



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть первый элемент прогрессии = a , а шаг = b .

Тогда:

$$\begin{cases} a + b = 12 - 12x \\ a + 3b = (x^2 + 4x)^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \\ a + 7b = -6x^2 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} 2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 - (12 - 12x) \\ 4b = -6x^2 - (x^4 + 8x^3 + 16x^2) \end{cases}$$

↓

$$2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 = 4b = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 56x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

Заметим, что $x = -2$ — корень уравнения \Rightarrow по теореме Безу:

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

Заметим, что $x = -2$ — корень $x^2 + 6x^2 + 6x - 4 = 0 \Rightarrow$ по теореме Безу:

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = (x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

Решим уравнение $x^2 + 4x - 2 = 0$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 24$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

↓

наш исходное уравнение имеет корни:

$$x = -2 - \sqrt{3}$$

$$x = -2$$

$$x = -2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-2 - \sqrt{3}, -2, -2 + \sqrt{3}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓2

Возьмем $m = (x+y)/2$ и $\alpha = x-m = m-y$

Тогда перепишем условие:

$$10x + 5y = 10(m+\alpha) + 5(m-\alpha) = 15m + 5\alpha - \min$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| = |2(m+\alpha) - 3(m-\alpha)| = |-m + 5\alpha| \leq 6 \\ |3x - 2y| = |3(m+\alpha) - 2(m-\alpha)| = |m + 5\alpha| \leq 4 \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} -6 \leq -m + 5\alpha \leq 6 \\ -4 \leq m + 5\alpha \leq 4 \end{cases}$$

↓

$$-4 - 6 \leq (m + 5\alpha) - (-m + 5\alpha) \leq 4 + 6$$

$$-10 \leq 2m \leq 10$$

$$-5 \leq m \leq 5$$

↓

$$15m + 5\alpha = 14m + (m + 5\alpha) \geq -5 \cdot 14 + (-4) =$$

$$= -70 - 4 = -74$$

↓

$$15m + 5\alpha \geq -74$$

Равенство достигается при $m = -5$; $\alpha = \frac{1}{5}$

↓

$$10x + 5y \geq -74 \quad \text{и} \quad 10x + 5y = -74 \quad \text{при} \quad x = -5 + \frac{1}{5} =$$

$$= -\frac{24}{5} \quad \text{и} \quad y = -5 - \frac{1}{5} = -\frac{26}{5}$$

Мы оценили функцию снизу и нашли точку, где она минимум достигает \Rightarrow мы нашли минимум

Ответ: -74

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BAX = \angle CAZ - \text{БИССЕКТОРИССА}$$

$$AX \parallel MY$$

∴

$$\angle XAZ = \angle YZA - \text{НАКРЕСТАЩИЙ}$$

$$\angle BAX = \angle BYM - \text{СООТВЕТСТВЕННЫЙ}$$

∴

$$\angle AYZ = \angle YZA$$

∴

$$\triangle AYZ - \text{Равнобедренный}$$

∴

$$AY = AZ = 6$$

Пусть $\angle YAZ = \alpha$, тогда найдем $\cos \alpha$ по ТЕОРЕМЕ КОСИНУСОВ:

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \alpha \cdot AY \cdot AZ$$

$$8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6$$

$$64 = 72 - 72 \cos \alpha$$

$$72 \cos \alpha = 8 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$\text{Пусть } BC = 4\lambda \Rightarrow MC = 2\lambda$$

Рассмотрим $\angle ACB$. $AX \parallel MY \Rightarrow$ по ТЕОРЕМЕ ФАЛЕСА:

$$\frac{ZC}{AZ} = \frac{MC}{XM} \Rightarrow \frac{18 - 6}{6} = \frac{2\lambda}{XM} \Rightarrow XM = 2\lambda \cdot \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow X \text{ середина } BM$$

$AX \parallel MY$ и $BX = XM = \lambda \Rightarrow AX$ средняя линия для $\triangle UVM$

∴

$$BA = AY = 6$$

$$\angle BAC = 180 - \angle YAZ = 180 - \alpha \Rightarrow \cos \angle BAC \approx \cos 180 - \alpha = -\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

∴

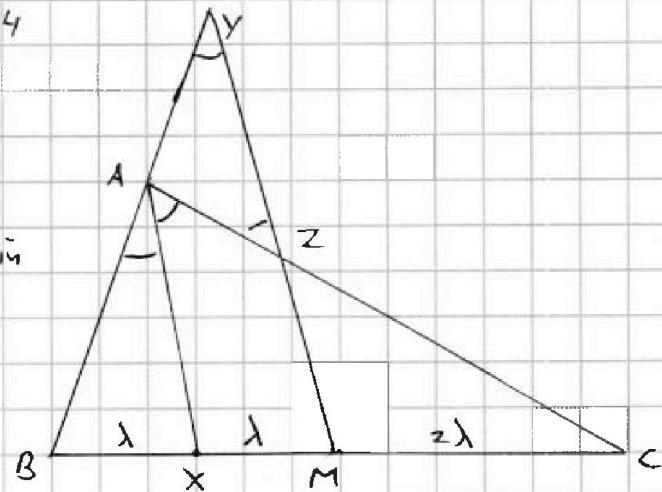
по ТЕОРЕМЕ КОСИНУСОВ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AB \cdot AC$$

$$BC^2 = 6^2 + 18^2 - 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 6 = 36 + 324 + 24 = 384$$

$$BC = \sqrt{384}$$

Ответ: $\sqrt{384}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

Посмотрим на уравнение:

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3}y = 2y^5 - \sqrt[4]{3}x + 4y^2$$

Возьмем $a = \sqrt[4]{3}x$ и $b = \sqrt[4]{3}y$, тогда:

$$2 \cdot \frac{a^{20}}{3^5} + 4 \cdot \frac{a^8}{3^2} + a - 2 \cdot \frac{b^{20}}{3^5} - 4 \cdot \frac{b^8}{3^2} - b = 0$$

Рассмотрим как разность n -ых степеней:

$$\frac{2}{3^5}(a-b)(a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2}(a-b)(a^3 + a^2b + \dots + b^3) + a - b = 0$$

Вынесем $(a-b)$:

$$(a-b)\left(\frac{2}{3^5}(a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2}(a^3 + a^2b + \dots + b^3) + 1\right) = 0$$

Заметим, что a и b — корни четной степени $\Rightarrow a \geq 0$ и $b \geq 0 \Rightarrow$

\Rightarrow во 2 скобке выражение ≥ 1 (так как все знаки — плюсовые)

↓

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt[4]{3}x = \sqrt[4]{3}y \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$$

Тогда запишем 1 уравнение:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{12-x-x^2} - 5$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 98 - 4x - 4x^2 - 20\sqrt{12-x-x^2} + 25$$

$$18\sqrt{(x+4)(3-x)} = 125 - 4x - 4x^2$$

$$9\sqrt{(x+4)(3-x)} = -(2x^2 + 2x - 33)$$

$$81(-x^2 - x + 12) = 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x^3 + 4x^2 - 6x - 66x^2 - 66x + 33^2$$

$$4x^4 + 8x^3 - (132 + 81)x^2 - (132 + 81)x + 1089 - 972 = 0$$

$$4x^4 + 8x^3 - 51x^2 - 51x + 117 = 0$$

Производная

$$16x^3 + 24x^2 - 102x - 51 = 0$$

В $x=2$ меньше 0, в $x=3$ больше \Rightarrow экстремум между ними

Но в этом отрезке $117 + 4x^4 + 8x^3 \leq$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

ЗАМЕТИМ, ЧТО ЕСЛИ УЗЛЫ СЕТКИ, КОТОРЫЕ МЫ

ВЫБРАЛИ, СИММЕТРИЧНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА КВАДРАТИКА,

ТО ОНИ ПРИ ПОВОРОТАХ ДАЮТ 2 РАЗЛИЧНЫХ КАРТИНКИ,

КОТОРЫЕ МЫ СЧИТАЕМ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ. ЕСЛИ ОНИ НЕСИММЕТРИЧ-

НЫ, ТО 4 РАЗЛИЧНЫЕ, ТАКИЕ КАК ПРИ ПОВОРОТЕ УЗЛЫ НЕ МОГУТ

ЗАНИЯТЬ МЕСТА ДРУГ ДРУГА \Rightarrow ВАРИАНТОВ ВСЕГО =

$$= \text{СИММЕТРИЧНЫХ } / 2 + \text{НЕСИММЕТРИЧНЫХ } / 4 = \frac{64}{2} / 2 +$$

$$+ \left(\frac{64 \cdot 63}{2} - \frac{64}{2} \right) / 4 = \frac{64}{4} + \frac{63 \cdot 62}{8} = 16 + 8 \cdot 62 =$$

$$= 496 + 16 = 512$$

ОТВЕТ: 512



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 12 - 12x$$

36

$$12 + 24 - 12\sqrt{3} \quad 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2}$$

$$a + 3b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 12 \quad 2(a - b) = x - 5$$

$$3b - c = a - 10 \quad c + b - 2a = 0$$

$$a + 7b = -6x^2 - 24 \quad c - 3b + 2a = 0$$

$$2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 \quad (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x - 2)$$

$$4b = -x^4 - 6x^3 - 16x^2 - 12x^2 - 6x^2 \quad (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 12x - 2)$$

$$2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$16 - 64 \quad 22 - 16 - 8$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8}^{\cancel{x^4 + 2x^3}} / x+2 \\ \underline{-x^4 - 2x^3} \\ \hline 6x^3 + 18x^2 \\ \underline{-6x^3 - 12x^2} \\ \hline 4x^2 - 8 \\ \underline{-6x^2 - 12x} \\ \hline -4x - 8 \end{array}$$

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$-8 \quad 24 \quad -12 \quad -4$$

$$3x^2 + 12x + 6 = 0$$

$$(x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 2 = 3$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{x^3 + 6x^2 + 6x - 4}^{\cancel{x^2 + 2x^2}} / x+2 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ \hline 4x^2 + 12x \\ \underline{-4x^2 - 8x} \\ \hline -4x - 8 \end{array}$$

$$(x+2)^2 \cdot$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$13p^2 - 15q^2$$

$$|x - \frac{3}{2}y| \leq 3$$

$$16(p^2 - q^2) = q^2 + p^2$$

$$x = \frac{2}{3}y$$

$$m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$|y - \frac{2}{3}x| \leq 2$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n)$$

$$|y - \frac{1}{2}x| \leq 4$$

$$(m - 2n + 13)(m - 2n)$$

$$x(x+13) = 13p^2$$

$$mn(m - 2n - 2)$$

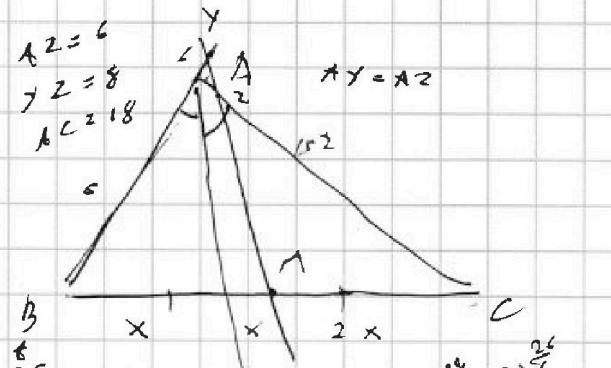
$$n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 6 \\ \hline 36 \\ \frac{18}{144} \\ \frac{18}{0} \\ \hline 144 \\ + 2 - 22 \cos \alpha = 64 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A^2 = 6 \\ \downarrow \\ A^2 = 8 \end{array}$$

$\Delta C^2 = 18$

-

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \quad 9 \quad 2 \quad 16 \\ \times \quad 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha^n = -\frac{3}{4}$$

$$x = -f \quad \dots -1$$

$$x + y = -1 \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$\frac{a^2}{3^2} - b = \frac{2}{3}$$

$$x - 5 = 2 \sqrt{12 - x}$$

$$+ 5 = 2 + (4 + x)$$

$$-8 - 5\sqrt{-1} \leq 4x$$

$$y < -4$$

$$-24 \leq 3x \leq 8$$

$$\textcircled{3} \quad -8 \leq c_8$$

$$94 + 42 - 20 \leq 5$$

$$x^3 + 24x^2 - 102x -$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и **суммарное количество страниц** в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!