



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a < b$ ,
  - число  $b - a$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. ]  $q$ -шаг прогрессии, тогда  $q^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} =$

$$= 2-x \quad \text{и} \quad q^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^8 = \sqrt{(3x+2)^{-4}} \quad \text{при выполнении ОДЗ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \pm \sqrt[4]{\sqrt{(3x+2)^{-4}}} = \pm \sqrt{(3x+2)^{-2}} = \pm (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow$$

Т.к. прогрессия состоит из действ. чисел  $q^2 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^2 = (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow (3x+2)^{1/2} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} =$$

$$= 2-x \Rightarrow \sqrt{25x+34} = 2-x \quad \text{при выполнении ОДЗ.}$$

$$25x+34 = 4-4x+x^2 \Rightarrow x^2 - 29x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \text{или} \quad x = 30. \quad \text{При } x = -1 \text{ не выпол-}$$

няется ОДЗ, т.к. подкоренное выражение

$$(25x+34)(3x+2) < 0 \Rightarrow x \neq -1. \quad \text{При } x = 30 \text{ 12-й}$$

шаг прогрессии отрицательный, чего не мо-

жет быть так как он является про-

изведением арифм. корня и квадрата дей-

ствительного числа  $q \Rightarrow x \neq 30 \Rightarrow$  таких  $x$

не существует.

Ответ: таких  $x$  не существует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2.} \quad \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:  $|y+2| + |y-18| + |y-18| = \sqrt{400-z^2}$ . Заметим, что  $|y+2| + |y-18| \geq y+2 - y+18 = 20$ ;  $|y-18| \geq 0$ , а  $\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} = 20 \Rightarrow$  равенство достигается только при  $|y-18| = 0$ ;  $z=0 \Rightarrow y=18, z=0$ . Тогда первое

уравнение примет вид:  $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$ . Пусть  $x+6=a$   $3-x=b$ :

~~$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab} \leq a+b \text{ по кр-ку средних} \Rightarrow$$~~

~~$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 \leq a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 2$$~~

~~$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b+7 = a+2\sqrt{ab}+b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$~~

~~$$a+b=9 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 16 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \quad | \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})$$~~

~~$$a-b+16(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3$$~~

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}, \quad a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b-2 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a - 2\sqrt{ab} + b - 2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a^2 - b^2} + (\sqrt{a^2 - b^2})^2 - 2 = 0. \quad t = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ или } t = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \\ \sqrt{a^2 - b^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x} = 1 \\ \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+7 = 8 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \\ -2+7 = 5 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+6)(3-x) = 16 \\ 4(x+6)(3-x) = 25 \end{cases}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 16 \Rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$-4x^2 - 12x + 72 = 25 \Rightarrow -4x^2 - 12x + 47 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 47}}{-8} =$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{9+47}}{-8} = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{14}$$

Проверим, удовл. ли эти  $x$   $\in \mathbb{R}$ .  $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq 3 \quad 0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{14} \vee 3 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{14} \vee -6 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{неудовл.}$$

$$0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \vee 3 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \vee -6 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{неудовл.}$$

Значит подходят только  $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{14}$  и  $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$

Ответ:  $(-\frac{3}{2} + \sqrt{14}; 18; 0)$ ,  $(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}; 18; 0)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}. \quad p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0;$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0;$$

$$(\cos x + 1)^3 = (1-p) \cos^3 x;$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1-p} \cos x; \Rightarrow$$

$$1 = \cos x (\sqrt[3]{1-p} - 1) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  чтобы было хотя бы одно решение  $\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right| \leq 1$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \\ \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \\ \sqrt[3]{1-p} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq -1 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -1 \\ p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} - 1 \geq 1 \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

При таких  $p$   $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: при  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$   $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{1-p^2-1}}\right) + 2\pi k$   
 $k \in \mathbb{Z}$ .



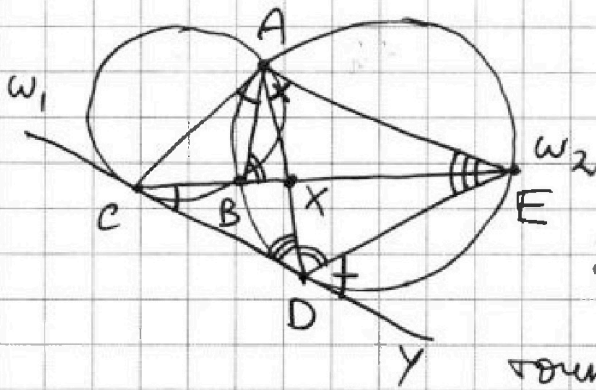
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4.



$$\frac{CX}{XE} = \frac{7}{20} \quad \frac{ED}{CD} = ?$$

$$(1) S_{\triangle CXA} = \frac{1}{2} h \cdot CX = \frac{1}{2} CD \cdot DX \sin \angle CDX$$

$$(2) S_{\triangle DXE} = \frac{1}{2} h \cdot EX = \frac{1}{2} DE \cdot DX \sin \angle XDE$$

где  $h$  - высота  $\triangle CDE$  из

точки  $D$  на  $CE$ .

$$(1) : (2) \Rightarrow \frac{CX}{EX} = \frac{CD}{DE} \frac{\sin \angle CDX}{\sin \angle XDE} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{CX}{EX} \frac{\sin \angle XDE}{\sin \angle CDX}$$

По св-ву хорды и касательной:  $\angle XCD = \angle CAB = \angle UBC$ ;

$$\angle XDC = \angle BED = \frac{\angle UDE}{2}; \quad \angle EDY = \angle EAD = \frac{\angle UDE}{2}.$$

$\angle XDE = \angle ABE$  как вписанные в одну дугу на одной стороне.

$$\Rightarrow \sin \angle AED = \sin \angle XDE \Rightarrow \frac{\sin \angle XDE}{\sin \angle CDX} = \frac{AE}{AD} \frac{\sin \angle XDE}{\sin \angle CDX} = \frac{AE}{AD} \sin \angle CDX$$

$$= \frac{AE}{AD} \text{ (по Т. Синусов)} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{20}{7} \frac{AD}{AE} \text{ Катетам } \frac{AD}{AE} :$$

]] -  $\alpha$  ]]- $\beta$  ]]- $\delta \Rightarrow$  Анологично 1) и 2)  $\frac{AE \sin \angle AEX}{DE \sin \delta - \angle AEX} =$   
на рис.

$$= \frac{AX}{XD} = \frac{AE \sin(\pi - \alpha - \beta + 2\delta)}{DE \sin(\pi - \alpha - \beta - \delta)} ; \quad AD = AX + XD$$

$$AX \cdot XD = BX \cdot XE \Rightarrow$$

$$\{ CD^2 = CE \cdot CB$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Разберём 3 случая симметрии: относительно горизонт. и верт. ср. лин.  
~~и диагональ~~, относительно вертикальной средней линии;

3) относительно горизонтальной средней линии.

В 2) и 3) случае достаточно выбрать ~~четыре~~ <sup>четыре</sup> клетки из соотв. половины прямоуголь-

ника (в 2) из в 3) ). В обоих случаях мы выбираем 4 объекта без учёта порядка (т.к. клетки одинаковые) из  $\frac{500 \times 120}{2} = 30000$  объектов.

Значит таких способов  $C_{30000}^4$  для каждого случая.

В 1) случае достаточно выбрать ~~шесть~~ <sup>две</sup> клетки из соотв. четверти прямоугольника (т.к. остальные 6 букв определены симметрией, как и в случаях 2) и 3) оставшиеся 4 клетки определяются симметрией). Мы выбираем 2

объекта без учёта порядка из  $\frac{500 \times 120}{4} = 15000$  объектов  $\Rightarrow$  таких способов  $C_{15000}^2$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

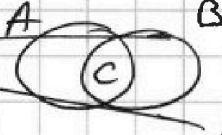
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Количество клеток симметрии. В 1) случае - C  
В 2) случае A B 3) случае B. Тогда

~~$A \cap B = C$ , м.к. <sup>какие</sup> симметрия отн. центра это  
есть ~~какие симметрии отн. обеих средних~~  
~~линий. Тогда ~~способ~~ клеток которые симме-~~  
~~туются ~~вдоль~~ ~~линии~~ ~~между~~ ~~двух~~ ~~дуг~~~~  
Тогда, считая ~~способы~~ для A и B~~

~~$C = A \cap B \Rightarrow$  кол-во ~~способов~~ для A B  
таких симметрии  $P(A) + P(B) - P(C)$ ,   
где P возвращает кол-во ~~способов~~~~

Тогда  $C = A \cap B$ , а посчитать кол-во ~~способов~~  
можно так  $C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2$ . Т.к.  
ит. два раза подсчитываем клетки ~~удовл.~~  
 $C (C = A \cap B)$ .

Посчитаем теперь кол-во ~~способов~~ выбрать точки, ко-  
торые обладают только центральной сим-  
метрией. Для этого достаточно выбрать четыре  
точки из какой-то из двух четвертинок пря-  
моугольника (  или  ). Остальные будут  
определены симметрией. Выбираем 4 из  $\frac{50000}{2} =$   
 $= 10000$  объектов -  $C_{15000}^4$  для каждой четвертинки.

Тогда всего ~~способов~~:  $C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2 +$   
 $+ C_{15000}^4 + C_{15000}^4 = 2C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + 2C_{15000}^4$

Ответ:  $2C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + 2C_{15000}^4$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N6. (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = \pm p \\ \begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b - \text{не может быть, т.к. } a < b \\ \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a+b^{2c} = \pm p^2 \pm 1 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \end{cases}$$

$a-b < 0 \Rightarrow 1) a-b = 1-p^2 < 0$  - не подходит;  $2) -1+p^2 < 0$  - не подходит;  $3) p^2-1 < 0$  - не подходит;  $4) -p^2+1 < 0$  - не подходит.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = 1-p^2 \\ a-b = -p^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = -p^2 \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = a + p^2 - 1 \Rightarrow b - a = p^2 - 1. \text{ Т.к. } b - a \not\equiv 3$$

$$a^2 + b = a^2 + a + p^2 - 1 = 1000 \Rightarrow a^2 + a + p^2 - 1001 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(p^2 - 1000)}}{2} \quad \begin{cases} p^2 - 1 \equiv 2 \\ p^2 - 1 \equiv 3 \end{cases}$$

Если  $p^2 - 1 \equiv 2$ , но  $p^2 \equiv 0 \Rightarrow p = 3$

Если  $p^2 - 1 \equiv 1$ , но  $p^2 \equiv 2$ . Но такого не может быть, т.к.  $p \not\equiv 3$  (если разбирать случай  $p \equiv 3$ ).

Тогда  $\begin{cases} p = 3k+1 \\ p = 3k+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \\ p^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow p = 3$

Значит  $b - a = 9 - 1 = 8 \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b = a^2 + a + 8 = 1000 \Rightarrow a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a+1) = 992 = 31 \cdot 32 \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 39 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2c = a + b + 1 + p^2 \Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ c = -23 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (31, 39, 30); (-32, -24, -23).$$

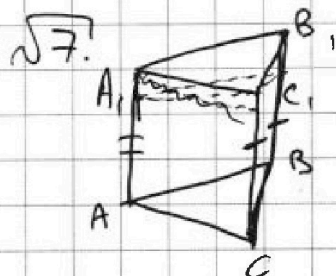
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



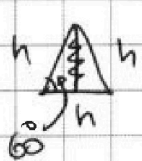
Боковые грани - трапеции с одинаковой высотой. Основания трапеций:  $AA_1, CC_1, BB_1$ .

Тогда  $S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h$ ;  $S_2 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$

$\cdot h$ ;  $S_3 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)h \Rightarrow$  Если две площади

равны, то и две образующие равны. Без ограничения общности будем считать, что  $S_1 = S_2 \Rightarrow BB_1 = CC_1 \Rightarrow S_3 = \frac{2BB_1h}{2} = BB_1 \cdot h$ .

$h$  - сторона равност. треугол., лежащего в основании. Его площадь  $\frac{1}{2}h \cdot h \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 = 4 \Rightarrow$



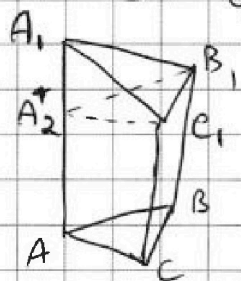
$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_3 = BB_1 \cdot h = BB_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 5 \Rightarrow BB_1 = \frac{5}{4}\sqrt{3}$

$S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h = \frac{1}{2}(AA_1 + \frac{5}{4}\sqrt{3}) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{12}{\sqrt{3}} - 5) =$

$= 3 - \frac{5}{4}\sqrt{3}$ . Тогда  $V = V_{ABCA_2B_1C_1} + V_{A_2B_1C_1A_1}$  (см. рис.).



$V_{ABCA_2B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = 4 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$V_{A_2B_1C_1A_1} = \frac{1}{3}S_{A_2B_1C_1} \cdot AA_2 = \frac{1}{3}S_{ABC}(AA_1 - BB_1) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (3 - \frac{5}{4}\sqrt{3} - \frac{5}{4}\sqrt{3}) = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3}$

$= 4 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3} \Rightarrow V = 5\sqrt{3} + 4 -$

$-\frac{10}{3}\sqrt{3} = 4 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$  Ответ:  $4 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \quad a+b=9$$

$$a-b+7=2ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+7=2\sqrt{ab}$$

$$a-ab+1-b+6=ab$$

$$a+\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+7=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$(a+1)(1-b)+6=ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+a+b-2=2\sqrt{ab}$$

$$2 \frac{10000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!}$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2=0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 42 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad 2C_{15000}^4 + C_{15000}^2$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

30000  
30000

$$(p-1)(\cos^3 x) + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{p-1} \cos x = -\cos x - 1$$



$$\cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} - 1 \quad \sqrt[3]{p-1}$$

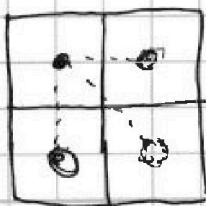
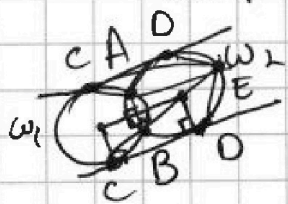
$$(p-1)^{1/3} + 1^{1/3} = \sqrt[3]{p-1+1+3(p-1)^{2/3}+(p-1)^{1/3}}$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 \geq 1$$

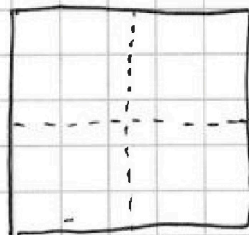
$$\sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$



2 15000



$$4 = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

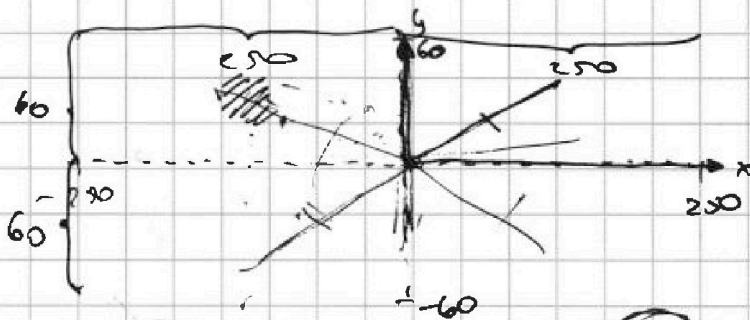


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

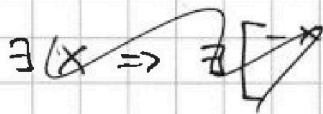
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x_1 y_1$   
 $x_2 y_2$   
 $x_3 y_3$   
 $x_4 y_4$



$$\exists (x, y) \Rightarrow \exists (x, y) \Rightarrow \exists \begin{cases} -x < y \\ -y < x \\ -x < -y \end{cases}$$

$\exists \leq 4$  ушм. длин векторов

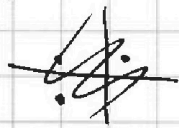
$$\sqrt{250^2 + 60^2} = 10 \sqrt{25^2 + 6^2} =$$

$$\sqrt{130^2 + 100^2} = 4 \text{ шмала}$$



$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ -43 \\ \hline 13 \\ -9-9 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ 52 \\ \hline 104 \end{array} + \begin{array}{r} 1 \\ 625 \\ 36 \\ \hline 661 \\ 26 \\ \hline 687 \end{array}$$



A - шмилл. отк. верт.

B - шмилл. отк. гор.

A ∩ B - шмилл. отк. центра

A + B - A ∩ B

$$C_{15000}^4 + C_{15000}^4 + C_{15000}^2$$

$$A = \cancel{250 \times 60} \times \cancel{500 \times 60} \quad B = 1500 \times 250$$

$$C_4 C_{3000 \times 60}^4 + C_{500 \times 60}^4 - C_{250 \times 60}^2 =$$

$$= 2 \frac{30000 \cdot 29999 \cdot 29998 \cdot 29997}{4!} - \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

$$- 2 \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!} + \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

$$\frac{2}{4!} \left( \frac{30000!}{29996!} - \frac{15000!}{14996!} \right) = \frac{2}{2!} \left( \cancel{30000 \cdot 29998} \frac{15000}{14998!} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

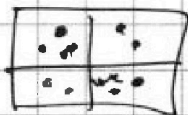
СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$2C_{15000}^2$~~   $\stackrel{?}{=} 2C_{30000}^4 - C_{15000}^2$

$1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$

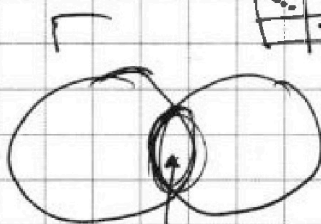
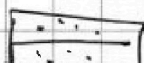
$3 \overline{) 143}$   
 $\underline{100}$   
 $43$   
 $\underline{42}$   
 $1$



$1001 \overline{) 14311}$   
 $\underline{1001}$   
 $430$   
 $\underline{420}$   
 $10$   
 $\underline{10}$   
 $0$

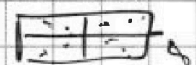
$143 \overline{) 11}$   
 $\underline{100}$   
 $13$

1)



$(3k+1)(3k+2)$

2)



3)



4)



$501 \overline{) 3}$

$A + B - AB + C$

$1001 = 143 \cdot 7$

$p^2 - 1001 = n$   
 $(p-n)(p+n) = 1001$

$a(a+1) + b - a = 1000$

$0,2 \dots 4,2$

$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3 \\ a \equiv 1 \\ b - a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ b \equiv 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a(a+1) \equiv 0 \\ b - a \equiv 0 \\ a(a+1) \equiv 2 \\ b - a \equiv 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a \equiv 0 \\ b \equiv 1 \\ a \equiv 1 \\ b \equiv 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} p-n=13 \\ p+n=77 \\ p-n=11 \\ p+n=91 \\ p-n=7 \\ p+n=143 \\ p=75 \end{cases}$

$a - c = b - c$

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} a-c=\pm 1 \\ b-c=\pm p^2 \\ a-c=\pm p^2 \\ b-c=\pm 1 \end{cases}$

$\begin{cases} p-n=1001 \\ p+n=1 \\ p-n=1 \\ p+n=1001 \\ p=501 \\ ap=501 \end{cases}$

$a^2 + a + p^2 - 1 = 1000$   
 $a = \frac{-1 \pm \sqrt{p^2 - 1001}}{2}$

$\begin{cases} a = b + 1 - p^2 \\ a = b + 1 - p^2 \\ b = p^2 + a - 1 \end{cases}$   
 $(p-n)(p+n) = 13 \cdot 11 \cdot 7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \end{cases} \Rightarrow a = b \text{ (не!)} \\
 \begin{cases} a-c = \{\pm p^2; \pm 1\} \\ b-c = \{\pm 1; \pm p^2\} \end{cases}$

$a^2 + a + p^2 - 1001 = 0 \Rightarrow a = -23 - 9(-1) = -22$   
 $a_1 + a_2 = -1 \quad (-32 - c)(-24 - c) = 9$   
 $a_1 \cdot a_2 = p^2 - 1001 = p^2 - 7 \cdot 11 \cdot 13$

$a(-1-a) = p^2 - 7 \cdot 11 \cdot 13$   
 $a + a^2 = 1004 - p^2 \quad 4005 - 4p^2 = n^2$

$4005 = n^2 + 4np + 4p^2 - 4np = (n+2p)^2 - 4np = 4005$

$60 \times 60 = 3600 \quad (31-c)(39-c) = 9 \Rightarrow c=30$

$4005 = 63^2 + 36 = 63^2 + 6^2$   
 $63^2 + 6^2 - (2p)^2 = n^2$   
 $(63-2p)(63+2p) = (n-6)(n+6)$

$450 + 45 + 1 = 496 \quad 2 \cdot 982 = (a)(a+1)$

$31 \cdot 38 = 30$

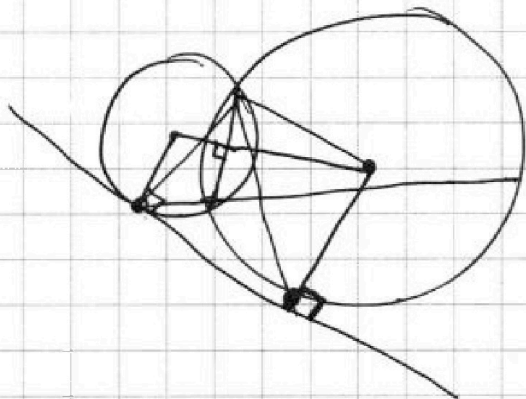


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BX \cdot XE = AX \cdot XD$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BC}{2R_1} &= \sin \alpha \\ \frac{AC}{2R_1} &= \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{2R_2} = \sin \beta$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{R_1}{R_2} \quad \frac{AE}{BC} = \frac{R_1 \sin \beta}{R_2 \sin \alpha}$$

$$\frac{(CX - BX)}{(CX - BC) \cdot XE} \quad \delta - 180 + \alpha + \beta + \delta = \alpha + \beta + 2\delta$$

$$\frac{AE}{AD} = ?$$

$$XD = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + \delta)$$

$$AX = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + 2\delta)$$

$$\gamma - (180 - \alpha - \beta - \gamma) = 2\gamma + \alpha + \beta - 180^\circ$$

$$CD^2 = CX \cdot CE$$

$$= CB \cdot CE$$

$$180^\circ - (2\delta + \alpha + \beta - 180^\circ) - \beta =$$

$$= 360^\circ - 2\delta - 2\beta - \alpha$$

$$(CB + BE) \cdot CB = CD^2$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \delta)}{\sin(\alpha + \beta + 2\delta)} \frac{AX}{AD}$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

