



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть первый элемент прогрессии = a , а шаг = b .
Тогда:

$$\begin{cases} a + b = 12 - 12x \\ a + 3b = (x^2 + 4x)^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \\ a + 7b = -6x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 - (12 - 12x) \\ 4b = -6x^2 - (x^4 + 8x^3 + 16x^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 &= 4b = -x^4 - 8x^3 - 22x^2 \\ 3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 &= 0 \\ x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Заметим, что $x = -2$ — корень уравнения \Rightarrow по теореме Безу:
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$

Заметим, что $x = 2$ — корень $x^2 + 6x^2 + 6x - 4 \Rightarrow$ по теореме Безу:
 $(x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = (x + 2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$

Решим уравнение $x^2 + 4x - 2 = 0$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 24$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

\Downarrow

Наше исходное уравнение имеет корни:

$$\begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{-2 - \sqrt{3}; -2; -2 + \sqrt{3}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Возьмем $m = (x+y)/2$ и $\alpha = x-m = m-y$

Тогда перепишем условие:

$$10x + 5y = 10(m+\alpha) + 5(m-\alpha) = 15m + 5\alpha = \min$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| = |2(m+\alpha) - 3(m-\alpha)| = |-m + 5\alpha| \leq 6 \\ |3x - 2y| = |3(m+\alpha) - 2(m-\alpha)| = |m + 5\alpha| \leq 4 \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} -6 \leq -m + 5\alpha \leq 6 \\ -4 \leq m + 5\alpha \leq 4 \end{cases}$$

⇓

$$-4 - 6 \leq (m + 5\alpha) - (-m + 5\alpha) \leq 4 + 6$$

$$-10 \leq 2m \leq 10$$

$$-5 \leq m \leq 5$$

⇓

$$15m + 5\alpha = 14m + (m + 5\alpha) \geq -5 \cdot 14 + (-4) = -70 - 4 = -74$$

⇓

$$15m + 5\alpha \geq -74$$

Равенство достигается при $m = -5$; $\alpha = \frac{1}{5}$

⇓

$$10x + 5y \geq -74 \text{ и } 10x + 5y = -74 \text{ при } x = -5 + \frac{1}{5} = -\frac{24}{5} \text{ и } y = -5 - \frac{1}{5} = -\frac{26}{5}$$

Мы оценили функцию снизу и нашли точку, где она минимум достигает \Rightarrow мы нашли минимум

Ответ: -74

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

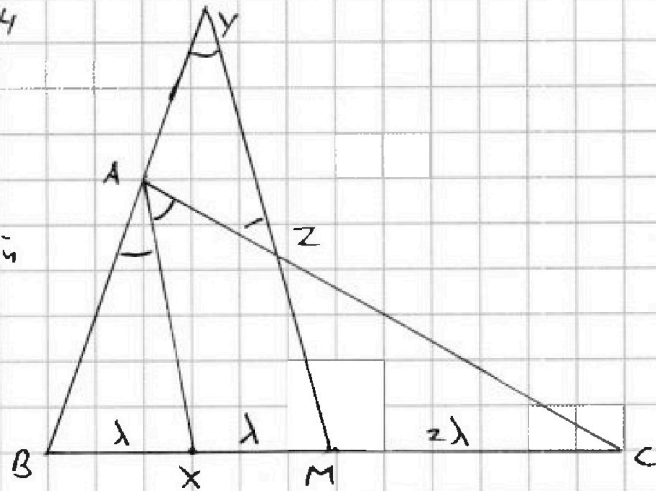
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~4

$\angle BAX = \angle CAZ$ - биссектриса
 $AZ \parallel MU$
 \Downarrow
 $\angle XAZ = \angle YZA$ - накрест лежащий
 $\angle BAX = \angle BUM$ - соответственный
 \Downarrow
 $\angle AYZ = \angle YZA$
 \Downarrow
 $\triangle AYZ$ - равнобедренный
 \Downarrow



$AZ = AY = 6$

Пусть $\angle YAZ = \alpha$, тогда найдем $\cos \alpha$ по теореме косинусов:

$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \alpha \cdot AY \cdot AZ$

$8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 6$

$64 = 72 - 72 \cos \alpha$

$72 \cos \alpha = 8 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$

Пусть $BC = 4\lambda \Rightarrow MC = 2\lambda$

Рассмотрим $\angle ACB$. $AZ \parallel MU \Rightarrow$ по теореме Фалеса:

$\frac{ZC}{AZ} = \frac{MC}{XM} \Rightarrow \frac{18-6}{6} = \frac{2\lambda}{XM} \Rightarrow XM = 2\lambda \cdot \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow X$ середина BM

$AZ \parallel MU$ и $BX = XM = \lambda \Rightarrow AX$ средняя линия для $\triangle UBM$

\Downarrow

$BA = AU = 6$

$\angle BAC = 180 - \angle YAZ = 180 - \alpha \Rightarrow \cos \angle BAC = \cos 180 - \alpha = -\cos \alpha = -\frac{1}{9}$

\Downarrow

По теореме косинусов:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle BAC \cdot AB \cdot AC$

$BC^2 = 6^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 6 = 36 + 324 + 24 = 384$

$BC = \sqrt{384}$

Ответ: $\sqrt{384}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

Посмотрим на уравнение:

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2$$

Возьмем $a = \sqrt[4]{3x}$ и $b = \sqrt[4]{3y}$, тогда:

$$2 \cdot \frac{a^{20}}{3^5} + 4 \cdot \frac{a^8}{3^2} + a - 2 \cdot \frac{b^{20}}{3^5} - 4 \cdot \frac{b^8}{3^2} - b = 0$$

Распишем как разности n -ых степеней:

$$\frac{2}{3^5} (a-b)(a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2} (a-b)(a^7 + a^6b + \dots + b^7) + a - b = 0$$

Вынесем $(a-b)$:

$$(a-b) \left(\frac{2}{3^5} (a^{19} + a^{18}b + \dots + b^{19}) + \frac{4}{3^2} (a^7 + a^6b + \dots + b^7) + 1 \right) = 0$$

Заметим, что a и b - корни четной степени $\Rightarrow a \geq 0$ и $b \geq 0 \Rightarrow$

\Rightarrow во 2 скобке выражение ≥ 1 (там все знаки - плюсы)

\Downarrow

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt[4]{3x} = \sqrt[4]{3y} \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$$

Тогда запишем 1 уравнение:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{12-x-x^2} - 5$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 48 - 4x - 4x^2 - 20\sqrt{12-x-x^2} + 25$$

$$18\sqrt{(x+4)(3-x)} = 56 - 4x - 4x^2$$

$$9\sqrt{(x+4)(3-x)} = -(2x^2 + 2x - 33)$$

$$81(-x^2 - x + 12) = 4x^4 + 4x^3 - 66x^2 + 4x^3 + 4x^2 - 66x - 66x^2 - 66x + 33^2$$

$$4x^4 + 8x^3 - (132 + 66)x^2 - (132 + 66)x + 1089 - 392 = 0$$

$$4x^4 + 8x^3 - 51x^2 - 51x + 117 = 0$$

Производная

$$16x^3 + 24x^2 - 102x - 51 = 0$$

В $x=2$ меньше 0, в $x=3$ больше \Rightarrow экстремум между ними

Но в этом отрезке $117 + 4x^4 + 8x^3 <$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что если узлы сетки, которые мы
выбрали, симметричны относительно центра квадрата,
то они при поворотах дают 2 различные картинки,
которые мы считаем одинаковыми. Если они несимметрич-
ны, то 4 различные, так как при повороте узлы не могут
занять места друг друга \Rightarrow вариантов всего =
 $=$ симметричных $/ 2 +$ несимметричных $/ 4 = \frac{64}{2} / 2 +$
 $+ \left(\frac{64 \cdot 63}{2} - \frac{64}{2} \right) / 4 = \frac{64}{4} + \frac{64 \cdot 62}{8} = 16 + 8 \cdot 62 =$
 $= 496 + 16 = 512$

Ответ: 512

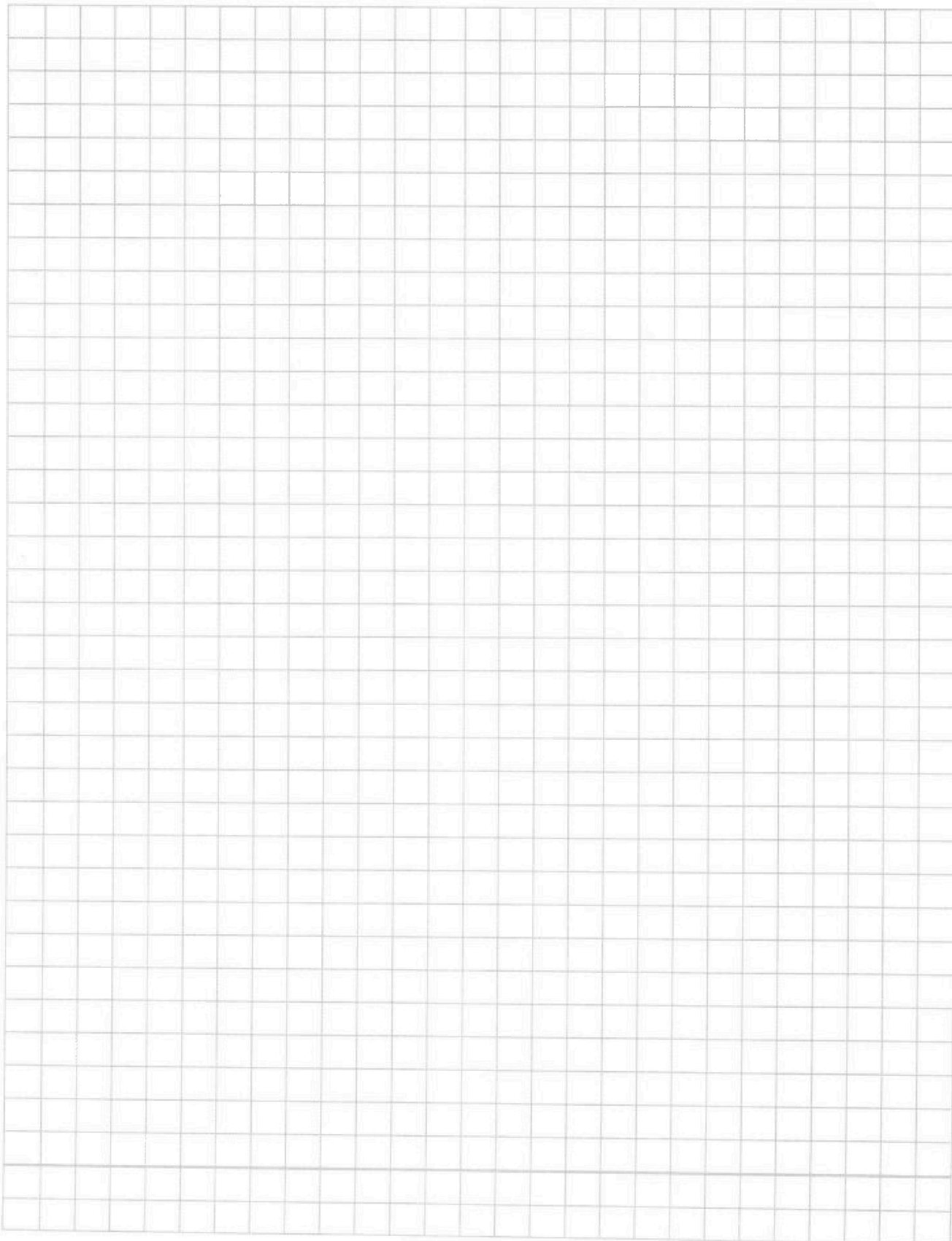


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 12 - 12x \quad 36 \quad 12 + 24 - 12x \quad 36 - 12x$$

$$a + 3b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \quad 14 \quad 2(a - b) = c - b$$

$$a + 7b = -6x^2 \quad -24 \quad 3b - c - a = 0 \quad c + b - 2a = 0$$

$$c - 3b + 2a = 0 \quad (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x - 2)$$

$$2b = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 \quad (x - 4x + 4)$$

$$4b = -x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 6x^2 \quad (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 12x - 2)$$

$$2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$16 \quad -64 \quad 72 \quad -16 \quad -8$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \mid x + 2 \\ \underline{x^4 + 2x^3} \\ 6x^3 + 16x^2 \\ \underline{-6x^3 + 12x^2} \\ 6x^2 + 8x \\ \underline{-6x^2 + 12x} \\ -4x - 8 \end{array}$$

$$(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$-8 \quad 24 \quad -12 \quad -4$$

$$3x^2 + 12x + 6 = 0$$

$$(x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 2 = 8$$

$$(x+2)^2 \left(\right)$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$13p^2 - 15q^2$$

$$16(p^2 - q^2) + q^2 + p^2$$

$$\left| x - \frac{3}{2}y \right| \leq 3$$

$$\left| x - \frac{2}{3}y \right|$$

$$m^2 - 4nm + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n)$$

$$(m - 2n + 13)(m - 2n)$$

$$mn(m - 2n - 2) \quad 12 \mid$$

$$\left| y - \frac{2}{3}x \right| \leq 2$$

$$\left| y - \frac{1}{2}x \right| \leq 4$$

$$x(x+13) = 12p^2$$

0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

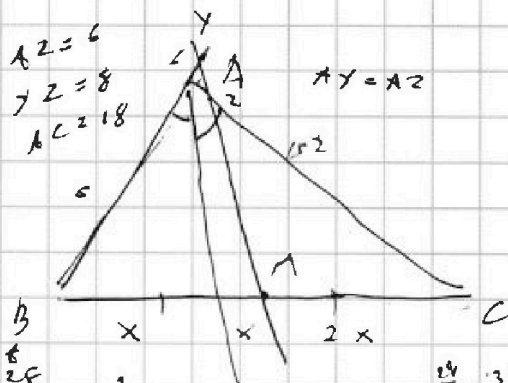
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 15 \\ \hline 30 \\ 90 \\ \hline 90 \\ \times 18 \\ \hline 72 \\ 180 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \cos \alpha = 8^2$$

$$32 - 22 \cos \alpha = 64$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \quad BY = 10$$



$$AC^2 = 8^2 + 18^2 + 2 \cdot 8 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 64 + 324 + 96 = 484$$

$$AC = 22$$

$$x^2 + x^2 - y = 0$$

$$x^2 + 9x^2 + 3y = 3$$

$$10x^2 = 3 - 3y$$

$$10x^2 = 3(1 - y)$$

$$x = -1 \quad y = -1$$

$$5(4+x^2) = 36 + x^2$$

$$20 + 5x^2 = 36 + x^2$$

$$4x^2 = 16$$

$$x = \pm 2$$

$$x + y = -1$$

$$x + 4 = 3 - y$$

$$x + y = -1$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(4+x)(3-x)}$$

$$a - b + c = 2ab$$

$$-2x \quad x+4 + 3-x + 25 = 12$$

$$-3x - 10 \leq x + y$$

$$2x \leq 9 \quad 3x \leq 12$$

$$3y \leq 6 - 2x$$

$$2y \geq 4 - 3x$$

$$2x \leq -8$$

$$y \leq 14$$

$$10x^3 + 24x^2 - 102x - 51 = 0$$



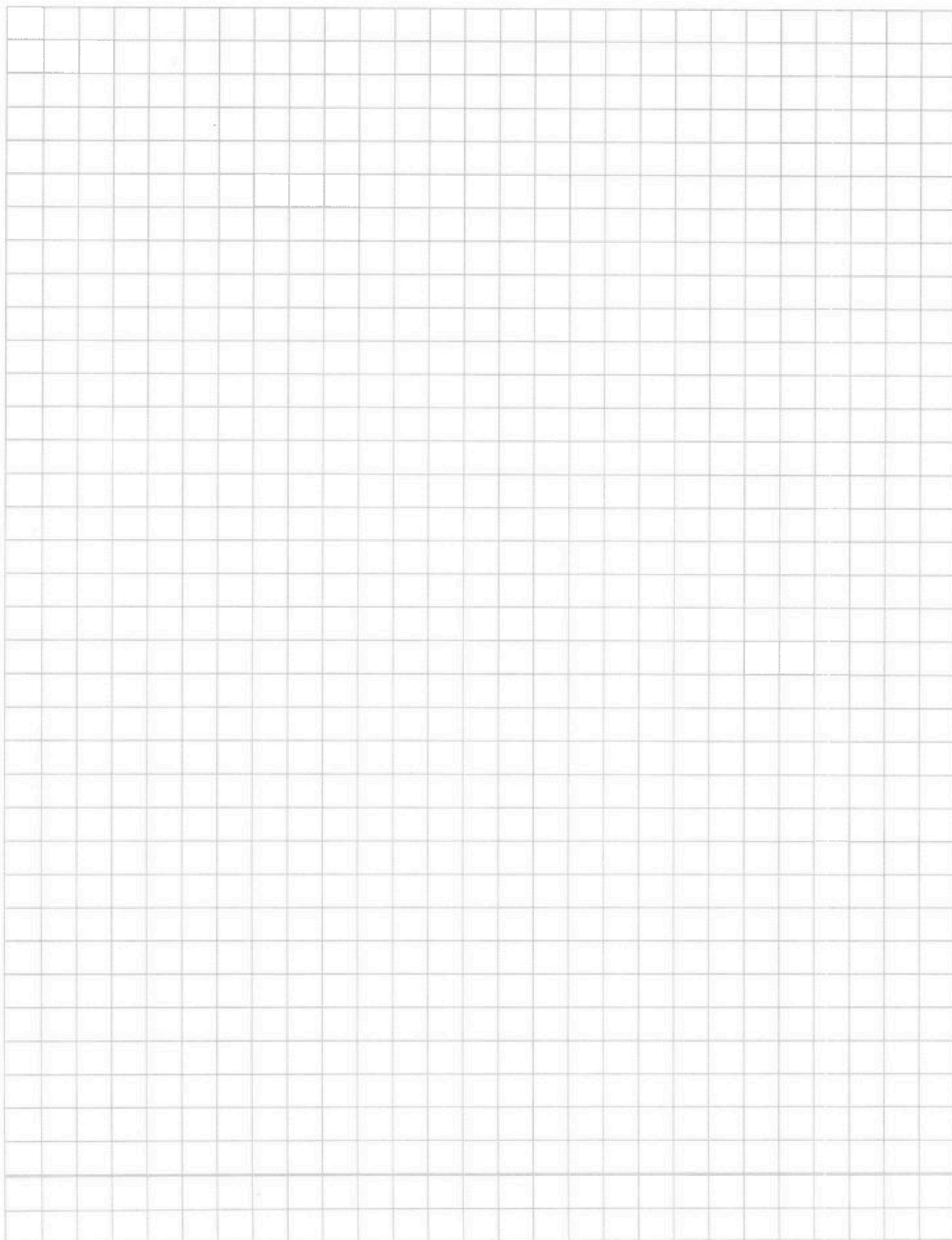
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

