



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.] q -шар прогрессии, тогда $q^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} =$

$$= 2-x \quad \text{и} \quad q^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^8 = \sqrt{(3x+2)^{-4}} \quad \text{при выполнении ОДЗ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \pm \sqrt[4]{\sqrt{(3x+2)^{-4}}} = \pm \sqrt{(3x+2)^{-2}} = \pm (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow$$

Т.к. прогрессия состоит из действ. чисел $q^2 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^2 = (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow (3x+2)^{1/2} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} =$$

$$= 2-x \Rightarrow \sqrt{25x+34} = 2-x \quad \text{при выполнении ОДЗ.}$$

$$25x+34 = 4-4x+x^2 \Rightarrow x^2 - 29x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \text{или} \quad x = 30. \quad \text{При } x = -1 \text{ не выпол-}$$

няется ОДЗ, т.к. подкоренное выражение

$$(25x+34)(3x+2) < 0 \Rightarrow x \neq -1. \quad \text{При } x = 30 \text{ 12-й}$$

шар прогрессии отрицательный, чего не мо-

жет быть так как он является про-

изведением арифм. корня и квадрата дей-

ствительного числа $q \Rightarrow x \neq 30 \Rightarrow$ таких x

не существует.

Ответ: таких x не существует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2.} \quad \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение: $|y+2| + |y-18| + |y-18| = \sqrt{400-z^2}$. Заметим, что $|y+2| + |y-18| \geq y+2 - y+18 = 20$; $|y-18| \geq 0$, а $\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} = 20 \Rightarrow$ равенство достигается только при $|y-18| = 0$; $z=0 \Rightarrow y=18, z=0$. Тогда первое

уравнение примет вид: $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$. Пусть $x+6=a$ $3-x=b$:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab} \leq a+b \text{ по кр-ку средних} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 \leq a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b+7 = a+2\sqrt{ab}+b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$a+b=9 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 16 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \quad | \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$a-b+16(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}, \quad a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b-2 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a - 2\sqrt{ab} + b - 2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a^2 - b^2} + (\sqrt{a^2 - b^2})^2 - 2 = 0. \quad t = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ или } t = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \\ \sqrt{a^2 - b^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x} = 1 \\ \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+7=8=2\sqrt{(x+6)(3-x)} \\ -2+7=5=2\sqrt{(x+6)(3-x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+6)(3-x)=16 \\ 4(x+6)(3-x)=25 \end{cases}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 16 \Rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$-4x^2 - 12x + 72 = 25 \Rightarrow -4x^2 - 12x + 47 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 47}}{-8} =$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{9+47}}{-8} = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{14}$$

Проверим, удовл. ли эти x \mathbb{D} . $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq 3 \quad 0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{14} \vee 3 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{14} \vee -6 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{неудовл.}$$

$$0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \vee 3 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \vee -6 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{неудовл.}$$

Значит подходят только $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{14}$ и $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$

Ответ: $(-\frac{3}{2} + \sqrt{14}; 18; 0)$, $(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}; 18; 0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}. \quad p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0;$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0;$$

$$(\cos x + 1)^3 = (1-p) \cos^3 x;$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1-p} \cos x; \Rightarrow$$

$$1 = \cos x (\sqrt[3]{1-p} - 1) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$$

\Rightarrow чтобы было хотя бы одно решение $\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right| \leq 1$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \\ \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \\ \sqrt[3]{1-p} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq -1 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -1 \\ p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} - 1 \geq 1 \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

При таких p $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{1-p^2-1}}\right) + 2\pi k$
 $k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Разберём 3 случая симметрии: относительно горизонт. и верт. ср. лин.

1) ~~относительно~~ относительно вертикальной средней линии;

2) относительно горизонтальной средней линии.

В 2) и 3) случае достаточно выбрать ~~четыре~~ ^{четыре} клетки ~~из~~ ^{из} соответств. половины прямоуголь-

ника (в 2)  в 3) ). В обоих случаях

мы выбираем 4 объекта без учёта порядка

(т.к. клетки одинаковые) $\text{из } \frac{500 \times 120}{2} = 30000$ объектов.

Значит таких способов C_{30000}^4 ~~для~~ ^{для} каждого случая.

В 1) случае достаточно выбрать ~~две~~ ^{две} клетки ~~из~~ ^{из} соответств. четверти прямоугольника (т.к. остальные 6 букв определены симметрией, как и в случаях 2) и 3) оставшиеся 4 клетки определяются симметрией). Мы выбираем 2

объекта без учёта порядка $\text{из } \frac{500 \times 120}{4} = 15000$

объектов \Rightarrow таких способов C_{15000}^2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N6. (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = \pm p \\ \begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b - \text{не может быть, т.к. } a < b \\ \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a+b^{2c} = \pm p^2 \pm 1 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \end{cases}$$

$a-b < 0 \Rightarrow$ 1) $a-b = 1-p^2 < 0$ - не подходит; 2) $-1+p^2 < 0$ - не подходит; 3) $p^2-1 < 0$ - не подходит; 4) $-p^2+1 < 0$ - не подходит

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = 1-p^2 \\ a-b = -p^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = -p^2 \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = a + p^2 - 1 \Rightarrow b - a = p^2 - 1. \text{ Т.к. } b - a \not\equiv 3$$

$$a^2 + b = a^2 + a + p^2 - 1 = 1000 \Rightarrow a^2 + a + p^2 - 1001 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(p^2 - 1001)}}{2} \quad \begin{matrix} p^2 - 1 \equiv 2 \\ p^2 - 1 \equiv 3 \end{matrix}$$

Если $p^2 - 1 \equiv 2$, но $p^2 \equiv 0 \Rightarrow p = 3$

Если $p^2 - 1 \equiv 1$, но $p^2 \equiv 2$. Но такого не может быть, т.к. $p \not\equiv 3$ (если разбирать случай $p \equiv 3$).

$$\text{Тогда } \begin{cases} p = 3k+1 \\ p = 3k+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \\ p^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow p = 3$$

$$\text{Значит } b - a = 9 - 1 = 8 \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b = a^2 + a + 8 = 1000 \Rightarrow a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a+1) = 992 = 31 \cdot 32 \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 39 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2c = a + b + 1 + p^2 \Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ c = -23 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (31, 39, 30); (-32, -24, -23).$$

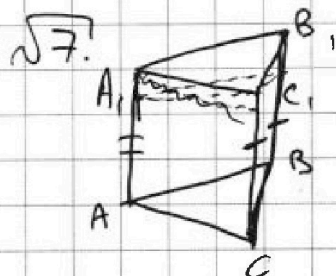
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



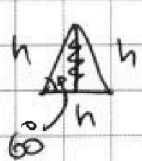
Боковые грани - трапеции с одинаковой высотой. Основания трапеций: AA_1 , CC_1 , BB_1 .

Тогда $S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h$; $S_2 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$

$\cdot h$; $S_3 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)h \Rightarrow$ Если две площади

равны, то и две образующие равны. Без ограничения общности будем считать, что $S_1 = S_2 \Rightarrow BB_1 = CC_1 \Rightarrow S_3 = \frac{2BB_1}{2}h = BB_1 \cdot h$.

h - сторона равност. треугол, лежащего в основании. Его площадь $\frac{1}{2}h \cdot h \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 = 4 \Rightarrow$



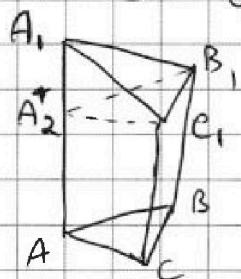
$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_3 = BB_1 \cdot h = BB_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 5 \Rightarrow BB_1 = \frac{5}{4}\sqrt{3}$

$S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h = \frac{1}{2}(AA_1 + \frac{5}{4}\sqrt{3}) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{12}{\sqrt{3}} - 5) =$

$= 3 - \frac{5}{4}\sqrt{3}$. Тогда $V = V_{ABCA_2B_1C_1} + V_{A_2B_1C_1A_1}$ (см. рис.).



$V_{ABCA_2B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = 4 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$V_{A_2B_1C_1A_1} = \frac{1}{3}S_{A_2B_1C_1} \cdot AA_2 = \frac{1}{3}S_{ABC}(AA_1 - BB_1) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (3 - \frac{5}{4}\sqrt{3} - \frac{5}{4}\sqrt{3}) = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3}$

$= 4 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3} \Rightarrow V = 5\sqrt{3} + 4 -$

$-\frac{10}{3}\sqrt{3} = 4 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$ Ответ: $4 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \quad a+b=9$$

$$a-b+7=2ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+7=2\sqrt{ab}$$

$$a-ab+1-b+6=ab$$

$$a+\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+7=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$(a+1)(1-b)+6=ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+a+b-2=2\sqrt{ab}$$

$$2 \frac{10000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!}$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2=0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 42 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad 2C_{15000}^4 + C_{15000}^2$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$30000 \\ 30000 \uparrow$$

$$(p-1)(\cos^3 x) + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{p-1} \cos x = -\cos x - 1$$



$$\cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} - 1 \quad \sqrt[3]{p-1}$$

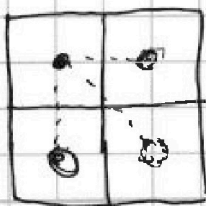
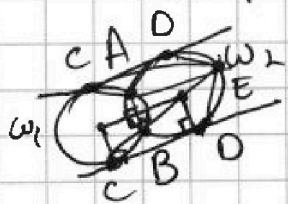
$$(p-1)^{1/3} + 1^{1/3} = \sqrt[3]{p-1+1+3(p-1)^{2/3}+(p-1)^{1/3}}$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 \geq 1$$

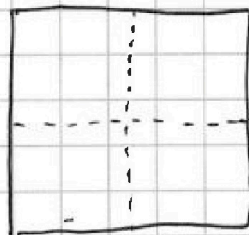
$$\sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$



$$2 \frac{15000!}{2}$$



$$4 = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

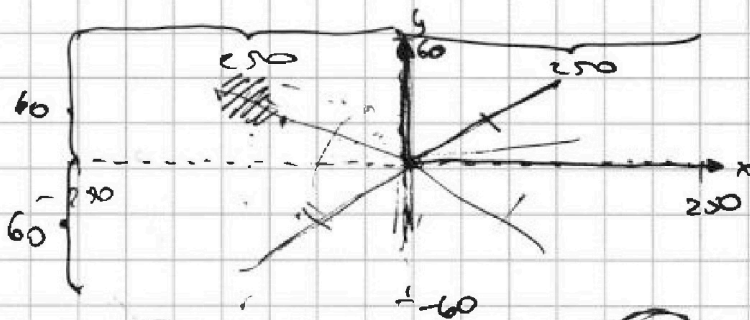


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x_1 y_1$
 $x_2 y_2$
 $x_3 y_3$
 $x_4 y_4$

$\exists (x, y) \Rightarrow \exists (x, y) \Rightarrow \exists \begin{cases} -x + y \\ -y + x \\ -x - y \end{cases}$

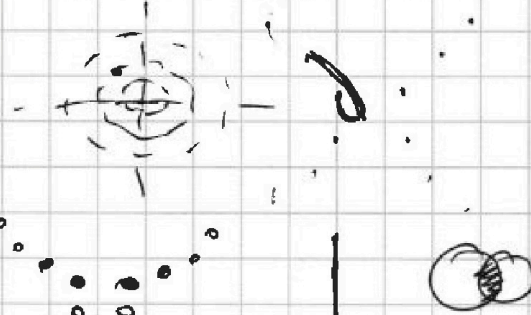
$\exists \leq 4$ ушм. длин векторов

$$\sqrt{250^2 + 60^2} = 10 \sqrt{25^2 + 6^2} =$$

$$\sqrt{130^2 + 100^2} = 4 \text{ шмала}$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ -43 \\ \hline 13 \\ -9-9 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ 52 \\ \hline 104 \end{array} + \begin{array}{r} 625 \\ 36 \\ \hline 661 \\ 26 \\ \hline 687 \end{array}$$



A - шмилл. отк. верт.

B - шмилл. отк. гор.

A ∩ B - шмилл. отк. центра

A + B - A ∩ B

$$C_{15000}^4 + C_{15000}^4 + C_{15000}^2$$

$$A = \cancel{250 \times 60} \times \cancel{500 \times 60} \quad B = 120 \times 250$$

$$C_4 C_{3000 \times 60}^4 + C_{500 \times 60}^4 - C_{250 \times 60}^2 =$$

$$= 2 \frac{30000 \cdot 29999 \cdot 29998 \cdot 29997}{4!} - \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

$$- 2 \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!} + \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

$$\frac{2}{4!} \left(\frac{30000!}{29996!} - \frac{15000!}{14996!} \right) = \frac{2}{2!} \left(\cancel{30000} \cdot 29998 \cdot \frac{15000}{14998!} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

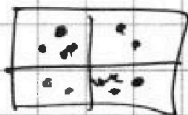
СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$2C_{15000}^2$~~ $\stackrel{?}{=} 2C_{30000}^4 - C_{15000}^2$

$1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$

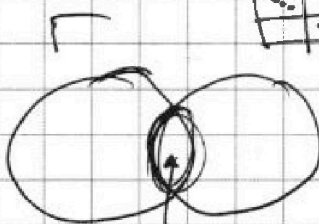
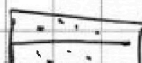
$3 \overline{) 143}$
 $\underline{100}$
 43
 $\underline{42}$
 1



$1001 \overline{) 14311}$
 $\underline{1001}$
 430
 $\underline{430}$
 11

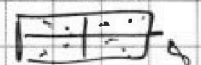
$143 \overline{) 11}$
 $\underline{143}$
 7

1)



$(3k+1)(3k+2)$

2)



3)



4)



$501 \overline{) 3}$

$A + B - AB + C$

$1001 = 143 \cdot 7$

$p^2 - 1001 = n$
 $(p-n)(p+n) = 1001$

$a(a+1) + b - a = 1000$

$0,2 \dots 4,2 \dots 3 \dots 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3 \\ a \equiv 1 \\ b - a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ b \equiv 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a(a+1) \equiv 0 \\ b - a \equiv 0 \\ a(a+1) \equiv 2 \\ b - a \equiv 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a \equiv 0 \\ b \equiv 1 \\ a \equiv 1 \\ b \equiv 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} p-n=13 \\ p+n=77 \\ p-n=11 \\ p+n=91 \\ p-n=7 \\ p+n=143 \\ p=75 \end{cases}$

$a - c = b - c$

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} a-c=\pm 1 \\ b-c=\pm p^2 \\ a-c=\pm p^2 \\ b-c=\pm 1 \end{cases}$

$\begin{cases} p-n=1001 \\ p+n=1 \\ p-n=1 \\ p+n=1001 \\ p=501 \\ ap=501 \end{cases}$

$a^2 + a + p^2 - 1 = 1000$
 $a = \frac{-1 \pm \sqrt{p^2 - 1001}}{2}$

$\begin{cases} a = b + 1 - p^2 \\ a = b + 1 - p^2 \\ b = p^2 + a - 1 \end{cases}$
 $(p-n)(p+n) = 13 \cdot 11 \cdot 7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \end{cases} \Rightarrow a=b$

$a-c = \{\pm p^2; \pm 1\}$
 $b-c = \{\pm 1; \pm p^2\}$

$a^2 + a + p^2 - 1001 = 0$
 $a_1 + a_2 = -1$
 $a_1 \cdot a_2 = p^2 - 1001 = p^2 - 7 \cdot 11 \cdot 13$

$a(-1-a) = p^2 - 7 \cdot 11 \cdot 13$
 $a + a^2 = 1001 - p^2$

$4005 = n^2 + 4np + p^2 - 4np = (n+2p)^2 - 4np = 4005$

$60 \times 60 = 3600$
 $4005 - 3600 = 405$
 $405 = 3 \cdot 135 = 3 \cdot 3 \cdot 45 = 3^3 \cdot 5$

$p^2 = 3k + 2$
 $3k + 2 \equiv ? \pmod{3}$

$4005 = 63^2 + 36 = 63^2 + 6^2$
 $63^2 + 6^2 - (2p)^2 = n^2$
 $(63 - 2p)(63 + 2p) = (n-6)(n+6)$

$450 + 45 + 1 = 496$
 $2 \cdot 982 = (a)(a+1)$

$31 \cdot 38 = 30$

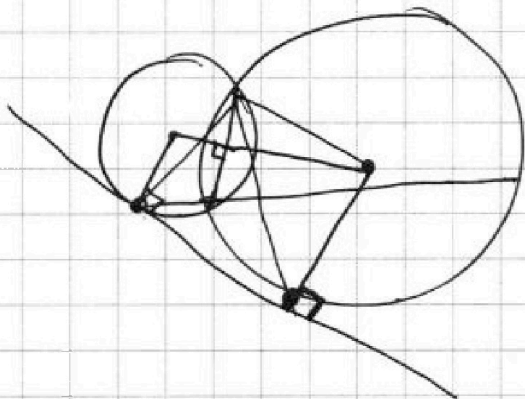
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BX \cdot XE = AX \cdot XD$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BC}{2R_1} &= \sin \alpha \\ \frac{AC}{2R_1} &= \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{2R_2} = \sin \beta$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{R_1}{R_2} \quad \frac{AE}{BC} = \frac{R_1 \sin \beta}{R_2 \sin \alpha}$$

$$\frac{(CX - BX)}{(CX - BC) \cdot XE} \quad \delta - 180 + \alpha + \beta + \delta = \alpha + \beta + 2\delta$$

$$\frac{AE}{AD} = ?$$

$$XD = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + \delta)$$

$$AX = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + 2\delta)$$

$$\gamma - (180 - \alpha - \beta - \gamma) = 2\gamma + \alpha + \beta - 180^\circ$$

$$180^\circ - (2\delta + \alpha + \beta - 180^\circ) - \beta =$$

$$= 360^\circ - 2\delta - 2\beta - \alpha$$

$$(CB + BE) \cdot CB = CD^2$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$= CB \cdot CE$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \delta)}{\sin(\alpha + \beta + 2\delta)} \frac{AX}{AD}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

