



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Такоже укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N₁

Первый член арифм. прогр. - 0, разность - $d \Rightarrow a+d = 12 - 12x$
 $a+3d = (x^2+4x)^2$, $a+2d = (-6x^2) \Rightarrow a+3d - a-2d = 6d =$
 $= -6x^2 - 12 + 12x \Rightarrow d = -x^2 - 2 + 2x$. $a+3d = a+d+2d =$
 $= 12 - 12x - 2x^2 - 4 + 4x = 8 - 8x - 2x^2 = (x^2+4x)^2$ (м.к. $a+3d = (x^2+4x)^2$)

Потом $8 - 2(x+4)x = (x(x+4))^2 \Rightarrow 8 = x(x+4)(x(x+4)+2)$. Тогда
 $t = \cancel{x(x+4)}^* \cdot \cancel{x(x+4)+2}^*$. Тогда $8 = t(t+2) \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$.

$$D=2^2+8 \cdot 4=36 \Rightarrow t_1=\frac{-2+\sqrt{36}}{2}=2, t_2=\frac{-2-\sqrt{36}}{2}=-4.$$

$$1) x(x+4)=2 \Rightarrow x^2+4x-2=0 \quad D=16+8=24 \Rightarrow x_1=\frac{-4+\sqrt{24}}{2}=$$
 $=\sqrt{6}-2, x_2=\frac{-4-\sqrt{24}}{2}=-\sqrt{6}-2 \quad (\text{б/c переходы тождественные})$

\Rightarrow такие x подойдут)

$$2) x(x+4)=-4 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2. \quad (\text{б/c переходы тождественные} \Rightarrow \text{такие } x \text{ подойдут})$$

* $t \in [-4; +\infty)$, м.к. лишь $x(x+4)$ достигает при $\frac{4}{2x+2}=-2$,
 т.е. OK -4 .

Ответ: $x \in \{-2, -\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-2\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases}$$

1) $2x \geq 3y$ и $3x \geq 2y$

$$\begin{cases} 2x \leq 3y + 6 & \text{①} \\ 3x \leq 2y + 4 & . \end{cases} \quad x \geq \frac{2}{3}y \text{ и } \frac{3}{2}y + 3 \geq 2x \text{ из ①} \Rightarrow$$

тогда $\frac{3}{2}y + 3 \geq \frac{2}{3}y \Rightarrow 3 \geq -\frac{5}{6}y \Rightarrow 18 \geq -5y \Rightarrow y \geq -\frac{18}{5}$

$$3x \geq 2y \Rightarrow 3x \geq -\frac{36}{5} \Rightarrow x \geq -\frac{12}{5}. \text{ Тогда } 10x + 5y \geq \frac{10 \cdot 12}{5} - \frac{18}{5} =$$

$$= -24 - 18 = -42. \text{ Проверим эти } x \text{ и } y.$$

$$\left| -\frac{24}{5} + \frac{54}{5} \right| = 6 \text{ и } \left| -\frac{36}{5} + \frac{2 \cdot 12}{5} \right| = 0 \leq 4$$

2) $2x \geq 3y$ $2y \geq 3x$

$$\begin{cases} 2x \leq 3y + 6 & 2x \leq 3y + 6 \Rightarrow 3x \leq \frac{9}{2}y + 9 \Rightarrow 3x + 4 \leq \frac{9}{2}y + 13 \Rightarrow \\ 2y \leq 3x + 4 & \Rightarrow \frac{9}{2}y + 13 \geq 3x + 4 \geq 2y \Rightarrow y \geq -\frac{26}{5} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x + 4 \geq 2y \Rightarrow 3x \geq -\frac{52 + 20}{5} = -\frac{72}{5} \Rightarrow x \geq -\frac{24}{5} \text{ проверить } \Rightarrow$$

~~$$\frac{69}{5} - 26 = -\frac{49}{5}. \text{ Проверим эти } x \text{ и } y. \left(-\frac{12}{5} + \frac{28}{5} \right) < 6,$$~~

~~$$10x + 5y > -48 - 26 =$$~~

$$= -74. \text{ Проверим эти } x \text{ и } y \quad \left| -\frac{12}{5} + \frac{52}{5} \right| < 4 \text{ и } \left| -\frac{48}{5} + \frac{92}{5} \right| < 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{aligned} 3y &\geq 2x, \\ 3x &\geq 2y \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y \leq 2x + 6 \\ 3x \leq 2y + 4 \end{array} \right. \quad \begin{aligned} 2x + 6 &\geq 3y \Rightarrow x \geq \frac{3y - 6}{2} \Rightarrow 2y + 4 \geq 3x \geq \\ &2y + 4 \geq \frac{9}{2}y - 9 \Rightarrow \frac{5}{2}y \leq 13 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \leq \frac{26}{5}. \quad 3y \geq 3y - 6, \text{ что предва}, \frac{9}{2}y - 9 \geq 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}y \geq y \Rightarrow y \geq \frac{18}{5} \Rightarrow 2x + 6 \geq \frac{54}{5} \Rightarrow 2x \geq \frac{24}{5} \Rightarrow$$

$x \geq \frac{12}{5}$ ~~всегда меньше чем другие случаи с условиями~~

4) Понятно, что здесь $x \geq \frac{24}{5}$ и $y \geq \frac{26}{5}$, т.к.

этот случай противоречит 2) \Rightarrow ~~не является~~

$3y \geq 2x$ и ~~3y > 2x~~ $2y > 3x$ ~~это невозможно~~

$10x + 5y$, а мы видели отриц.

Ответ: -avr (случай 2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2 n - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2)$$

пусть $t = m - 2n$ (покажем, что тогда $t \in \mathbb{Z}$), а $mn = k$ (покажем, что $k \in \mathbb{N}$). Тогда $A = t(t + 13)$. $B = k(t - 2)$

1) $A = 15p^2$. Тогда $t(t + 13) = 15p^2$. Покажем, что t и $t + 13$ разной чётности, м.к. 13 некёт (4+к=к, к+к=4).

Тогда $15p^2$ чётное $\Rightarrow p$ чётное $\Rightarrow p = 2$, м.к. p простое.

$$\text{Тогда } t^2 + 13t - 68 = 0 \quad D = 169 + 68 \cdot 4 = 441 = 21^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-13 + \sqrt{441}}{2} = 4, \quad t_2 = \frac{-13 - \sqrt{441}}{2} = -14.$$

$$1) t_1 = 4 \Rightarrow m - 2n = 4 \Rightarrow B = k(t - 2) = 15q^2 \Rightarrow k(t - 2) = 2k$$

$$2k = 15q^2 - 2k \Rightarrow q = 2 \text{ (м.к. } 15q^2 \text{ чётное и } q \text{ чётное)} \Rightarrow k = 30. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mn = 30 \\ m - 2n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mn = 30 \\ m = 2n + 4 \end{cases} \Rightarrow (2n + 4)n = 30 \Rightarrow 2n^2 + 4n - 30 = 0$$

$$D = 16 + 30 \cdot 8 = 256 = 16^2 \Rightarrow n_1 = \frac{-4 + \sqrt{256}}{4} = 3, \quad n_2 = \frac{-4 - \sqrt{256}}{4} = -5,$$

$$\text{но } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 10$$

$$2) t_2 = -14 \Rightarrow m - 2n = -13 \Rightarrow k \cdot (t - 2) = -15k = 15q^2.$$

$k \in \mathbb{N}$, $15q^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow -15$ должно $\in \mathbb{N}$, но это же так. Брошенное



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $A = 15q^2 \Rightarrow t(t+13) = 15q^2 \Rightarrow q=2$ (мы уже говорили,

что t и $t+13$ разной четности $\Rightarrow 15q^2 : 2 \Rightarrow q^2 : 2 \Rightarrow$

$q=2$, т.к. q простое $\Rightarrow t^2 + 13t - 60 = 0$ $D = 169 + 60 \cdot 4 = 409$

Тогда $t_1 = \frac{-13 + \sqrt{409}}{2}$, $t_2 = \frac{-13 - \sqrt{409}}{2}$, но $\sqrt{409}$ иррационально

т.к. 409 не квадрат ~~натурального~~ числа (т.к. $409 \in IV$ окн)

не может быть квадратом квадратного числа, которое является рациональным). Тогда, т.к. $t \in \mathbb{Z}$, такого t не существует.

Ответ: $n=3, m=10$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

Из чёткого сб-ва доказ.: $\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB}$ ~~из бисс.~~
 $CZ = 12, m.k. CZ = AC - AZ$

Покажем, что $\frac{CM}{MX} = \frac{CZ}{ZA}$ (из теор. Ранеса) \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{CM}{MX} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow MX = \frac{CM}{2} = \frac{BC}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow CX = EM + MX = \frac{BC}{2} + \frac{BC}{4} = \frac{3BC}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow BX = BC - XC = \frac{BC}{4} \Rightarrow \frac{CX}{BX} = \frac{\frac{3}{4}BC}{\frac{1}{4}BC} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{BA} = \frac{3}{1} \Rightarrow AB = 6. (m.k. AC = 18). MY \parallel AX \Rightarrow \angle BAX =$
 $m.k. AX \text{ бисс. } \angle BAC.$

$= \angle BYM, \text{ так как } \angle BAX = \angle XAY = \angle AZY \Rightarrow \angle AZY = \angle AZY \Rightarrow AY = AZ \Rightarrow$

$AY = 6. \text{ Тогда } AB = AY = AZ = 6 \Rightarrow \angle BZY = 90^\circ / m.k. \text{ медиана равна}$
 $\text{половине чёткому угла}.$ $P = \text{точка } B \text{ и } A \text{ и } X. \text{ тогда получим, что}$

$\angle APB = \angle YZB = 90^\circ \Rightarrow (m.k. AP \text{ - бисс.}) BP = PZ. \text{ Тогда } AP = \frac{1}{2}YZ =$

$= 4, m.k. A - \text{ проекция } YB \text{ и } P - \text{ проекция } BZ. \Rightarrow AP - \text{ ф. линия } \triangle$

$\Delta BYZ \parallel YZ, \text{ т.к. } M - \text{ середина } BC, PM \parallel CZ. \Rightarrow PM = \frac{1}{2}ZC = 6,$

$m.k. PM - \text{ ф. линия } \triangle \Delta BZC, \parallel ZC. \text{ Тогда } PM \parallel AZ \text{ и } PM = AZ \Rightarrow$

$\Rightarrow \square APMZ - \text{ параллелограмм} \Rightarrow MZ = 4. X - \text{ проекция } BM, m.k.$

$MX = \frac{1}{4}BC \text{ и } BX = \frac{1}{4}BC. \Rightarrow PX = \frac{1}{2}ZM = 2, m.k. PX - \text{ ф. линия}$

$\triangle BZM, \parallel ZM. BP^2 + AP^2 = AB^2 \text{ по теор. Пифагора} \Rightarrow 6^2 - 4^2 =$

$= BP^2 \Rightarrow BP^2 = 20 \Rightarrow BP = 2\sqrt{5}. \text{ Тогда } BX^2 = BP^2 + PX^2 = 20 + 4 = 24 \Rightarrow BX = 2\sqrt{6}.$

$BX = \frac{1}{4}BC \Rightarrow BC = 8\sqrt{6} \text{ Объем: } 8\sqrt{6}.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Всего узлов в этом квадрате: $8 \cdot 8 = 64$ м.к. На пересечении строк и столбцов по 8 узлов, а также строк 8.

Тогда заметим, что если вогнуть в бок тонкую линию в центральную четырехугольнику, то ~~она~~ тонкая линия, как в квадрате, получится - 84: поворот на $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.

Понятно, что все они различны без учета подсчета, м.к.

1) ~~точка~~ тонкая 1 совпадет с точкой 2 при повороте на $\pm 90^\circ$. Тогда понятно, что при точном повороте в первом случае не получим опять же, т.к. $|90 + 90| < 360$ и $|-90 + (-90)| < 360$.

При ~~одном~~ повороте ~~($90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$)~~ 1 попадет туда, где была первая ~~точка~~ после предыдущего поворота, а ~~точка~~ 2 вторая не туда, где была первая после пред. поворота на $90^\circ \Rightarrow$ все различны без учета поворота.

2) 1 же сам при любом из наших поворотов сядет в этом случае опять же без учета поворота все различны, т.к. тогда ~~точка~~ 1 попадает где вторая, а вторая - где первая

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пор. Центрально-симметричные - 32, т.к. четвертей может состоять ровно 1, а всего их C_{64} ; тогда получаем, что

У центр. симм. всего 2 картины после поворотов

на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° , т.к. 0° и 180° совпадут и 90° и 270° совпадут

(т.к. центр. симметрии = поворот на 180° от к. центра)

Тогда общ. число раскрасок - $\frac{C_{64}^2 - 32 + 32}{4} = 6 \frac{C_{64}^2}{4} + 8 =$

$$= \frac{32 \cdot 63}{4} + 8 = 8 \cdot 64 = \cancel{\cancel{512}} \quad \text{П.к. } 6 \frac{C_{64}^2}{4} - \text{ ваш пор}$$

~~Был~~ тоже. \Rightarrow не центр. симм - $C_{64}^2 - 32$ это же плюс

Ч раза. 32 центр. симм - их множатели 2 раза.

Ответ: 512.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

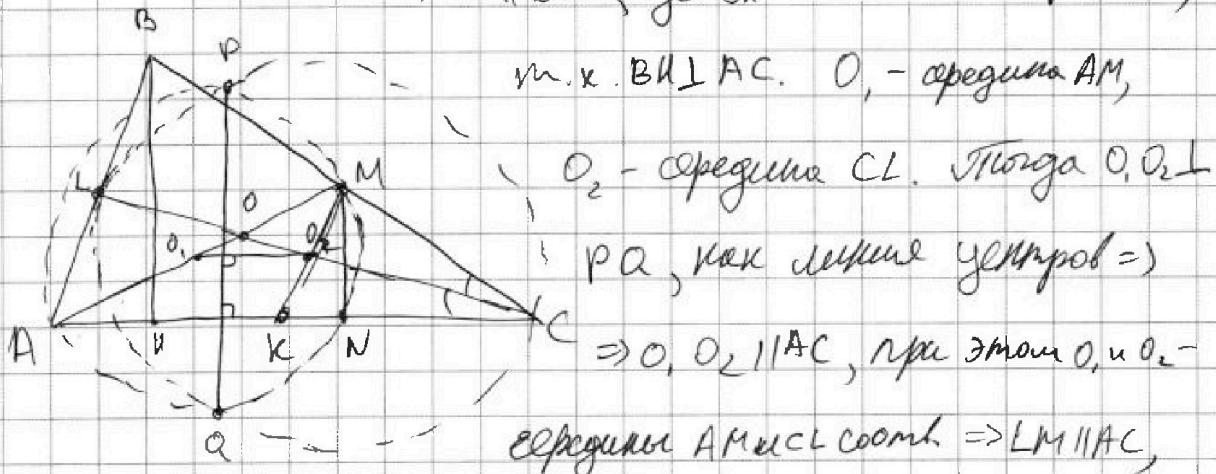
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№

$PQ \parallel BC$, где VH - высота $\Rightarrow PQ \perp AC$,



т.к. $VH \perp AC$. O - середина AM ,

O_2 - середина CL . Тогда $O, O_2 \perp$

PQ , как линии углышов \Rightarrow

$O, O_2 \parallel AC$, при этом O и O_2 -

середины AM и CL соотв. $\Rightarrow LM \parallel AC$,

~~док. Для отрезка можно отрезок отк. можно~~

~~отрезок и линия~~ ~~и линия~~, т.к. пусть O - пересеч

$$AO \cap CL \Rightarrow \frac{OO_1}{OA} = \frac{OO_2}{OC} = \frac{OO_1}{OO_1 + OA} = \frac{OO_2}{OO_2 + OC} \Rightarrow \frac{OO_1 + OA}{OA} = \frac{OO_2 + OC}{OC}$$

$$\Rightarrow \frac{OO_2}{OC} = \frac{OO_1}{OA} \Rightarrow \frac{O_1}{O_2} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow O_1O_2 \parallel LM \text{ по обрат. теор.}$$

Паралл. Тогда $ML \parallel AC \Rightarrow L$ - середина AB , т.к. M середина

$BC \Rightarrow ML$ - ср. линия $\parallel AC \Rightarrow L$ - середина $AB \Rightarrow BC = AC$,

т.к. CL - бисс и медиана. K - середина AC . Пусть $BC = 2x$.

Тогда $MC = CK = x$. $AN = 5$, $AK = KC = x \Rightarrow KN = 5 - x$. MK -

ср. линия $\triangle ABC$, $\parallel AB \Rightarrow MK = \frac{AB}{2} = 3 \Rightarrow MN^2 = 3^2 - (5-x)^2 =$

$= 9 - 25 + 10x - x^2 = -x^2 + 10x - 16$ по теор. Пифагора для $\triangle MNR$,

$\angle MNK = 90^\circ$, т.к. AM - гипотенуз. и $N \in \perp$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теор. Пифагора для $\triangle MNC$ $MN^2 = MC^2 - NC^2 = x^2 - (x-5+x)^2 =$

$$= x^2 - 4x^2 + 20x - 25 = -3x^2 + 20x - 25. \text{ Потому } -x^2 + 10x - 16 = MN^2$$

$$= -3x^2 + 20x - 25 \Rightarrow -x^2 + 10x - 16 = -3x^2 + 20x - 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x - 16 = 20x - 25 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 9 = 0 \quad D = 100 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10 + \sqrt{28}}{4} = \frac{\sqrt{9} + 5}{2}, \quad x_2 = \frac{10 - \sqrt{28}}{4} = \frac{5 - \sqrt{9}}{2}, \quad \text{но } \frac{5 - \sqrt{9}}{2} < 2$$

м.н. $5 < 1 + \sqrt{9}$, м.к. $\sqrt{9} > 2 \Rightarrow MK < KN$, м.к. $MK = 3$, а $KN = 5 - x >$

$> 5 - 2 = 3$, но при этом MK -шаг между промеж. между $\triangle MNK$.

Противоречие. Потому $x = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} \Rightarrow BC = AC = 2x = 5 + \sqrt{9}$

Ответ: $AC = BC = 2 + \sqrt{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|2x - 3y| \leq 6$$

$$y = -\frac{2x}{3}$$

$$|3x - 2y| \leq 4$$

$$2x \geq 3y \quad 2y \geq 3x$$

$$\text{1) } 2x \geq 3y \quad \cancel{2x \geq 2y} \quad \cancel{3x \geq 2y}$$

$$3y \leq 2x \leq 3y + 6 \quad | -\frac{3}{2}$$

$$\cancel{\frac{3}{2}}$$

$$2y \leq 3x \leq 2y + 6 \quad \cancel{2y + 2 \Rightarrow 10x + 5y \leq 18y + 12}$$

~~3y ≠ 0~~

~~$\frac{1}{2}x \leq 2,5x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$~~

$$-3x \leq -\frac{9}{2}y \Rightarrow 0$$

~~$2x \geq 3y$~~

$$2y + 6 - \frac{9}{2}y - y \geq 0$$

~~$\frac{1}{2}x \geq y \Rightarrow y \leq 0$~~

$$2,5y + 5 \leq 0$$

~~$x - y = 0$~~

$$2y + 4 \geq 3x \quad | : 2$$

$$\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \geq x$$

$$\frac{1}{3}y + \frac{8}{3} + 6 \geq$$

$$15y + 30 + 15y$$

$$3x \leq 2y + 4$$

$$y + 2 \leq 0$$

$$-9 \leq 10x + 5y \leq 20y + 30$$

$$y \leq -2$$

~~$\frac{3}{2}y + 3$~~

$$\frac{9}{2}x \leq \frac{3}{2}y \leq 2x + 6$$

~~$\frac{3}{2}y \leq \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$~~

$$\frac{9}{2}x - 2x \leq 6$$

~~$\frac{3}{2}y - \frac{2}{3}y \leq \frac{4}{3}$~~

~~$\frac{9}{2}x \leq 6$~~

$$y$$

$$\frac{2}{3}y \leq x \leq \frac{3}{2}y + 3$$

$$y = -10$$

~~$x = \frac{3y - 6}{2}$~~

$$\frac{2}{3}y - \frac{3}{2}y \leq 3$$

$$2x \geq -36$$

$$3y - 6 \leq 2x \quad | : \frac{3}{2}$$

$$-\frac{5}{6}y \leq 3$$

$$x \geq -18$$

s

$$-5y \leq 18$$

$$3x \geq -\frac{36}{5} \Rightarrow x \geq -\frac{12}{5}$$

$$y \geq -\frac{18}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12 + 24 = 36 \quad ((-2)^2 + 4 \cdot (-4))^2 = (-4)^2 = 16$$

$$-6 \cdot (-2)^2 = -24$$

$$36 \quad 26 \quad 16 \quad 6 \quad -4 \quad -14 \quad -24$$

~~+1~~ ~~+3~~ . . . +8

$$12 - 12(\sqrt{6} - 2) = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$\left((\sqrt{6} - 2)^2 + 4(\sqrt{6} - 2) \right)^2 = \left(6 + 4 - 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 8 \right)^2 = 4$$

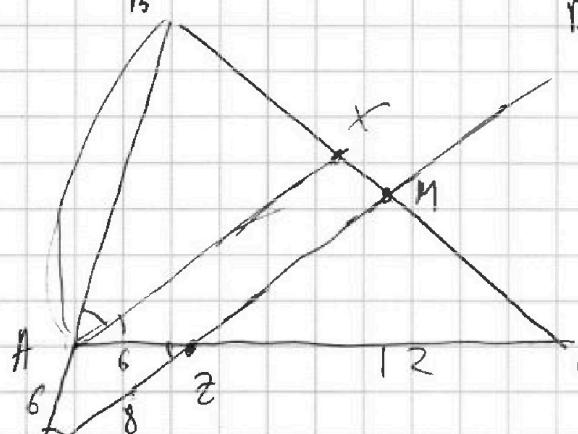
$$-6(\sqrt{6}-2)^2 = -6(6+4-4\sqrt{6}) = -60+24\sqrt{6}$$

$$d = -x^2 - 2 + 2x = -(\sqrt{6} - 2)^2 - 2 + 2\sqrt{6} - 4 = -10 + 4\sqrt{6} - 2 - 4 + 2\sqrt{6} <$$

$$= -16 + 6\sqrt{6}$$

$$36 - 12\sqrt{6} \rightarrow$$

$$BM = MC$$

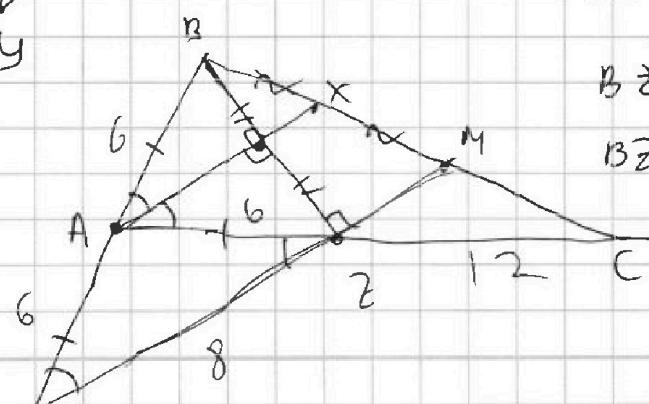


$$\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB}$$

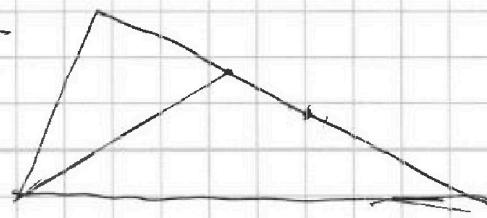
$$\frac{CM}{MX} = \frac{2}{1} \Rightarrow MX = \frac{MC}{2} = \frac{BC}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{1}{2} BC \Rightarrow AB = 6$$

$$B^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$$



$$BZ = 455$$



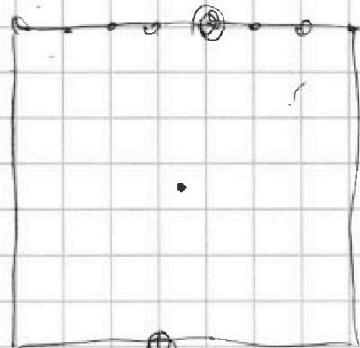


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$12 + 2 \cdot 4 = 36$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 8 = 64 \\ - 2 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$0, 60, 180, 270$$

$$D = 4 + 8 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 32 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$(4 - 4 \cdot 2)^2 = 16$$

$$-6 \cdot 4 = -24$$

$$x^2 + 4x + 4$$

$$x(x+4) = t$$

$$8 \cdot \frac{(64 - 32)}{4} + \frac{32}{2}$$

$$x = -2$$

a

$$a + d = 12(1-x)$$

$$8 = t(t+2)$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$a + 3d = (x^2 + 4x)^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$8 - 2t = t^2$$

$$a + 2d = (-6x^2)$$

$$40 = -6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$6d = -6x^2 - 12 + 12x$$

$$D = 2^2 + 8 \cdot 4 = 36$$

$$d = -x^2 - 2 + 2x$$

$$\frac{d}{2} = 6$$

$$a + 3d = a + d + 2d = 12 - 12x - 2x^2 - 4x^4 - 4x^2 =$$

$$\frac{-2 + \sqrt{D}}{2} = 2$$

$$= 8 - 8x - 2x^2 = (x^2 + 4x)^2$$

$$\frac{-2 - \sqrt{D}}{2} = -4$$

$$8 \geq x(8+2x)$$

$$8 - 2(x+4)x = (x(x+4))^2$$

$$t = 2, t = -4$$

$$4 \geq x(4+x)$$

$$8 = x(x+4)(x^2 + 4x + 2)$$

$$x^2 + 4x = 2$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$-4x^2 - 8 + 8x = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$D = 16 + 2 \cdot 4 = 24$$

$$-8 + 8x = -x^4 - 8x^3 - 18x^2$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{256}}{2} = 2\sqrt{6} - 2$$

$$8x - 8 = x^4 + 8x^3 + 18x^2$$

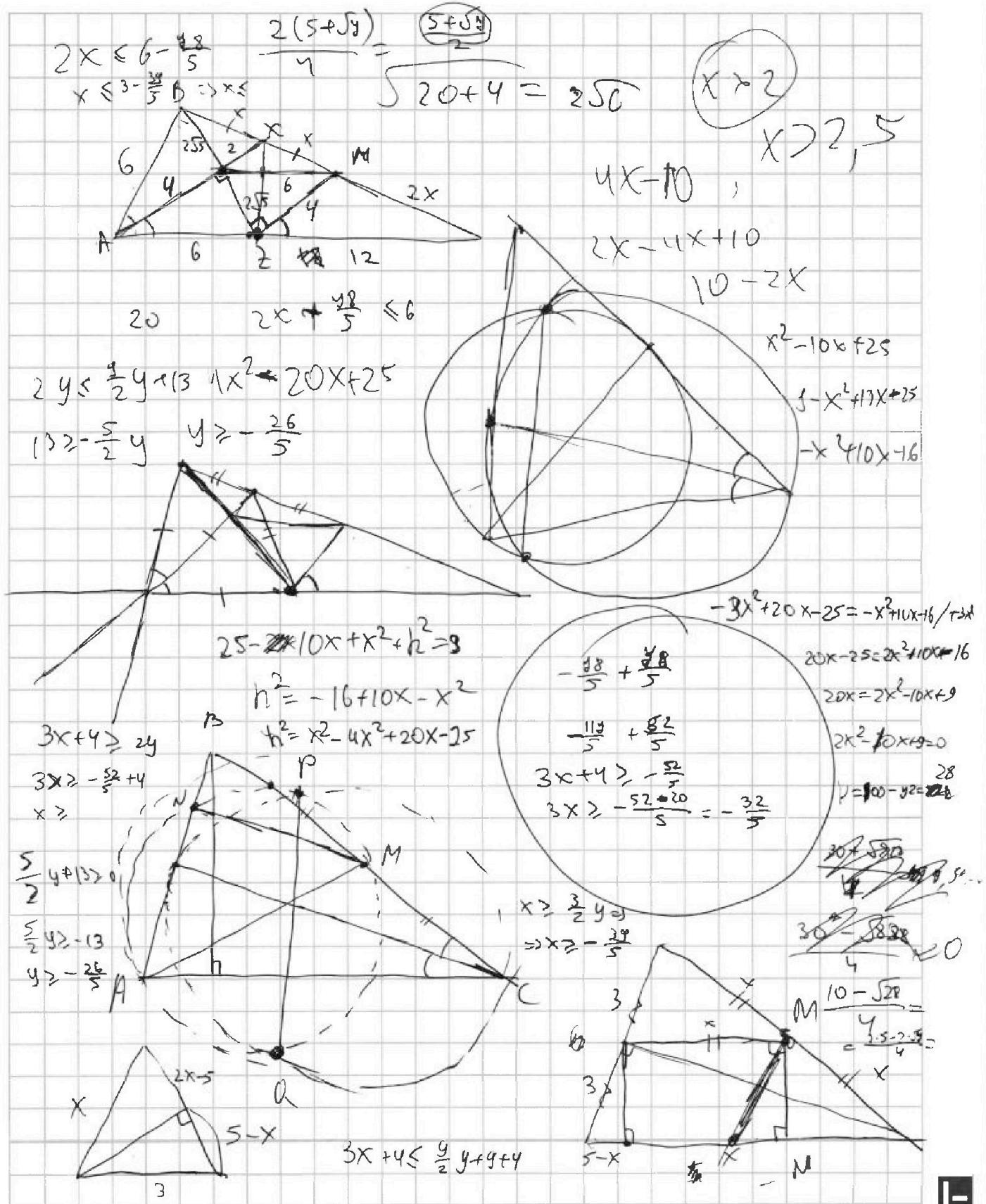


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач кумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



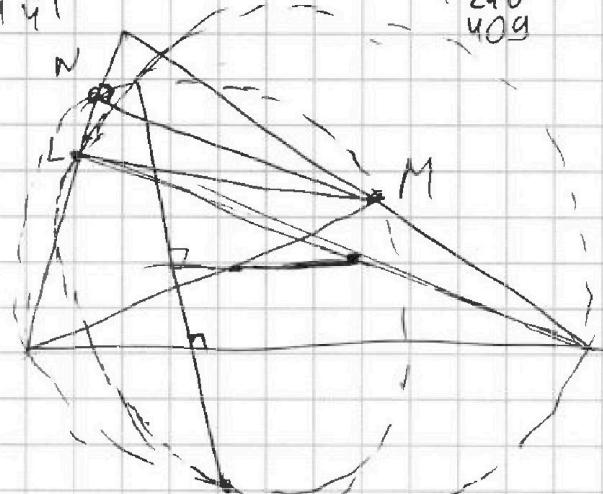


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

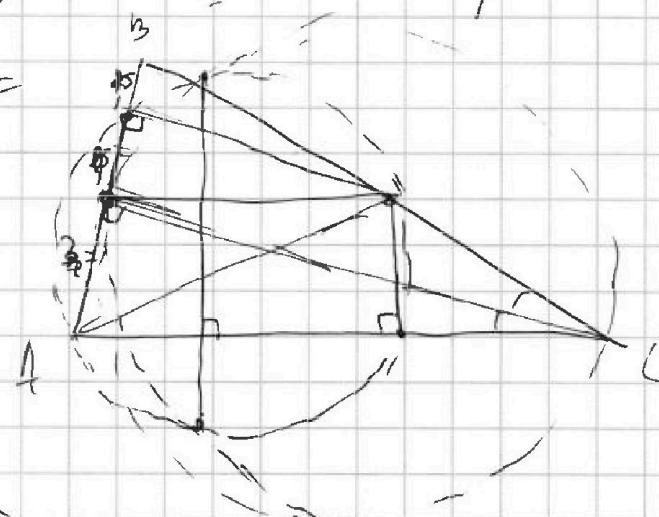
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$B = mn(m-2n-2) \quad \begin{array}{l} \times 68 \\ \quad 4 \\ \hline 2 \end{array} \quad m-2n=t \quad \begin{aligned} 2) t(t+13) &= 15q^2 \\ mn &= x \\ 1) t=1 & t+13=15q^2 \\ 2) t=3 & t+13=5q^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A &= m^2 \cdot 4mn + 4n^2 + 13(m-2n) = \\
 &= (m-2n)^2 + 13(m-2n) = \\
 &= (m-2n)(m-2n+13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t(t+13) &= 130^2 \\ p &= 2 \\ t(t+13) &= 68\end{aligned}$$



$$1) t(t+13) = 19p^2$$

$$1) t=1 \quad t+13=12p^2 \quad \textcircled{E}$$

$$3) t=1 \vee t+13=p^2 \oplus$$

$$4) t = p^2 \quad t + 13 = 14$$

$$t = 2 \text{ } \Theta$$