



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0.$$

$$\begin{cases} D > 0 & - \text{решаем}$$

$$\begin{cases} 9t^2 - 9 > 0 & - \text{приведем к квадратному трехчлену по т. Виета.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32t^2 - 36t^2 + 36 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4t^2 + 36 > 0 \end{cases}$$

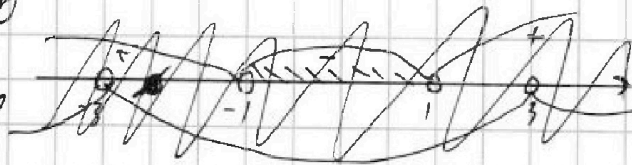
$$\begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



Ответ:  $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N} \quad a - b = 12. \Rightarrow a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4, \quad p - \text{простое}$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

$$2(b+6)(2b+15) = 19p^4 \Rightarrow 19p^4 : 2 \Rightarrow p^4 : 2 \Rightarrow p : 2 \Rightarrow p = 2.$$

$\div 2$

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2^4$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8.$$

$$2b^2 + 27b + 90 - 19 \cdot 8 = 0.$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0.$$

$$\left[ b = -\frac{31}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит} \right]$$

$$\left[ b = \frac{4}{2} = 2. \right]$$

$$b = 2 \Rightarrow a = 14$$

Ответ:  $a = 14 \quad b = 2.$



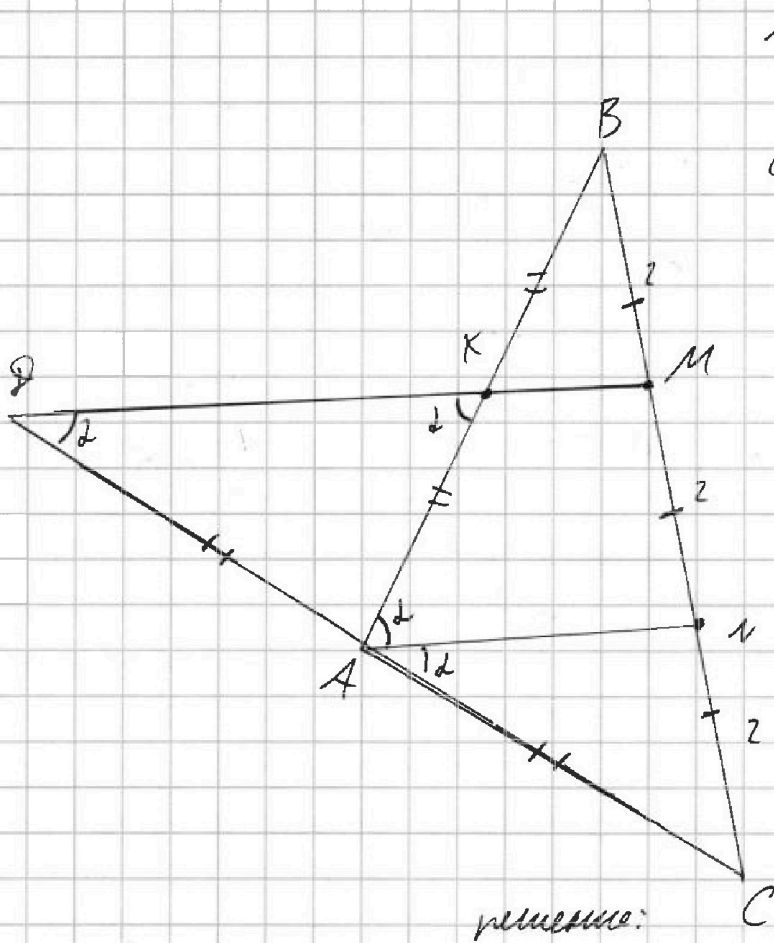


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CQ = ?$$

$$BC = 6$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

1)  $MK \parallel NA$   $\Rightarrow$   $KM$  - ср. лин.  $\Rightarrow BK = AK = \frac{1}{2} AB$   
 $M$  - ср.  $BN$

2)  $AN \parallel MQ$   $\Rightarrow$   $AN$  - ср. лин.  $\Rightarrow QA = AC = \frac{1}{2} CQ = \frac{1}{2} AB$   
 $N$  - ср.  $MC$

т.е.  $AQ = AC = BK = KA$ .

тогда  $\triangle AKQ$  -  $\text{н.о.}$ ,  $\angle AKQ = \angle QKA$  (т.к.  $AKQ$  -  $\text{н.о.}$ )  $\Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$   
 $\angle AOK = \angle QMA = \angle QKA$  (т.к.  $AKQ$  -  $\text{н.о.}$ )  $\Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$

3) по условию  $AC = x$ , тогда  $AB = 2AK = 2AC = 2x$ .

по т. косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC = 4x^2 + x^2 - (-\frac{3}{4}) \cdot 2x \cdot x = 5x^2 + 3x^2 = 8x^2$$

$$6^2 = 8x^2$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{8}} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = 2x = 3\sqrt{2}$$

$$6^2 = 8x^2 \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1,5\sqrt{2}$$

ответ:  $3\sqrt{2}$   $[AB = 2x = 3\sqrt{2}]$  ответ:  $3\sqrt{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

переходим на язык графов. ~~граф~~ <sup>вершины</sup> - вершины,   
 ребро - ребра, тогда по усл. граф связный   
 и не имеет циклов (т.е. маршрут между   
~~вершинами~~ <sup>вершинами</sup> единственен), но тогда наш граф   
 является деревом.

Пусть  $x$  - кол-во деревьев из которых вытекает   
 1 дерево, тогда в графе  $x$  вис. вершин (их счи-  
 тать нельзя!)

Всего в графе  $(x+4)$  вершин, тогда ребер   
 в графе  $(x+4-1) = \underline{x+3}$

посчитаем кол-во ребер через сумму степеней   
 вершин:

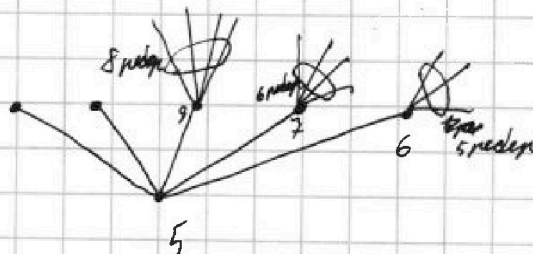
$$\text{кол-во ребер} = \frac{5+6+3+3+x}{2} = \frac{27+x}{2}$$

$$\text{т.е. } x+3 = \frac{27+x}{2}$$

$$2x+6 = 27+x$$

$$x = 21 \Rightarrow \text{вершин в графе равно } \underline{\underline{25}}$$

пример:



$$\text{всего вершин: } 1 + 5 + (8 + 6 + 6) = 11 + 14 = \underline{\underline{25}}$$

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2.$$

ОПЗ:

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x-y-1| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2+2x-1-y^2-2y-1 \geq 2 \\ |x-y-1| \leq 1 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$\begin{cases} x-y-1=1 & (1) \\ x-y-1=0 & (2) \\ x-y-1=-1 & (3) \end{cases}$$

(1)  $x-y-1=1 \Rightarrow x=y+2.$

$$(y+2-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$2(y+1)^2 \leq 2$$

$$(y+1)^2 \leq 1$$

$$\forall x \begin{cases} y+1=1 \\ y+1=0 \\ y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ x=1 \\ y=-1 \\ x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

подставляем в уравнение и получаем, что должны быть  $x$  и  $y$  не являются логично возвращены

(2)  $x-y-1=0 \Rightarrow x=y+1$

$$(y+1-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

заметьте, что при  $y \leq -2$ :  $y^2 + (y+1)^2 \geq 5$  - т.е. не подходит  
и также при  $y \geq 1$ :  $y^2 + (y+1)^2 \geq 5$  - т.е. не подходит.  
 $y=0$  и  $y=-1$  - подходят.

$\begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ x=0 \\ y=-1 \end{cases}$  подставляем в уравнение и получаем, что  $(1;0)$  и  $(0;-1)$  - корни

$$(3) \quad x - y - 1 = -1 \Rightarrow x = y$$

$$(y-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$2y^2 + 2 \leq 2$$

$$2y^2 \leq 0$$

$$y^2 \leq 0$$

$y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$  подставляем в уравнение и получаем, что  $(0;0)$  - не решение

Ответ:  $(1;0)$   $(0;-1)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

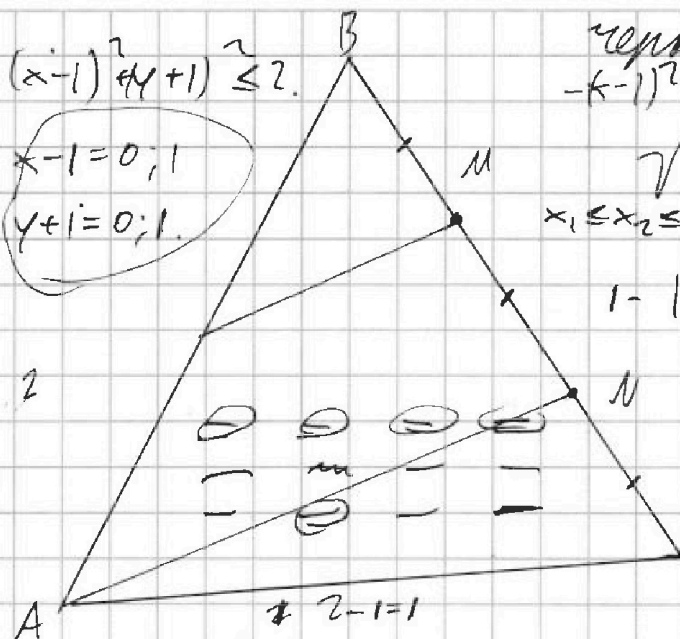
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$\begin{cases} x-1=0; 1 \\ y+1=0; 1. \end{cases}$$

Черныш  
 $-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 = 0 \Rightarrow 2$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} =$$

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$



$$1 - |x-y-1| \geq 0 \quad (1) \quad x-y=2$$

$$x=2+y$$

$$|x-y-1| \leq 1 \quad (2+y-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$2(y+1)^2 \leq 2$$

$$\begin{cases} x-y-1=1 \\ x-y-1=0 \\ x-y-1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} (y+1)^2 \leq 1 \\ y \leq -2 \end{cases}$$

$$-x^2 + 2x - y^2 - 2y \geq 0$$

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x-y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$AB - CD = ?$$

$$\cos(\angle EM) = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$1 - |2-1|^2 = 0$$

$$(2) \quad x=y+1$$

$$y^2 \geq 4$$

(2) 0:

$$-x^2 + 2x - 1 - y^2 - 2y - 1 + 2 \geq 0$$

$$-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 \geq 0$$

**CAN**

$$y^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$y = -1, 0;$$

0 3:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\ |x-y-1| \leq 1 \end{cases}$$

$$2+2-1-1=2$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$\begin{cases} x-y-1=1 & (1) \\ x-y-1=0 & (2) \\ x-y-1=-1 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \quad x=y$$

$$(y-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

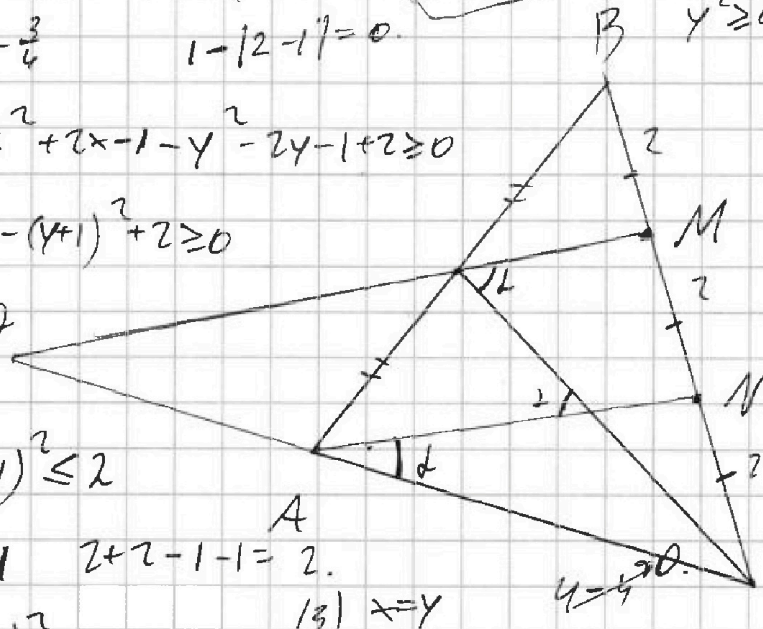
$$y^2 - 2y + 1 + y^2 + 2y + 1 \leq 2$$

$$2y^2 \leq 0$$

$$y=0$$

$$2y^2 + 2y + 1 \leq 2$$

$$2y^2 + 2y - 1 \leq 0$$



$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

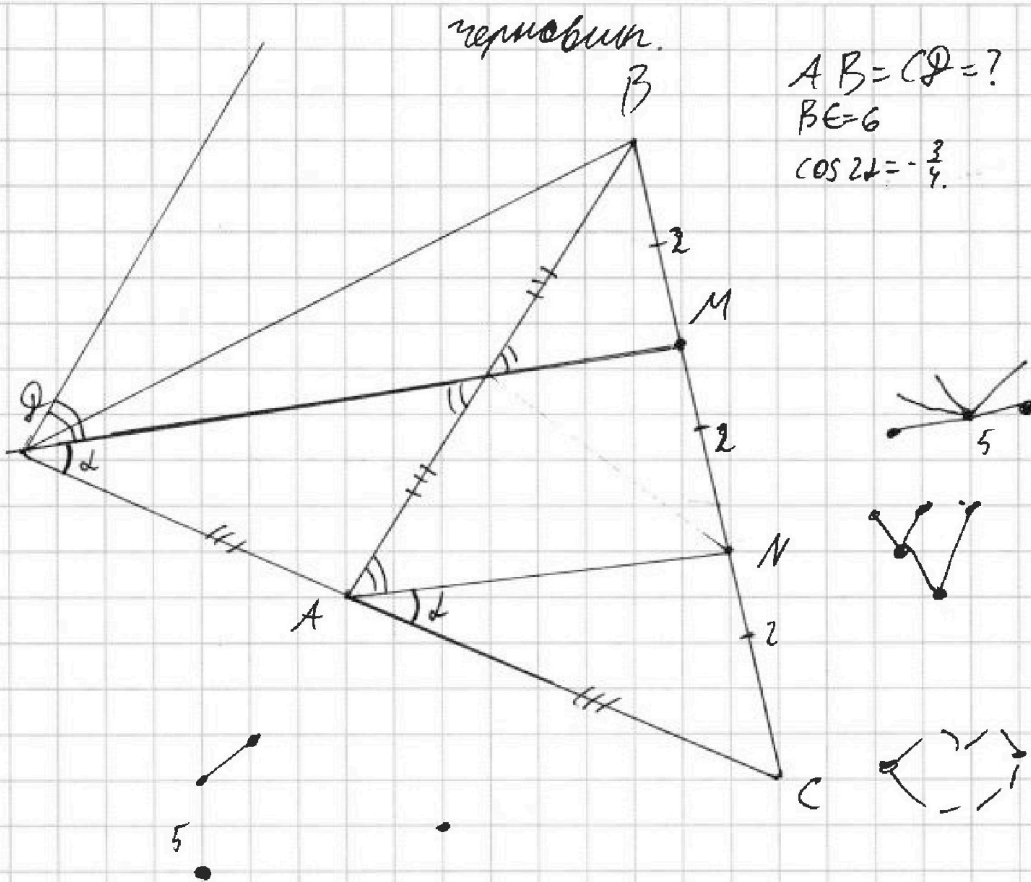


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

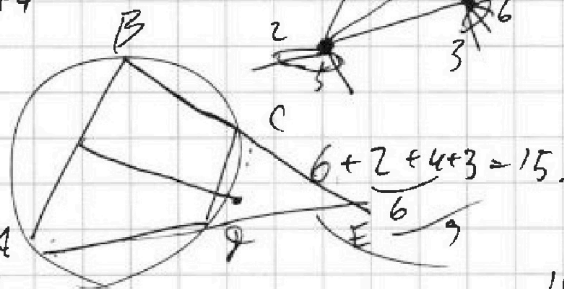


$$\leq 4 + 5 + 6 + 8 = 23.$$

$\uparrow 4$        $\uparrow 4$

max 23 - од.  
min 15 - од.

x - в.с. в.



ев матрица  $\rightarrow$   
 $\Rightarrow$  нет циклов  
 $\Rightarrow$  дерево.

$$1 + 5 + 7 + 6 + 5 = 10 + 3 + 6 = 25.$$

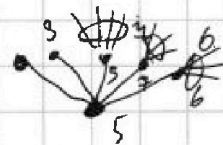
$$16 + 11 = 27$$

$(x + 4 - 1)$  - ребер.

$x + 3$  ребра в графе.

$$x + 3 = \frac{9 + 7 + 6 + 5 + x}{2}$$

$$2x + 6 = 27 \Rightarrow x = 21$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

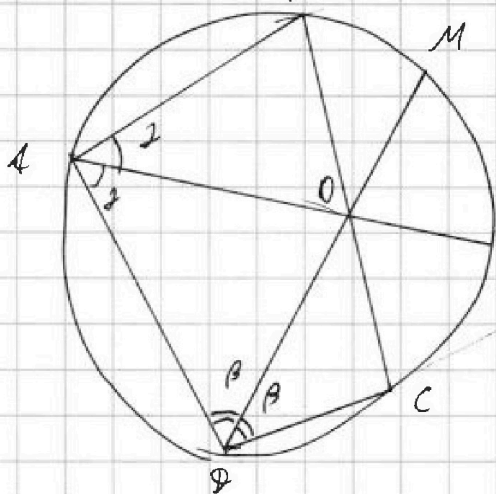
СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0 0  
1 2  
2...11 3...11

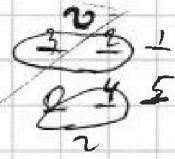
$10+9+...+1=55$  черновик.

$55+110+55=220$



M 1...10  
2...11

$\begin{cases} BN = NP \\ AM = MP, MC \end{cases}$

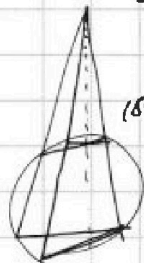
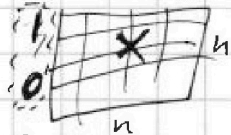


$BN - AM = NP - MC$

$MN - AB = MP + PC - CD - MN$

$AB = PC, AB + CD = 2MN$

$MN = \frac{AB + CD}{2}$



$180 - 90 + 2 = 90 + 2$

$1 \times 2 = 2$

$7 \cdot 7 \cdot 7$

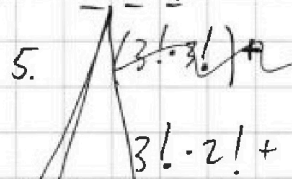
$2 \times 3 = 6 +$

$\frac{5}{D}$

за 5 - сподобно

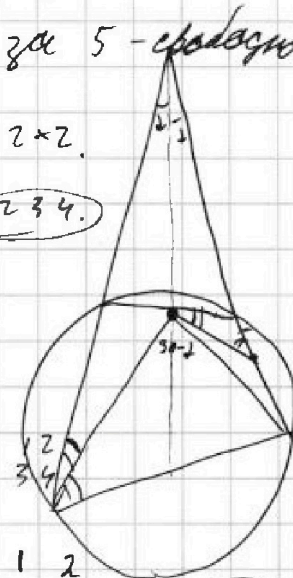
$n \times n = n!$  черновик?

$n \times n = (n+1)!$	1	2	4
$n(n+1)$		3	5
	1	2	4 1:



$3! \cdot 2! + 1234$

$2 \times 2$



11 0

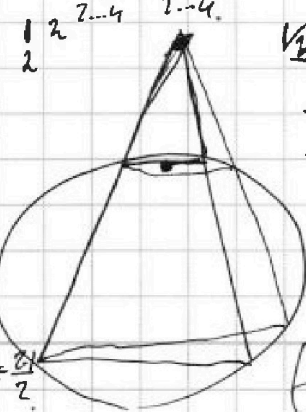
1 3	2 3	1 3	1 2	1 2
2 4	4	2 4	3 4	4 3

1: 7, 1: 7, 2: 7, 6

1, 2: 7, 7, 2, 3: 6, 2, 4: 5

1, 3: 6, 7, 8, 2, 8: 1, 2, 8: 1

1 2 12 13  
1...3 3 4 4 3  
2...4 2...4



$V_1, V_2, V_3, \dots$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{-}$

1...7, 2...8, 3...9, 2...10, 3...10

7

$1...9 = \frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{6 \cdot 7}{2} + \dots + \frac{2 \cdot 1}{2}$

$(\frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{6 \cdot 7}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 2}{2})$

1 3	3 1
2 4	4 2
1 2	2 1
3 4	4 3
1 2	2 1
4 3	3 4





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

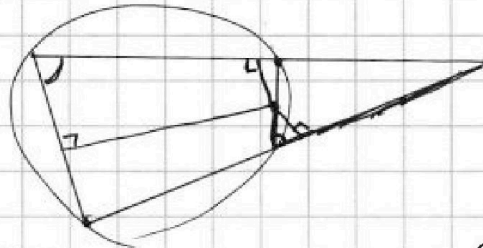
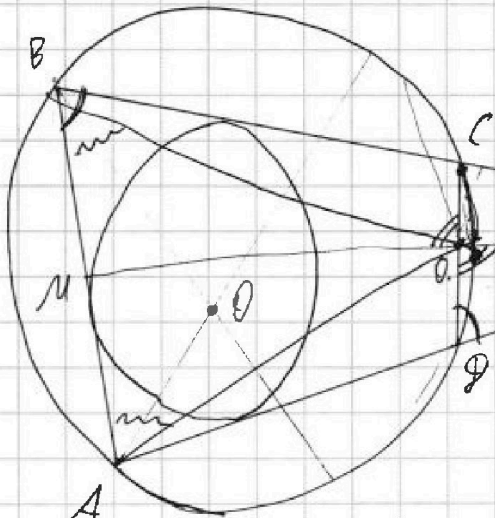
- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BE \sim \triangle EBO$

черновик



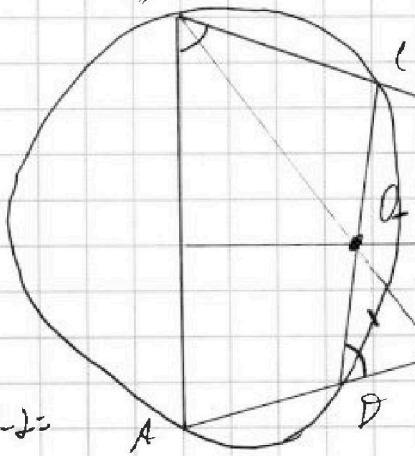
$EM^2 = EC \cdot EB$   
 $= EP \cdot PA$

$\frac{b}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow b = 2a$

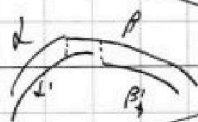
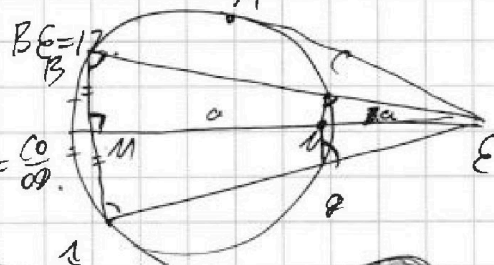
$\frac{a}{2} \cdot (AE + AM) = EP = 3a \cdot 2AM = 6a \cdot AM$

$\frac{EA}{6a} = \frac{AM}{MB} = \frac{CO}{OP}$      $\frac{AE + AM}{12} = \frac{EP}{12}$

$EP + PO = ?$



$AM = \frac{12}{11}$   
 $\frac{EA}{12} = \frac{AM}{MB} = \frac{CO}{OP}$



$\angle = \beta$      $\angle - \alpha' = \beta - \beta'$   
 $\angle_1 = \beta_1$

$AMC \sim \triangle PKE$

$\frac{AM}{PN} = \frac{MC}{NK} = \frac{3}{2}$

$PN = \frac{2AM}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{11} = \frac{8}{11}$

$EP + PN = \frac{2}{3} (EA + AM) = \frac{2}{3} \left( \frac{12}{11} + \frac{12}{11} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{24}{11} = \frac{16}{11}$

$2x - 2y - x^2 - y^2 = 1$

$1 + x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1 = 1$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

$y^2 = 1$



$0 \pm 1$   
 $\pm 1 \ 0$

