



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D = 32t^2 - 4(9t^2 - 9) = -4t^2 + 36 = -4(t^2 - 9) = -4(t-3)(t+3)$$

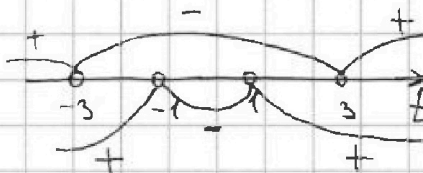
Чтобы было 2 различных корня,  $D$  должен быть больше 0,  
т.е.  $-4(t-3)(t+3) > 0$

По т. Виета:  $x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9 = 9(t^2 - 1) = 9(t-1)(t+1)$ , произведение корней должно быть положительным по условию, т.е.

$$9(t-1)(t+1) > 0;$$

Решим систему:

$$\begin{cases} -4(t-3)(t+3) > 0 \\ 9(t-1)(t+1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \\ (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ:  $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$a^2 + b^2 + 2ab + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

Если  $a-b=12$ ,  $b=a-12$ , тогда  $(2a-12)(2a-9) = 2(a-6)(2a-9) = 19p^4$ ;

$2(a-6)(2a-9) \equiv 0 \pmod{2}$ , значит и  $19p^4 \equiv 0 \pmod{2}$ , но  $19 \not\equiv 0 \pmod{2}$ ,  
тогда  $p^4 \equiv 0 \pmod{2}$ , но  $p$  - простое, единств. простое число, кратное 2 - 2;  
тогда  $p=2$ ,  $2(a-6)(2a-9) = 19 \cdot 16$

$$2a^2 - 9a - 12a + 54 = 152$$

$$2a^2 - 21a - 98 = 0$$

$$D = 441 + 98 \cdot 2 \cdot 4 = 1225 = 35^2$$

$$a = \frac{21 \pm 35}{4} = 14$$

$$a = \frac{21 - 35}{4} = -3,5$$

но по условию  $a$  - натуральное, значит  $a=14$ ,  $b=a-12=14-12=2$ .

Ответ:  $a=14$ ,  $b=2$ .

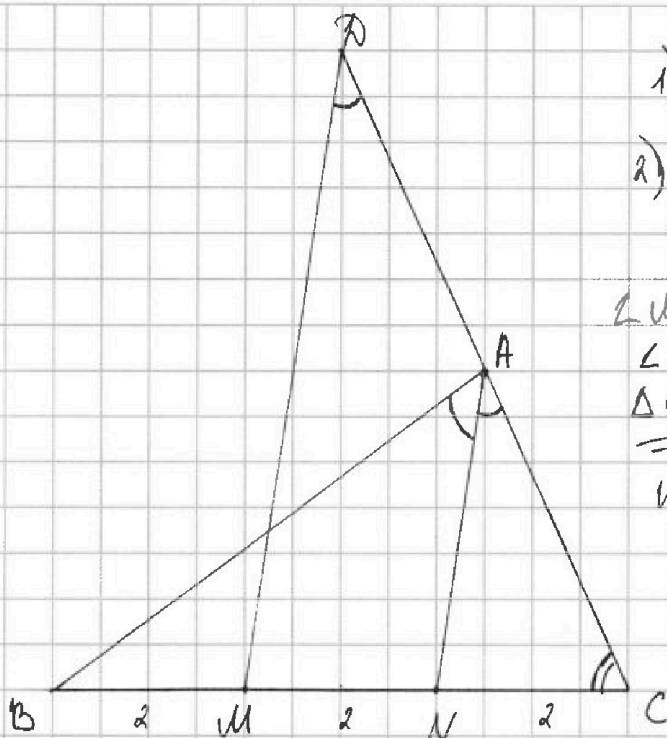


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.



1)  $BC = 6, BM = MN = NC = 2;$

2)  $MD \parallel AN$  (по условию)  
 $CD$  - секущая, значит

$\angle MDC = \angle NAC$  (как соотв.);

$\angle MCD$  - общий  $\angle$   
 $\triangle MDC$  и  $\triangle NAC \iff$

$\implies \triangle MDC \sim \triangle NAC$

по 2 углам;

тогда  $\frac{CD}{AC} = \frac{MC}{NC} = \frac{4}{2} = 2$

значит  $CD = 2AC, AC = AD,$   
 $AB = CD = 2AC$  (по усл.)

3)  $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{BN}{NC} \implies AN$  - бис-са  $\angle BAC$  (по св-ву бис-сы)

4) Пусть  $AC = x$ , тогда  $AB = 2x$ ;  
Замкнем  $\triangle$  косинусов для  $\triangle BAC$ :

$$BC^2 = x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(2\angle CAN)$$

$$36 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 8x^2$$

$$x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}, \quad x = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad 2x = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Ответ:  $AB = 3\sqrt{2}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

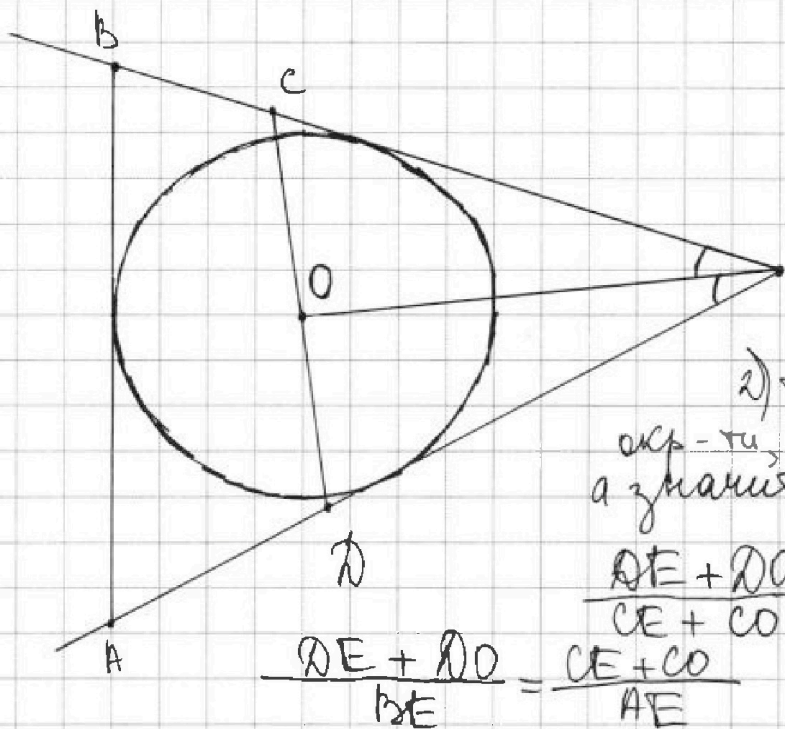


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чертовиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



1) согласно теореме  
Е относительно окружности  
(ABCD):  
 $BE \cdot CE = EA \cdot ED$

$$E \frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE}$$

2) т.к. O - ц. впис.  
окр-ти, OE - бис-се  $\angle BEA$ ,  
а значит  $\frac{OE}{CE} = \frac{OD}{OC} = \frac{BE}{AE}$

$$\frac{OE + OD}{CE + CO} = \frac{BE}{AE}$$

$$\frac{OE + OD}{BE} = \frac{CE + CO}{AE}$$

3) если  $CO > BE$  или  $OD > AD$ , то  $OE + OD > AE$ , тогда

$$\frac{OE + OD}{BE} < 1;$$

если  $OD = AD$ , то  $OE + OD = AE$ ,  $\frac{OE + OD}{BE} = 1$ ,

$$OE + OD = 12.$$

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

Представим деревья и дороги между ними в виде графа.

По условию мы можем добраться из любой вершины в любую другую, причем единственным образом, а значит это связный граф без циклов. По определению такой граф — дерево, а значит если в нем  $n$  вершин, то

ребер  $n-1$ . Также в связном графе сумма степеней

всех вершин равна удвоенному количеству ребер, т.к. если мы сложим все степени, каждое ребро посчитается

2 раза. Тогда пусть количество деревьев —  $n$ , тогда дорог  $n-1$ , а сумма степеней ~~в~~ вершин ~~степеней~~ 1 равна  $5+6+7+9+(n-4) = n+23$ .

Пишем уравнение:

$$23+n = 2(n-1)$$

$$n = 25.$$

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

$$2) \sqrt{1-|x-y-1|} \geq 0 \quad | \quad 1) 2x-2y-x^2-y^2=1-(x-y-1)^2-2xy$$

$$1-|x-y-1| \geq 0$$

$$-1 \leq x-y-1 \leq 1$$

$0 \leq x-y \leq 2$ , но т.к.  $x$  и  $y$  - целые, возможно 3 случая:  
 $x-y=0$ ;  $x-y=1$ ;  $x-y=2$ . Рассмотрим каждый из них.

2.1)  $x-y=0$ ,  $x=y$

$$\sqrt{1-(x-x-1)^2-2x^2} = \sqrt{1-1-2x^2} = \sqrt{-2x^2} \geq 0, \text{ только если } x=0, \\ \text{тогда } 0+0=0 \neq 2 \text{ - не подходит}$$

2.2)  $x-y=1$ ,  ~~$x=y$~~   $y=x-1$

$$\sqrt{1-(x-x+1-1)^2-2x(x-1)} + \sqrt{1-|x-x+1-1|} = \\ = \sqrt{-2x^2+2x+1} = 1$$

$$-2x^2+2x+1 = 1 \quad \text{~~2x^2+2x+1=0~~} \\ -2x(x-1) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 & \text{~~2x^2+2x+1=0~~} \\ x=1 & \end{cases} \begin{cases} y=-1 & \text{- не подходит} \\ y=0 & \text{- не подходит} \end{cases}$$

2.3)  $x-y=2$ ,  $y=x-2$

$$\sqrt{1-(x-x+2-1)^2-2x(x-2)} + \sqrt{1-|x-x+2-1|} = \\ = \sqrt{-2x^2+4} = 2 \\ -2x^2+4 = 4 \\ x=0, y=-2 : 0 \neq 2 \text{ - не подходит.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Итак,  $x - y = 0$  и  $x - y = 2$  не подходят,

значения  $x - y = 1$ ,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ответ:  $(0; -1), (1; 0)$



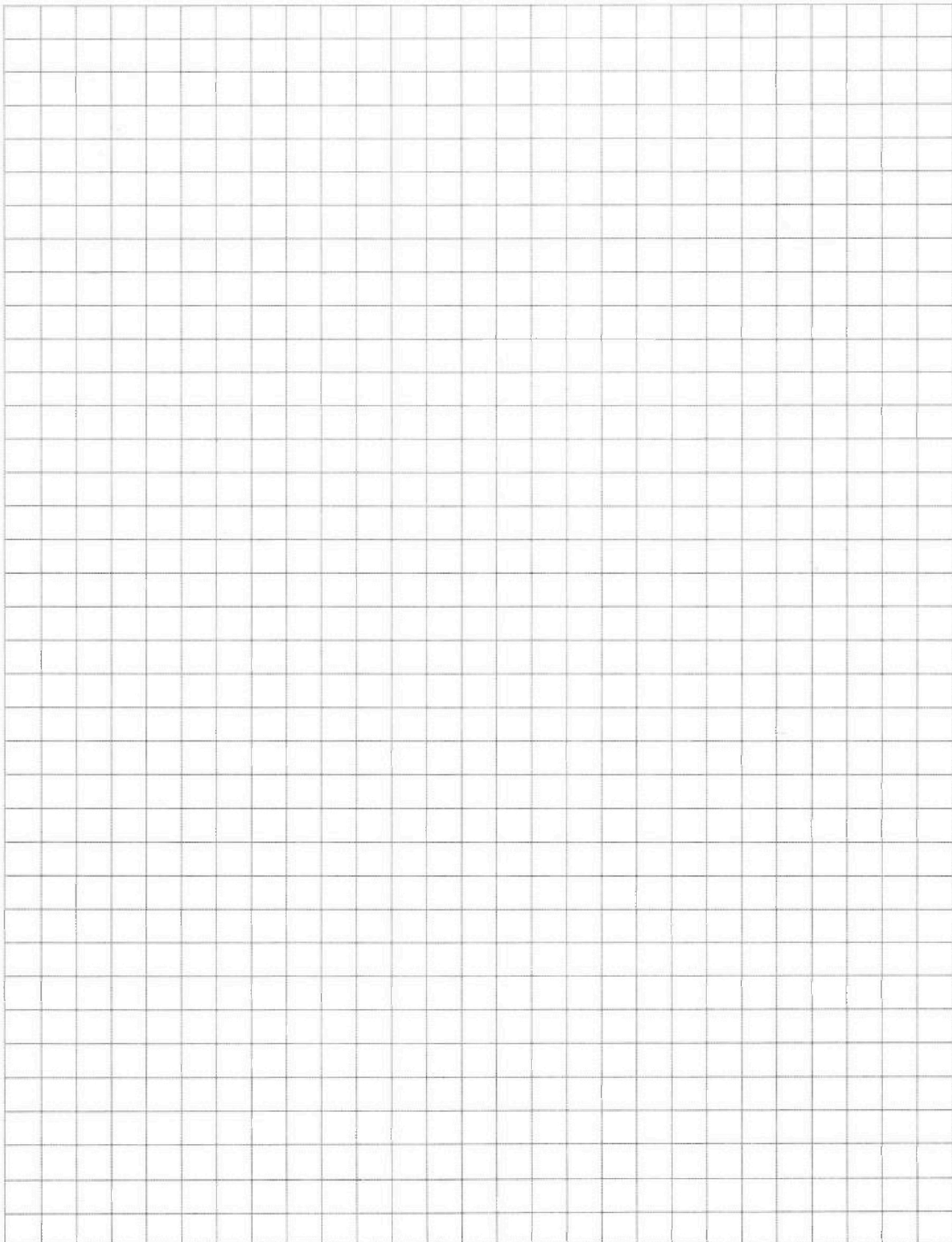


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

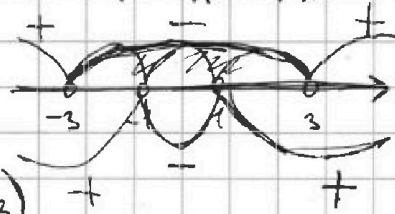
$$\cos 2(\angle CA \dots N) = \dots$$

$$32t^2 - 4(9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = -4(t^2 - 9) = -4(t-3)(t+3) \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = -4\sqrt{2}t$$

$$x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) \leq 0 \\ 4(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$(-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$x^2 + 8\sqrt{2}x + 27 = 0$$

$$D = 128 - 4 \cdot 27 = 20 = 4 \cdot 5$$

$$x = \frac{-8\sqrt{2} \pm 2\sqrt{5}}{2} = -4\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$$

$$2) a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 5b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = (2b+12)(2b+15) = 2(b+6)(2b+15) = 4(2b+15) = 4(2a-12)(2a-9) = 2(a-6)(2a-9)$$

$P: 2$

$$2(b+6)(2b+15) = 192$$

$$2b^2 + 15b + 12b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$128 + 524 - 62 = 0$$

$$2a^2 - 9a - 12a + 54 = 152$$

$$2a^2 - 21a - 98 = 0$$

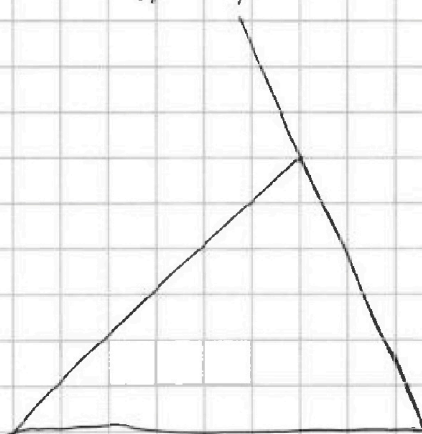
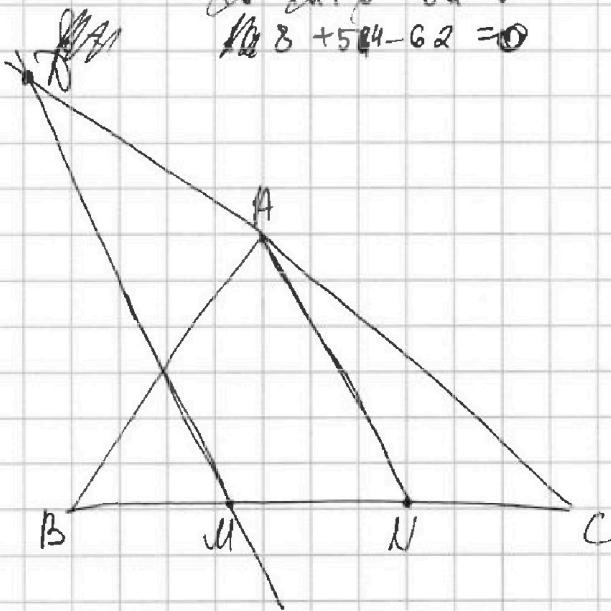
$$D = 441 + 98 \cdot 8 = 1225 = 35^2$$

$$a = \frac{21 \pm 35}{4}$$

$$a = 14, b = 2$$

$$a = -3,5$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ + 35 \\ \hline 1225 \\ + 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$



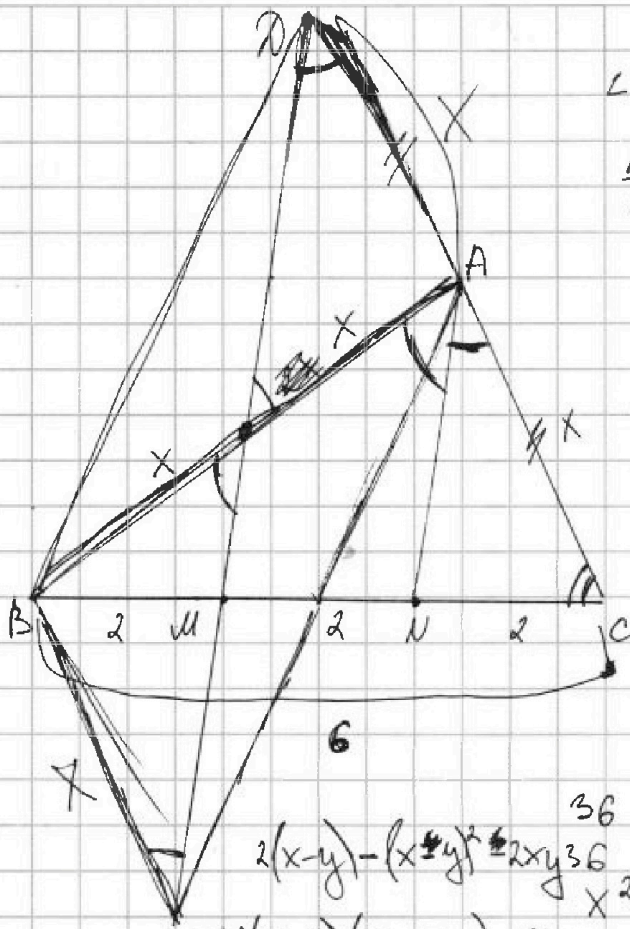


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CAN = 45^\circ$$

$$\frac{NC}{MC} = \frac{AC}{CD} = 2$$

$$\cos 2d = 1 - (2 \cdot \sin d \cdot \cos d)^2 = 1 - 4 \cdot \sin^2 d \cdot \cos^2 d = -\frac{3}{4}$$

$$4 \cdot \sin^2 d \cdot \cos^2 d = \frac{7}{4}$$

$$\sin d \cdot \cos d = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{BN}{NC}$$

$$36 = x^2 + 4x^2 + 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{3}{4}$$

$$2(x-y) - (x+y)^2 - 2xy = 36 \geq 8x^2$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

max, max-1. min(x-y)(2-x+y) - 2xy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}, 2x = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

4.0

$$x-y=a, xy=b$$

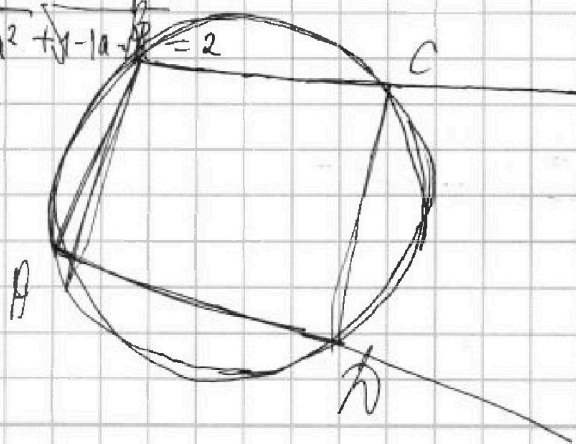
max:      $\sqrt{a(2-a) - 2b} + \sqrt{1-|a-1|} = 2$

$\sqrt{2(a-b) - a^2} + |y-a| = 2$

$$\sqrt{1-(x-y-1)^2 - 2xy} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

~~xxxxxx~~

$$(x-y)(y-x) = xy - x^2 - y^2 + xy$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1 - (x-y-1)^2 - 2xy} + |1 - (x-y-1)| = 2$   
 $\sqrt{(1 - (x-y-1))(1 + (x-y-1) - 2xy)}$   
 $x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y - 4$   
 $+ 2x - 2y - 2 + 1$   
 $a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$   
 $BE \cdot CE = AE \cdot ED$   
 $\frac{BE}{AE} = \frac{CE}{ED}$   
 $\frac{BE}{AE} = \frac{OE}{CE} = \frac{OE}{CO} = \frac{OE + OD}{CE + CO} = \frac{OE + CE}{AE}$   
 $\frac{27 + (n-4)}{2} = n-1$   
 $27 + n = 2n - 2$   
 $29 = n$   
 $25 = n$

$n$  вершин  
 $n-1$  ребер



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{1-a^2-2b} + \sqrt{1-a} = 2$~~   ~~$\sqrt{1-a^2-2b} + \sqrt{1-a} = 2$~~   $2(x-y) \geq x^2 + y^2$

$\sqrt{1-(x-y-1)^2-2xy} + \sqrt{1-x-y-1} = 2$   $1-(x-y-1)^2 \geq 2xy$

$|x-y-1|=a, xy=b$   $0 \leq |x-y-1| \leq 1$   $-1 \leq x-y-1 \leq 1$   $x-y \geq \frac{x^2+y^2}{2}$   
 $\sqrt{1-a^2-2b} + \sqrt{1-a} = 2$   $0 \leq x-y \leq 2$

~~$1-2b + 1-a + 2\sqrt{1-a} + a - a^2 + a^3 - 2b + 2ab = 4$~~   $x-y \geq \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$

$2\sqrt{a^3-a^2+a(2b-1)+1-2b} = 2 + 2b + a^2 + a$

$2\sqrt{a^2(a-1) + (2b-1)(a-1)} = 2b + 1 + a(a+1) + 1$   $x \geq \frac{y(x+1)}{1-y} \geq 0$

$2\sqrt{(a-1)(a^2+2b-1)} = 2(b+1) + a(a+1)$   $-xy \geq 0$

$4(a^3+2ab-a-a^2-2b+1) = 4b^2+8b+2+a^2(a^2+2a+1)+4a(b+1)(a+1)$

$4ab + 2a^3 - a^4 - 2a^2 - 8a - 16b - 4b^2 - 4a^2b + 2 = 0$

$2a^2(a-2b) + 8(a-2b)$

$-2xy + (a+1)^2 = x^2 + y^2 - 2xy - x^2 - y^2$   
 $-2xy = (a+1)^2 - x^2 - y^2$

$2(x-y) + (x-y)(x+y) + 2x^2$   
 $(x-y)(x+y+2) + 2x^2$      11: 10-10,