x^2 = 6x^2 \Rightarrow 2 \cdot 12 = x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow AB = 2x = \boxed{4\sqrt{6}}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}$$



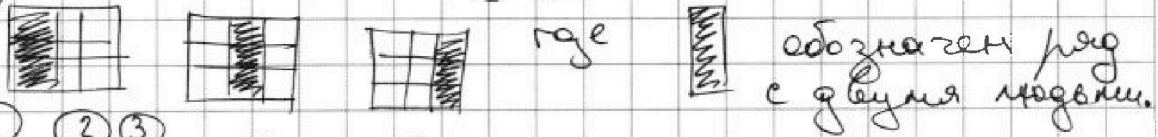
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

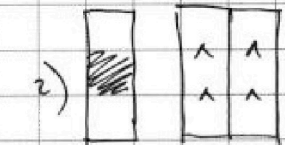
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. утенки на разных рядах никак не "взаимодействуют" друг с другом, то можно рассмотреть ряд с пропуском (где сидит 2 человека) отдельно, а потом умножить наш ответ на количество способов разместить этот ряд относительно лево других. Таких способов 3:



ряд ① ② ③



Назовём ряд 1 - ряд с двумя медведями ("ряд 1" не всегда то же, что и "первый" ряд). Остальные два: 2 и 3 (см. рис. слева). Знак "л" означает, что человек снизу на рисунке (т.е. дальше от доски) выше человека (который сидит выше на рисунке). То есть если есть 2 человека ростом а и б, то такая картинка означает, что  $a > b$ .

Есть глобально 3 способа разместить пустое место в ряду 1 (см. рис.) Всего способов

распределить людей по рядам:  $\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$

$\binom{3}{1} \binom{2}{1}$  - можно сначала выбрать

людей на ряд 2, потом на ряд 3, оставшихся - на ряд 1. Люди на своём ряду должны сидеть по возрастанию роста. То есть, человек на ряду 2 и 3 всегда должны сидеть по возрастанию роста.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, есть лишь 1 способ рассадить выбран-  
ных  $C_8^3 \cdot C_5^3$  способами людей в на свои  
места (на рядах 2 и 3). На ряду 1 это  
суждение верно лишь для случаев 1) и 3).  
Тогда для случаев 1) и 3) количество способов рас-  
садить людей — по  $C_8^3 \cdot C_5^3$  способа. То есть  
в сумме  $2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ . В случае 2) на ряду 1  
двух людей можно рассадить двумя спосо-  
бами, т.к. между ними есть пустое место.  
 $\Rightarrow$  Это еще  $2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$  способов.

Итого  $4 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ . Умножаем, как было  
оговорено в начале, на 3, и получаем

Ответ:  $12 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$  способов.



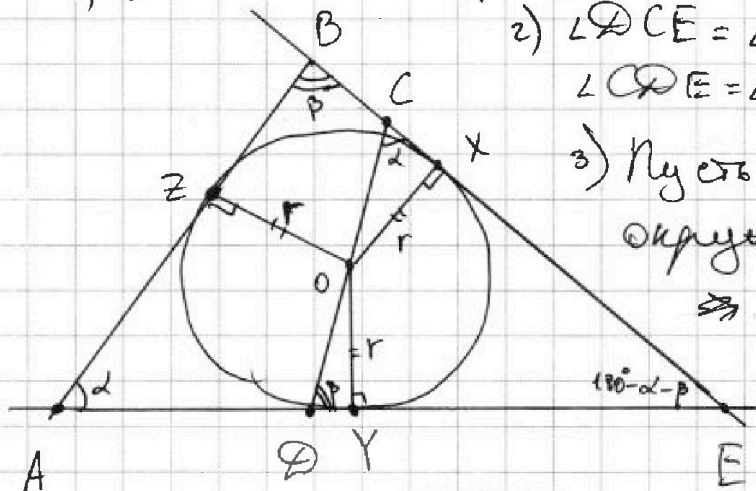
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$X, Y, Z$  — точки касания! Пусть  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$



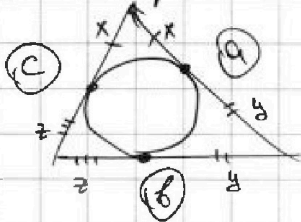
2)  $\angle OCE = \angle A = \alpha$   
 $\angle OBE = \angle B = \beta$  | Т.к. ABCD  
вписан. в окружн.

3) Пусть радиус ~~в~~ впис. окружн. в  $\triangle ABE$   $r$ .

4) Th. sin:  $\frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{AE}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}$

$\Rightarrow AE = \frac{BE \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin \beta}{\sin \alpha}$ ;  $AB = \frac{BE \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$

$a, b, c$  — стороны



5) Если в окружн. Т.к. отрезки касательных равны, то (см. рис.)  
 $x = \frac{a + c - b}{2}$ ,  $y = \frac{a + b - c}{2}$ ,  $z = \frac{b + c - a}{2}$ .

$\Rightarrow EX = EY = \frac{EB + EA - AB}{2} = \frac{10 + \frac{10 \sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{10 \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}}{2} =$   
 $= 10 \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta - (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}{2 \sin \alpha} =$

$= 5 \cdot \left( \frac{\sin \alpha (1 - \cos \beta) + \sin \beta (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \right)$

6)  $\angle OY = \frac{r}{\sin \beta}$

$\Rightarrow \angle O = \frac{r}{\sin \beta}$

7)  $\angle O + \angle E = \frac{r}{\sin \beta} + \frac{r}{\sin \alpha} + 5 \cdot \left( \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \right)$

8)  $r = \frac{AB + BE - AE}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) S_{\triangle ABE} = r \cdot \frac{AB + BE + AE}{2} = r \cdot 5 \cdot \frac{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta))}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{BE \cdot AB \cdot \sin \beta}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin \beta}{2} = 50 \sin \beta$$

$$\text{Из } \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{50 \sin \alpha}$$

$$r = 10 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}$$

$$9) \text{ } \frac{r}{\sin \beta} + \frac{r}{\tan \beta} + 5 \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} =$$

$$= 5 \cdot \left( \frac{2 \tan \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} + \frac{2 \cos \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\tan \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} \right) +$$

$$+ \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \Bigg) \text{ } \text{ } =$$

$$= 5 \cdot \left( \frac{2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} + \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos^2 \beta}{\sin \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \right) - \text{Min?}$$

Минимум будет достигаться при  $\sin(\alpha + \beta) = 0, 2$

$$\sin \alpha = 1: 5 \cdot \left( 0 + 0 + \frac{1 + 0 - 0}{1} \right) = 5$$

$$\Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 0^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \beta = 0$$

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. из любой деревни есть единственный маршрут до любой другой, то если мы представим остров как граф, где вершины - деревни, а рёбра означают самые короткие пути между двумя деревнями, то этот граф будет деревом. Пусть всего было  $n$  деревень. Тогда, раз наш граф дерево, было  $n-1$  рёбер.

Всего количество рёбер в графе можно подсчитать как сумму степеней вершин, делённую на два.

$$\rightarrow \text{Всего рёбер было } n-1 = \frac{3+4+5+7+(n-4) \cdot 1}{2}$$

Т.к. 4 вершины имеют 3, 4, 5 и 7 рёбер, а оставшиеся  $n-4$  - по одному.

$$\Rightarrow 2n-2 = 19 + n-4$$

$$n = 19 - 4 + 2 = 19 - 2 = 17$$

Ответ: На острове может быть только 17 деревень



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение  
Т.к.  $x, y \in \mathbb{Z}$ , то пусть  $2x + 2y + x^2 - y^2 = \pm 1$ ,

$$1 - |x + y - 2| = z_2 \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{Z}.$$

⇒ Если  $\begin{cases} z_1 \neq 0 \\ z_2 \neq 0 \end{cases}$ , то  $\begin{cases} z_1 \geq 1 \\ z_2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} \geq 2$

$\geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 > 1$ . Противоречие.

⇒ Когда-то одно из чисел  $z_1$  или  $z_2$  равно нулю. Тогда корень из него тоже ноль. Тогда корень из другого равен  $1 - 0 = 1$ , то есть второе число равно 1.

То есть:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases} \text{ 1 случай.} \\ \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 0 \end{cases} \text{ 2 случай.} \end{cases}$$

1 случай: 
$$\begin{cases} 2x + 2y + x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - |x + y - 2| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x + y) \\ |x + y - 2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x + y) \\ x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \cdot 2 = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x(x + y) - (x^2 + y^2) = 2xy = 2^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Т.к.  $x$  и  $y$  равноправны, то без ограничения общности  $x = 0$ . Потом ответа нужно будет не забыть "отзеркалить".

$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$  Подходят ~~еще~~ ответы:

$$\begin{bmatrix} (0; 2) \\ (2; 0) \end{bmatrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 случай: 
$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 \\ 1-|x+y-2|=0 \end{cases}$$

2.1) Если  $x+y \geq 2$ , то:

$$1-|x+y-2|=1-x-y+2=3-(x+y)=0$$

$$\rightarrow x+y=3$$

$$\Rightarrow 2(x+y)=1+x^2+y^2=6$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 3^2 - 5 = 4 = 2xy$$

$$\Rightarrow xy=2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=5-2 \cdot 2=5-4=1$$

без ограничений  
области.

$$\Rightarrow x-y=\sqrt{1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \quad y = 3 - \frac{3+1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{(x+y) + (x-y)}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

подходят ответы:

$$\begin{bmatrix} (2; 1) \\ (1; 2) \end{bmatrix}$$

~~Этот случай не подходит~~

2.2) Если  $x+y < 2$ , то:

$$1-|x+y-2|=1+x+y-2=x+y-1=0$$

$$\Rightarrow x+y=1$$

$$\Rightarrow 2(x+y)-1=x^2+y^2=2-1=1$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 2xy = 1^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично можно сказать, что без ограничения общности  $x=0$ .

$\rightarrow y = 1 - x = 1$  Итого еще ответы:

$\begin{bmatrix} (1; 0) \\ (0; 1) \end{bmatrix}$

Все случаи разобраны.

Ответ:  $(1; 0)$

$(0; 1)$

$(2; 0)$

$(0; 2)$

~~$(1; 1)$~~

$(1; 2)$

$(2; 1)$



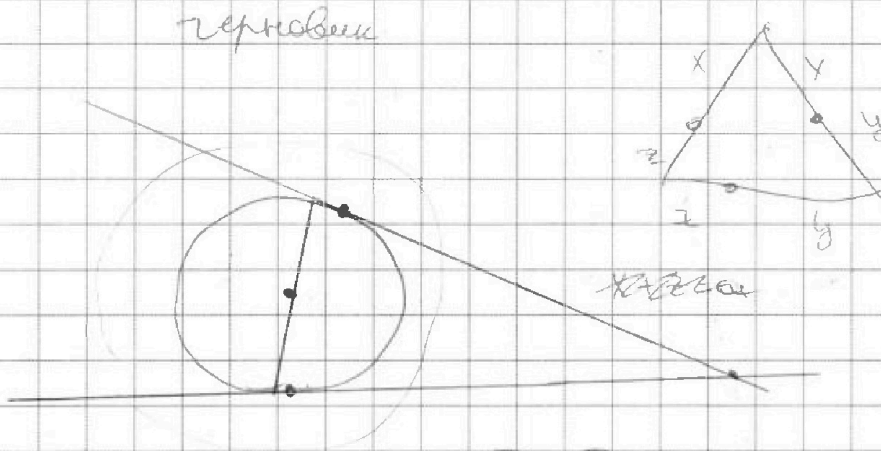
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

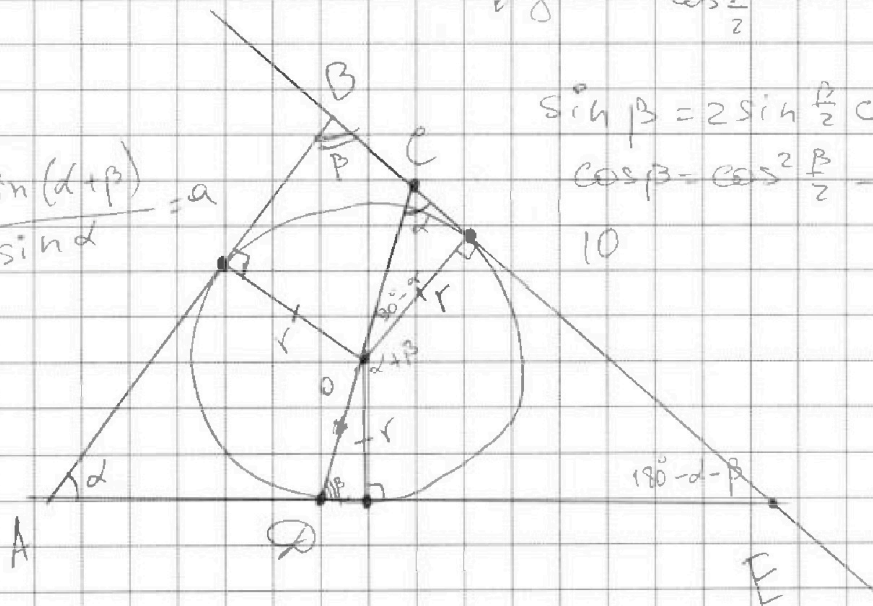
черновик



$$EA + AD = r + r.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{10 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = a$$



$$\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

10

$$\frac{10 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = b$$



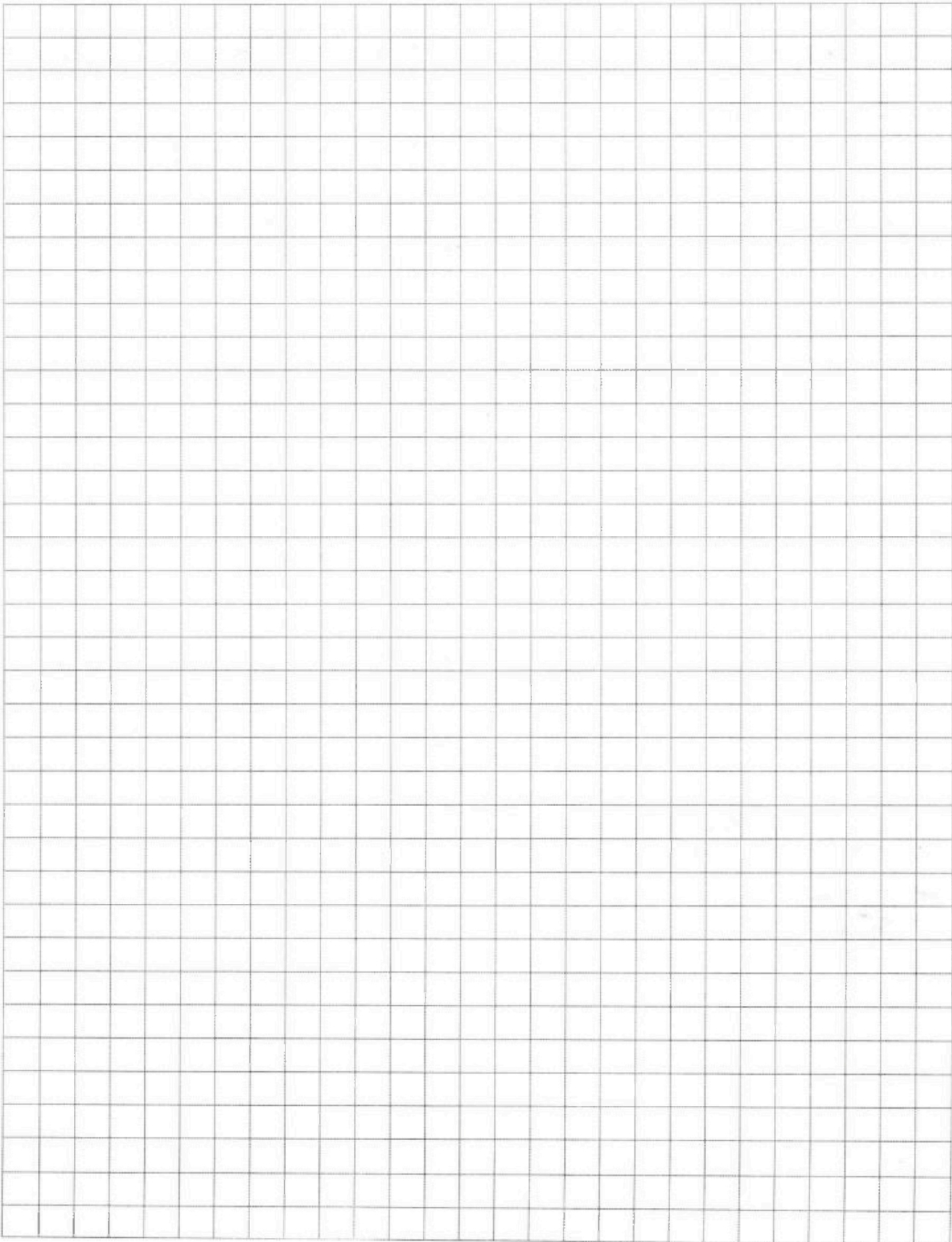


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





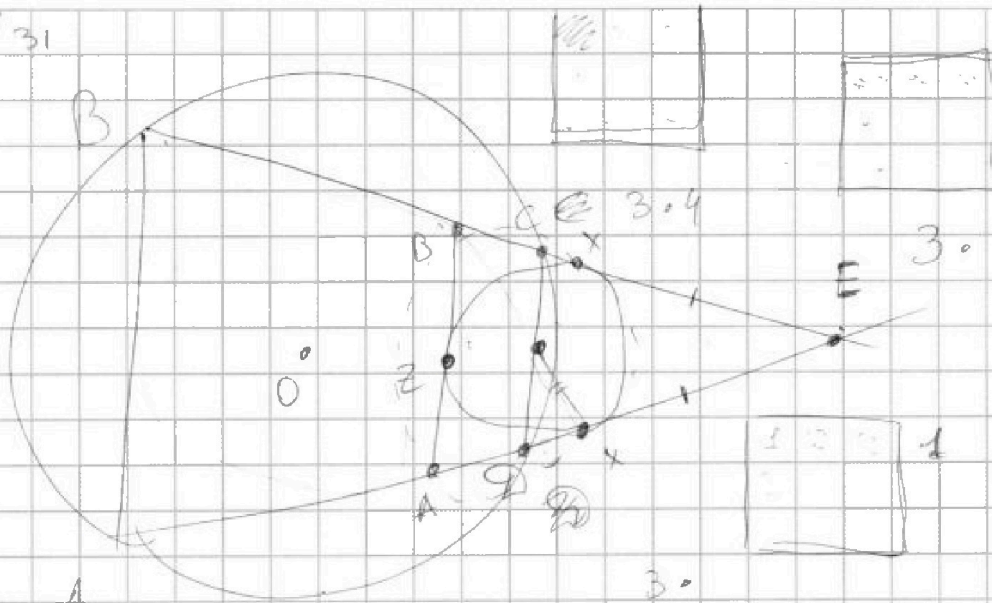
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16/31



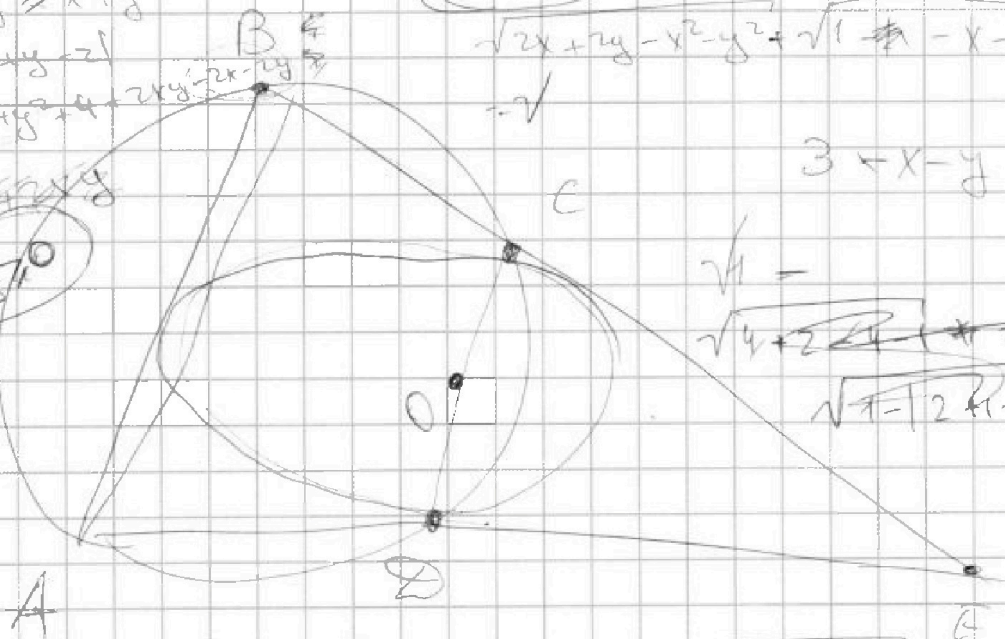
$$2x + 2y \geq x^2 + y^2$$

$$17, |x + y - 2|$$

$$17, x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 2x - 2y$$

$$\Rightarrow x + y \geq 0$$

$$x + y \geq 0$$



$$x + y \geq 2$$

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x - y + 2} =$$

$$= \sqrt{}$$

$$3 - x - y$$

$$\sqrt{4 + 2 - 2x - 2y + 1 - x - y + 2} = \sqrt{7 - 3x - 3y}$$

$$\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} = 1$$

$$\sqrt{8 - 2 - 16 - 1} =$$

$$\sqrt{16 - 1} =$$

=

- ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓  
 (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

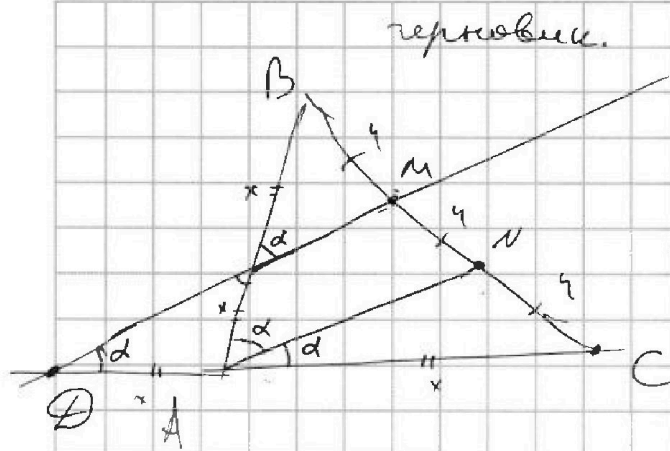


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CO \text{ - ?}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{4}$$

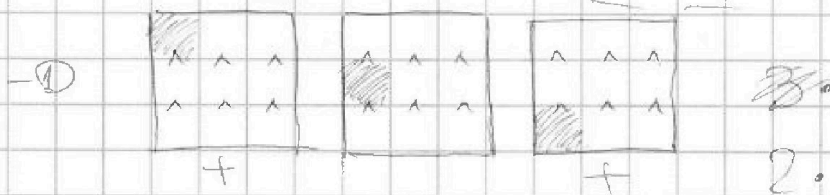
$$2\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow 2\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2(x+y-2)^2 = x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 2x - 2y$$



1 2 3 4 5 6 7 8

$$C_8^3 \cdot C_6^3 = 2$$