



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н.ч.

Пусть q - знаменатель прогрессии

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = |x+1|$$

$$q = \pm \sqrt[4]{|x+1|}$$

$$b_{13} = b_4 \cdot q^6 = 5-x$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (\sqrt[4]{|x+1|})^6 = 5-x$$

$$\sqrt{(13x-35) \cdot \frac{|x+1|}{x+1}} = 5-x$$

$$\begin{cases} \sqrt{13x-35} = 5-x \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{-13x+35} = 5-x \\ x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -13x+35 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \\ x \leq 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ x = 3 \\ x \leq 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0 \\ x \leq 5 \\ x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \\ x < -1 \end{cases}$$

Ответ: -5; 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{4+x-x^2+2}$$

$$|4+1+3|4-12| = \sqrt{16y-2^2}$$

$\sqrt{16y-2^2}$ принимает значения от 0 до 13 \Rightarrow

\Rightarrow

$$\begin{cases} |4y+1+3|4-12| \leq 13 \\ |4y+1+3|4-12| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y-35 \leq 13 \\ 4y-35 \geq 0 \\ y \geq 12 \\ -2y+37 \leq 13 \\ -2y+37 \geq 0 \\ y \leq 12 \\ y \leq 12 \\ -4y+35 \leq 13 \\ -4y+35 \geq 0 \\ y \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 12 \\ y \geq 8,5 \\ y \geq 12 \\ y \geq 12 \Rightarrow \\ y \leq 18,5 \\ y \geq 1 \\ y < 12 \\ y \geq 3,5 \\ y \leq 8,75 \\ y < -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y=12 \Rightarrow |12+1+3|$

$$+3|12-12| = \sqrt{16y-2^2}$$

$$13 = \sqrt{16y-2^2} \Rightarrow z=0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-0} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

1) Рассмотрим, когда отрезок делит большой прямоугольник на два прямоугольника 100×250 клеток.

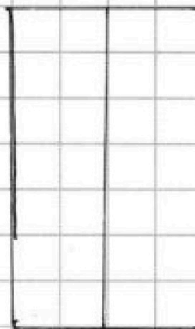
В каждом из них тогда

будет по 4 закрашенные клетки, при этом расположение будет симметрично относительно отрезка.

Вариантов закрашки у нас будет:

$$\frac{(100 \cdot 250)!}{4! \cdot (100 \cdot 250 - 4)!} = \frac{25000!}{4! \cdot 24996!}$$

100 100



250

Пример



для 4×6

2) Теперь отрезок делит на два прямоугольника 200×125 клеток.

Вариантов будет:

$$\frac{(200 \cdot 125)!}{4! \cdot (200 \cdot 125 - 4)!} = \frac{25000!}{4! \cdot 24996!}$$

200



125

125

Пример
для 4×6



3) Когда мы рассматривали симметрию относительно отрезков, мы два раза посчитали закрашки с

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

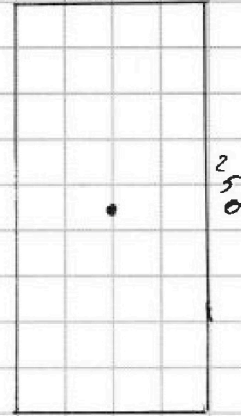
центральная симметрия, т.к. если закрашенное множество обладает

3) В этом случае половину (4)

километров мы можем расставить как угодно, а другую половину нужно расставить так чтобы

имелась симметрия относительно центра.

Всего вариантов: $\frac{(200 \cdot 250 : 2)!}{4! (200 \cdot 250 : 2 - 4)!} = \frac{25000!}{4! 24996!}$ Пример для 6x6



4) Мы считаем тогда мы считаем

трижды варианты, мы 3 раза

рассчитаем случаи, когда закрашенные

множество будет симметрично и относительно своих отрезков, и центра.

Пример для 6x6

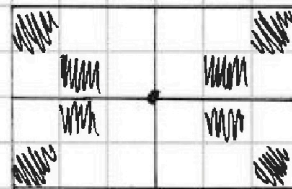
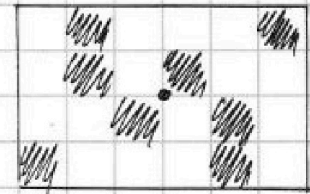
Получив варианты у нас:

$$\frac{(250 \cdot 200 : 4)!}{(8 : 4)! (250 \cdot 200 : 4 - 8 : 4)!} = \frac{12500!}{2! 12498!}$$

$$\frac{(250 \cdot 200 : 4)!}{4! 24996!} = \frac{12500!}{2! 12498!}$$

Это число мы должны вычесть 2 раза.

Ответ: $3 \cdot \frac{25000!}{4! 24996!} - 2 \cdot \frac{12500!}{2! 12498!}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c - целые числа $\Rightarrow (a-c)$ и $(b-c)$ - целые

Пусть $(a-c)(b-c) = x^2$, где x^2 - квадрат целого числа. x^2 может делиться только на $\pm 1; \pm x; \pm x^2$

Значит:

$$a-c = b-c = x$$

$$a-c = b-c = -x$$

$$a-c = \pm 1 \text{ и } b-c = \pm x^2$$

$$a-c = \pm x^2 \text{ и } b-c = \pm 1$$

$$a > b \Rightarrow a-c > b-c \Rightarrow$$

\Rightarrow нам подходит вариант

$$a-c = 1 \text{ и } b-c = -x^2$$

$$a-c = x^2 \text{ и } b-c = 1$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -x^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$$\begin{cases} a-c = x^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$a-b$ не кратно 3 $\Rightarrow x^2 - 1$ не кратно 3

Если x не кратно 3, то $x = 3n+1$ или $x = 3n+2$ (где n - целое неотрицательное число)

$$\text{Тогда } x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = (3n+2) \cdot 3n$$

$$\text{или } x^2 - 1 = (3n+3)(3n+1) = 3(n+1)(3n+1)$$

Но получаем, что $x^2 - 1$ кратно 3, а этого быть не должно $\Rightarrow x$ - простое число кратно 3 \Rightarrow

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow a-b = 3^2 - 1 = 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a + b^2 = 560 \\ a - b = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 + b = 552$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$\begin{cases} b = 23 \\ a = 31 \\ b = -24 \\ a = -16 \end{cases}$$

$$b^2 + 84b - 23b - 552 = 0$$

$$(b + 24)(b - 23) = 0$$

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

Найдем c :

Тип $b = 23; a = 31$:

Тип $b = -24; a = -16$:

$$a - c = 1 \text{ или } b - c = 1$$

$$a - c = -1 \text{ или } b - c = 1$$

$$c = a + 1$$

$$c = b - 1$$

$$c = -15$$

$$c = -25$$

$$c = 32$$

$$c = 22$$

Ответ: $(31, 23, 32), (31, 23, 22), (-16, -24, -15), (-16, -24, -25)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$ $2499^2 - 2499^2 - 2499^2$ *числовое*

$a - b = 3$

$(a-c)(b-c) = ab - ac - bc + c^2 = x^2$

$a + b^2 = 560$

~~$(a-c)(b-c) = x$~~ ~~$(a-c)(b-c) = -x$~~

$(a-c) = \pm 1$

$(a-c) = \pm x^2$ $a-c > b-c$

$(b-c) = \pm x^2$

$|b-c| = 1$

$a-c = -1$

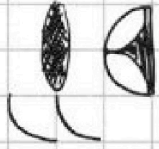
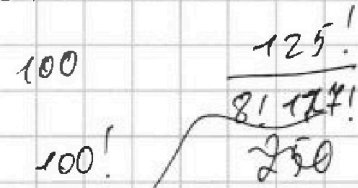
$(a-c) = x^2$

$b-c = -x^2$

$b-c = 1$

$a-b = x^2 - 1$

$a-b = x^2 - 1$



- 2
- 3
- 5
- 7
- 11
- 13
- 17
- 19

$x = 3n + 1$
 $9n^2 + 6n + 1$

$x = 3n + 2$

$x = 3$

$100 \cdot 250$

$b^2 + b = 560 + 1 - x^2$

$b^2 + b = 561 - x^2$

$25000!$

$25000!$

$8! \cdot 24998!$

$8! \cdot 24998!$
 $a - b = 8$

$12500!$

$b^2 + b = 552$

$2! \cdot 12498!$

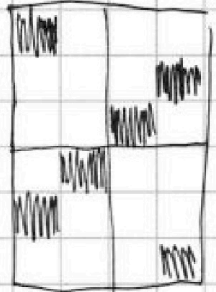
$b^2 + b - 552 = 0$

$(b+24)(b-23) = 0$

$b = 23$ 529
 $b = -24$ 576

$a = 31$

$a = -16$



$276 \cdot 2$

$138 \cdot 4$

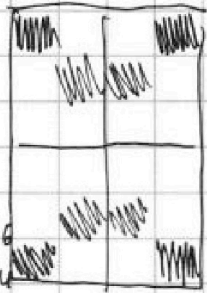
$69 \cdot 8$

$23 \cdot 24$

C_n^k

$(3n+1+1)(3n+1-1)$

$(x+1)(x-1)$



a	31	31	-16	-16
b	23	23	-24	-24
c	32	29	-15	-25

$12500!$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

+ 7	- 8	+ 9	- 10	+ 11	- 12	+ 13	- 14	+ 15	
$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$	-25	-2	-15	-1	-95	0	95	1	$\sqrt[3]{\frac{30}{2 \cdot 6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{36}}$
			$35 - 13x$			$x^2 + 3x - 10 = 0$			
$\sqrt{13x-35}$			$\sqrt{-13x-35} = 5-x$			$(x+5)(x-2) = 0$			
						$x = -5$			
						$x = 2$			
$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$						$13x-35 = 25 - 10x + x^2$			625 596 529
						$x^2 - 23x + 60 = 0$			$13x - 35 < 0$
						$D = 529 - 240 = 289$			$x < \frac{35}{13}$
$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 = 5-x$						$\frac{23 \pm 17}{2}$			
						$x = \frac{23 \pm 17}{2}$			
						$x = 20$			$-13.5 \leq z \leq 13$
$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot q^{12} = 25 - 10x + x^2$						$x = 3$			$x \geq -3$

$x+1 > 0$
 $x < 0$
 $x < -1$

$$\frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = q^8 \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} \\ &|y+1+3|y-12| = \sqrt{169-2^2} \end{aligned} \right.$$

$$\sqrt{(x+1)^4} = q^8$$

$$(x+1)^2 = q^8$$

$$q = \sqrt[4]{x+1}$$

$$q = \sqrt[4]{21}$$

$$4t^3 + 8t^2 + 4t - 2t^2 - t - 3 \quad 4-x-2 \geq 0$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \quad x+2 \leq 4$$

$$108 + 54 + 9 - 3 \quad 4t^3 + 4t^2 + t + 2t^2 + 2t - 3$$

$$-108 + 54 - 9 - 3 \quad 2t^2(2t^2+1)^2 + t^2 + 2t + 1 + t^2 - 4$$

$$t(2t^2+1) + (t+1)^2 + (t+2)(t-2) = 4$$

$13x < 35$
 $x <$

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ a-b=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2+b=552$$

$$b^2+b-552=0$$

$$b^2+24b-23b-552=0$$

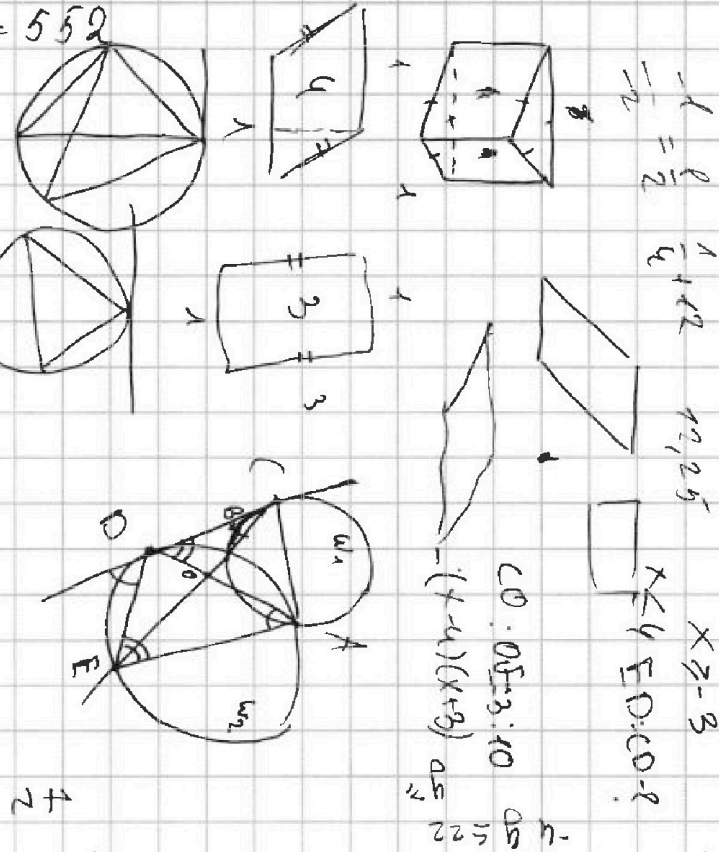
$$b(b+24)-23(b+24)=0$$

$$(b+24)(b-23)=0$$

$$\begin{cases} b=23 \\ b=-24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ a-b=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=23 \\ a=31 \\ b=-24 \\ a=-16 \end{cases}$$



Найти c:

NH

Типы $a=31; b=23$:

Типы $a=-16; b=-24$:

$$a-c=-1 \text{ или } b-c=1$$

$$a-c=-1 \text{ или } b-c=1$$

$$c=a+1$$

$$c=b-1$$

$$c=a+1$$

$$2x=p$$

$$c=b-1$$

$$c=32$$

$$c=22$$

$$c=-15$$

$$2z=p$$

$$c=-25$$

$$2z=p$$

Ответ: $(31; 23; 32), (31; 23; 22), (-16; -24; -15),$

$(-16; -24; -25)$.

$$\begin{cases} x+z=y \\ x-z=y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = p - 4y - 4z \\ 2x = p \\ 2z = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq p \\ y < 12 \\ z \leq p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq p + 2x + z \\ 2x + p + 2z \\ 2x + p \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c - целые \Rightarrow $(a-c)$ и $(b-c)$ - целые

Пусть $(a-c)(b-c) = x^2$, где x^2 - квадрат простого

числа. x^2 можно делится только на

± 1 ; $\pm x$; $\pm x^2$. Значит:

$$\begin{cases} a-c = b-c = x \\ \text{или} \\ a-c = b-c = -x \end{cases}$$

$$a > b \Rightarrow a-c > b-c \Rightarrow$$

$$a-c = b-c = -x$$

\Rightarrow нам подходит вариант:

$$a-c = \pm 1 \text{ и } b-c = \pm x^2$$

$$a-c = -1 \text{ и } b-c = -x^2$$

$$\text{или} \\ a-c = \pm x^2 \text{ и } b-c = \pm 1$$

$$\text{или} \\ a-c = x^2 \text{ и } b-c = 1$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -x^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$$\begin{cases} a-c = x^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-b = x^2 - 1$$

$a-b$ не кратно 3 $\Rightarrow x^2 - 1$ не кратно 3

Если x не кратно 3, то $x = 3n+1$ или $x = 3n+2$

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Тогда $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = (3n+2) \cdot 3n$

или $x^2 - 1 = (3n+3)(3n+1) = 3(n+1)(3n+1)$

Но получается, что $x^2 - 1$ кратно 3, а такого быть не должно $\Rightarrow x$ - простое число кратно 3 \Rightarrow

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-b = 3^2 - 1 = 8$$