



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W 1.

$$(b_n) - \sqrt{x}; \quad b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; \quad b_{12} = 2-x;$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}; \quad q - \text{знаменатель } (b_n) \Rightarrow \Rightarrow 3x+2 \neq 0.$$

$$1) \quad 25x+34=0 \Rightarrow b_{10}=0; \quad b_{12} \neq 0; \quad b_{18}=0 \Rightarrow$$

$$0 \cdot q^2 = b_{10} \cdot q^2 = b_{12} \neq 0 - \text{нет решений.}$$

$$2) \quad 25x+34 \neq 0 \Rightarrow q \neq 0.$$

$$q^8 = \frac{b_{18}}{b_{10}} = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} \Rightarrow q^2 = \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} \quad (\text{п.к. } q^2 > 0).$$

$$2-x = b_{12} = b_{10} \cdot q^2 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(3x+2)^2}} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow 2-x = \sqrt[4]{(25x+34)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} 2-x = \sqrt{25x+34} \\ 2-x = \sqrt{-(25x+34)} \end{array} \right\} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4x + 4 = 25x + 34 \\ x^2 + 4x + 4 = -25x - 34 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 29x - 30 = 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{array} \right. \quad (\Rightarrow)$$

$$2-x \geq 0$$

$$x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-30)(x+1) = 0 \\ (x+10)(x+2) = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 30 \\ x = -1 \\ x = -2 \\ x = -10 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \\ x = -10 \end{array} \right.$$

$$x \leq 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$|y+2| + |18-y| + |18-y| \geq 20 + |18-y| \geq 20$$

$$\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} = 20.$$

Равенство возможно только при $y=18; z=0$.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{x+6} \\ b = \sqrt{3-x} \end{array} \Rightarrow a, b \geq 0 \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a-b+7=2ab \\ a^2+b^2=9 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=2ab-7 \\ a^2+b^2=9 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 28ab + 49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2ab = 4a^2b^2 - 28ab + 49 \Leftrightarrow 4a^2b^2 - 26ab + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2ab-5)(2ab-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2ab=5 \\ 2ab=8 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=2^{-2} \\ a-b=1 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2=14 \\ a^2+2ab+b^2=17 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=\sqrt{14} \\ a+b=\sqrt{17} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{14}-2}{2} ; b = \frac{\sqrt{14}+2}{2} \\ a = \frac{\sqrt{17}-2}{2} ; b = \frac{\sqrt{17}+2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{17}+1}{2} ; b = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Проверка:

$$I) a = \frac{\sqrt{19}-2}{2}; b = \frac{\sqrt{19}+2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 - \text{верно};$$

$$a - b = 2ab - 7 - \text{верно.}$$

$$II) a = \frac{\sqrt{17}+1}{2}; b = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 - \text{верно};$$

$$a - b = 2ab - 7 - \text{верно.}$$

$$I) \sqrt{x+6} = \frac{\sqrt{19}-2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{19}-2}{2} - 6 = \frac{\sqrt{19}-14}{2} = \frac{19}{4} - \sqrt{19} - 5.$$

$$\sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{17}+2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{17}+2}{2} - 3 = \frac{\sqrt{17}-4}{2} = \frac{17}{4} - \sqrt{17} - 1 =$$

$$= \frac{17}{4} - \sqrt{17} - 1.$$

$$II) \sqrt{x+6} = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{17}+1}{2} - 6 = \frac{\sqrt{17}-11}{2} = \frac{17+2\sqrt{17}+1}{4} - 6 =$$

$$= \frac{2\sqrt{17}-6}{4} = \frac{\sqrt{17}-3}{2}.$$

$$\sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow x = 3 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{12-18+2\sqrt{17}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{17}-3}{2}. \text{ Ответ: } \left\{ \left[\frac{7-\sqrt{19}-5}{2}; 18; 0 \right]; \left[\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0 \right] \right\}.$$

~~$$\text{ Ответ: } \left[\frac{7-\sqrt{19}-5}{2}; \frac{\sqrt{17}-3}{2} \right]$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0.$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x = -(\cos x + 1)^3 \Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{p-1} \cos x = -\cos x - 1 \Leftrightarrow \cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = -1.$$

1) $\sqrt[3]{p-1} = -1 \Leftrightarrow p-1 = -1 \Leftrightarrow p = 0$. Тогда $\cos x \cdot 0 = -1$ - нет решений.

2) $\sqrt[3]{p-1} \neq -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$ - имеем

решения $\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq 1 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{p-1}+2}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0 \\ -\frac{\sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1}+1} \leq 0 \end{cases} \quad \wedge \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{p-1}+2}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} p \in (-\infty; 0) \\ p \in (-\infty; -7] \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} p \in (-\infty; 0) \cup (-\infty; -7] \cup [0; +\infty) \\ p \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty).$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

~~$$D_{\text{мвем}}: p \in (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$$~~

~~$$D_{\text{мвем}}: (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$~~

$$D_{\text{мвем}}: p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty);$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



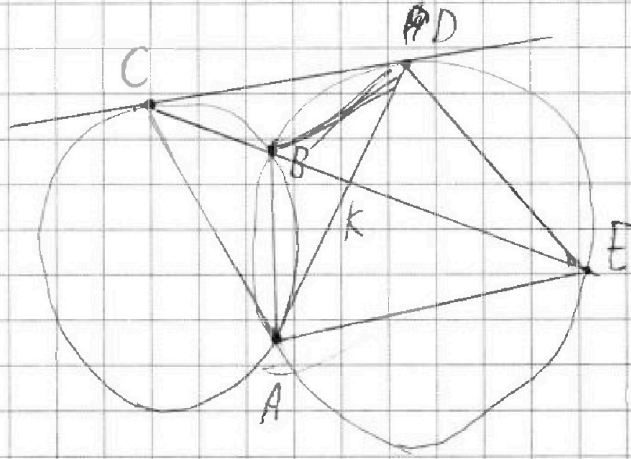
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W 9.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нб.

$$a \mid b; b - a \mid 3; (a - c)(b - c) = p^2; p - \text{простое};$$

$$a^2 + b = 1000; a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

$$a < b \Leftrightarrow a - c < b - c.$$

~~Делитель p^2~~ Делитель p^2 ;

$-p^2, -p-1, 1, p, p^2 \Rightarrow$ с учётом, что

$$a - c < b - c: \begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b - a = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) \mid 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow p - 1 \mid 3, p + 1 \mid 3$, но одно из чисел

$p - 1, p, p + 1$ делится на 3 \Rightarrow с учётом, что

$$p - \text{простое}: p = 3 \Rightarrow b - a = 2 \cdot 4 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = a + 8 \Rightarrow a^2 + a + 8 = 1000 \Leftrightarrow a^2 + a - 992 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - 31)(a + 32) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 31; b = 39; c = 30, 40. \\ a = -32; b = -24; c = -33, -23. \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н.б.

Проверка:

$$b = b - a \mid 3 - \text{верно}; \quad b > a - \text{верно}; \quad (a - c)(b - c) = 3^2 - \text{верно};$$
$$a^2 + b = 4000 - \text{верно}.$$

Ответ: $\{(-32; -29; -33); (-32; -29; -33);$
 $(31; 39; 30); (31; 39; 40)\}.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W7.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Проверка:

$$I) \text{ при } x = -1: \text{ ~~получим~~ } (25x+34)(3x+2) = 9 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ не подходит.}$$

~~$$II) x = -2: b_{10} = \sqrt{(-50+34)(-8)} = 8\sqrt{2};$$~~

~~$$b_{12} = 4; b_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-8)^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$~~

~~$$\text{Кампуфер } q = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$~~

$$II) x = -2: b_{10} = \sqrt{(-50+34)(-4)} = 8; b_{12} = 4;$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-4)^3}} = \frac{1}{2}. \text{ Кампуфер } q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$III) x = -19: b_{10} = \sqrt{(-95+34)(-5+2)} = 21\sqrt{5};$$

~~$$b_{12} = 21; b_{18} = \sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}} = \frac{21}{55} \sqrt{\frac{1}{55}} =$$~~

~~$$= \frac{21}{55\sqrt{55}}. \text{ Кампуфер } q = \frac{1}{\sqrt{55}}$$~~

Ответ: $\{-19; -2\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

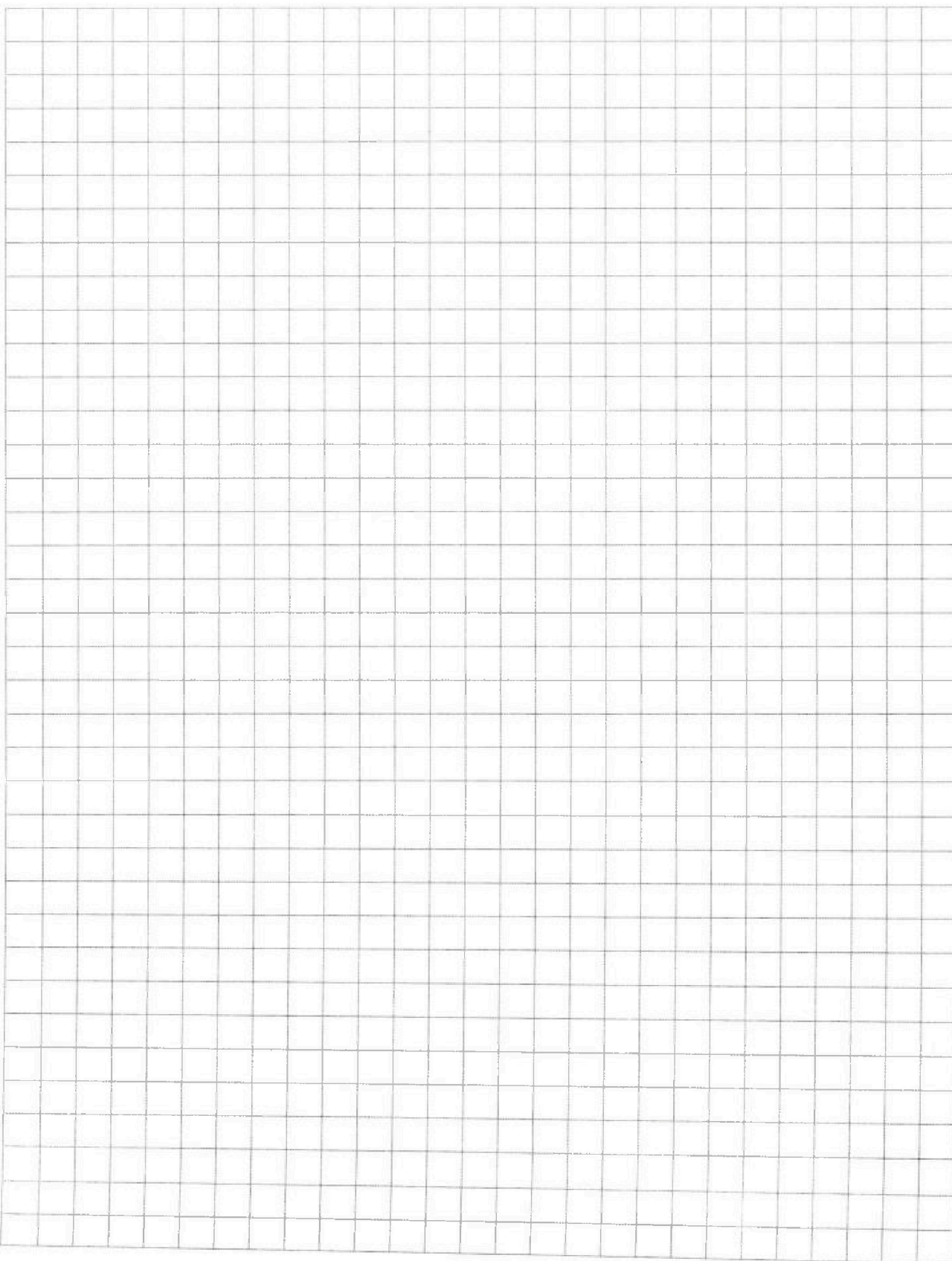


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + 2 = \sqrt{(3x+2)^2}$$

$$\frac{3x+2}{\sqrt{(3x+2)^2}} = \frac{3x+2}{3x+2} = 1$$

$$D = 441 - 38 \cdot 4 = 441 - 152 = 289$$

$$k = \frac{1}{3}$$

$$CB \cdot CE = CD^2 = 17^2 = 289$$

$$\frac{AE}{ABD} = \frac{KE \cdot CE}{KD}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot R^2 \cdot A$$

$$156 = \frac{4}{3} R^2 \cdot A$$

$$676 = 200 \cdot R^2 \cdot A$$

$$19 \cdot 25 = 475$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$982 =$$

$$D = 676 - 640 = 36$$

$$\begin{array}{r} 982 \overline{) 4} \\ 6 \\ \underline{19} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

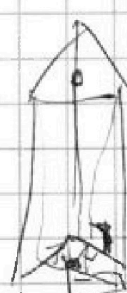
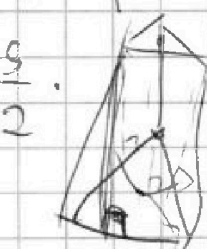
$$\frac{26 - 6}{148} = \frac{5}{2}$$

$$BK \cdot KE$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AK}{KE}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BK}{KD}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{BC}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a+2| + |18-b| + |18-b| \geq 20 \Rightarrow z=0.$$

$$a < b \Rightarrow b-c > a-c$$

$$b \not\equiv a \pmod{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a+2)(18-b) \geq 0 \\ 18-b=0 \end{array} \right. \Rightarrow b=18$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow a-b-c = p^2; a-c=1$$

$$a^2 + b = 1000 \quad \begin{array}{l} a = \sqrt{x+6} \\ b = \sqrt{3-x} \end{array} \quad b-c = -1$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2 \sqrt{18-3x-x^2}$$

$$(x+6)(3-x) = \frac{p^2-1}{2} = (p-1)(p+1)$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \frac{b-c-a+c}{a^2-b^2} = p^2 - 1$$

$$- \sin 2x \cdot \cos x + \sin x = \frac{b-a}{a^2-b^2} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

$$= \frac{2 \cos^3 x - \cos x}{3x+2} = \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{p-1}{p+1} \cdot 3 \Rightarrow p=3$$

$$- 2 \cos x \cdot \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x (\sqrt[3]{p-1} - 1) = 1 \quad a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$9p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$9p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 \sqrt[3]{p-1} - 1 \leq 1$$

$$9(p-1) \cos^3 x + 9(\cos x + 1)^3 = 0 \quad \sqrt[3]{p-1} - 1$$

$$\sqrt[3]{9(p-1)} \sqrt[3]{p-1} \cdot \cos x = \cos x + 1$$