



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a_i$  -  $i$ -ый член арифметической прогрессии,  $d$  - шаг арифметической прогрессии  $\Rightarrow$  (связка)

$$a_4 = 6 - 9x; \quad a_6 = (x^2 - 2x)^2;$$

$$a_{10} = 9x^2; \quad x = ?$$

Решение:  $a_i = d(i-1) + a_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6 - 9x = a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = 6 - 9x - 3d$$

$$a_1 + 5d = (x^2 - 2x)^2 = 6 - 9x - 3d + 5d =$$

$$= 6 - 9x + 2d \Rightarrow 2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$a_1 + 9d = a_{10} = 9x^2 = 6 - 9x - 3d + 9d =$$

$$= 6 - 9x + 6d = 6 - 9x + 3(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6) =$$

$$= 9x^2 \Rightarrow 2 - 3x + x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 = 3x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 6x - 4 = 0 =$$

$$= x^2(x^2 - 2x + 1) - 2x(x^2 - 2x + 1) - 4(x^2 - 2x + 1) =$$

$$= (x^2 - 2x - 4)(x - 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0, x = 1 \\ x^2 - 2x - 4 = 0, D = 4 + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{Ответ: } x = 1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$x - 2y \leq 2$~~   $|x - 2y| \leq 2$  равносильно

$\begin{cases} x - 2y + 2 \leq 2 \\ x - 2y \geq -2 \end{cases}$

(на графике отмечены вертикальной штриховкой)

~~$|2x - y| \leq 1$~~  равносильно  $\begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ 2x - y \geq -1 \end{cases}$

(на графике горизонтальной штриховкой отмечены штриховки и есть график.)

$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$

в пересечении прямых  
2)  ~~$x \neq 4$~~

2)  $(4; 4)$  - это точка, найдем ординату от центра окружности.

2)  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2 = 2x - 1 \end{cases}$

1)  $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x + 2 = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 2x - 1 \\ x + 2 = 4x - 2 \end{cases}; x = \frac{4}{3}$

$\begin{cases} \frac{4}{3} - y = 1 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$  построим окружность, касающуюся

прямой  $l$ , проходящую через точку пересечения  $(\frac{4}{3}; \frac{5}{3})$

$\Rightarrow 4y + 6x - 3 = 5 + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  максимальное значение  $7y + 6x = 19$ .

Ответ: 19.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AX$ -высота  $\triangle ABC$ ;  $M$ -ср.  $BC$ ;

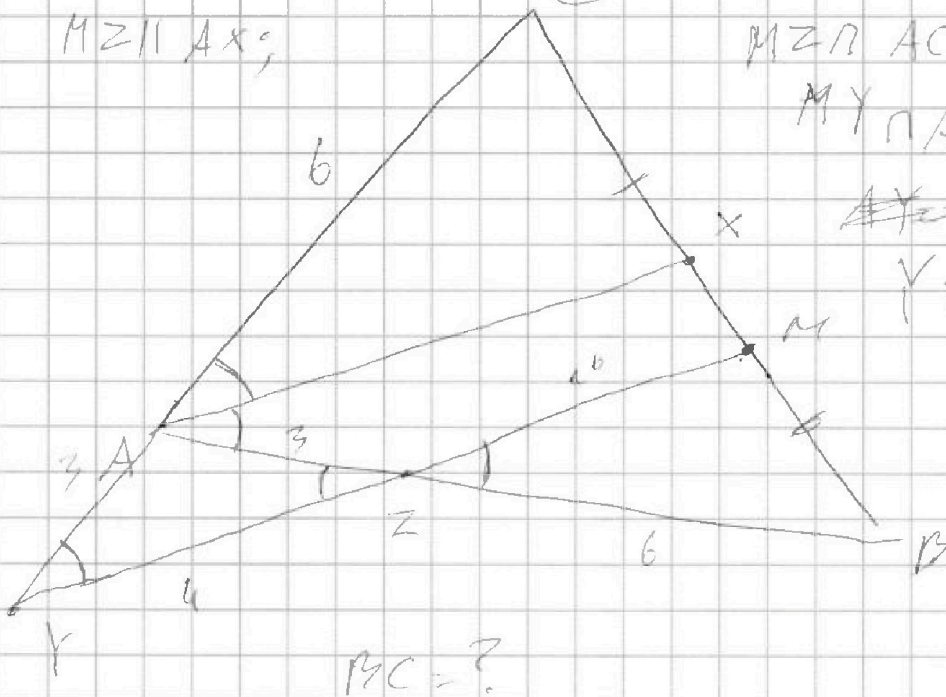
$MZ \parallel AX$ ;

$MZ \perp AC = (\circ) YZ$

$MY \perp AB = (\circ) Z$

$\angle Y = 40^\circ$ ,  $AC = 6$ ,  $\angle Z = 30^\circ$ ;

$YZ = a$ ;



$\angle C = ?$

Решение:  $\angle Y = 40^\circ$  (по усл.)  $\angle AX = \alpha \Rightarrow \angle XAB = \alpha$ ;

$AX \parallel ZM \Rightarrow$  (св. парал. прям., соответ. углы; (ср.  $AZ$ ))

$\angle XAB = \angle MZB = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AZY = \angle MZB = \alpha$  (вертикал.)  $\angle YAZ = 180^\circ - \angle CAB =$   
( $\angle$  сумм. углов вписан.)

$= 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$

$\angle AYZ = 180^\circ - \angle YZA - \angle YAZ =$

$= 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha \Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow$

(сумм. п/д)

(по усл.)

$\Rightarrow \triangle YAZ - \text{п/д} \Rightarrow AY = AZ = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

π2:  $MY$  пер/сек.  $\triangle ABC \Rightarrow$   
(средняя линия)

$$\Rightarrow \frac{CM}{MY} = \frac{BZ}{AZ} = \frac{AY}{YC} = 1$$

(π1, по усл.)

$$1 = \frac{BZ}{3} = \frac{3}{6} = 1 \Rightarrow BZ = 6$$

π3:  $AY$  пер/сек.  $\triangle ACM \Rightarrow$   
(сред. линия)

$$\Rightarrow \frac{MZ}{ZY} = \frac{AY}{AC} = \frac{MC}{CM} = 1$$

(π1, по усл.)

$$\frac{MZ}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow MZ = 16$$

π4: (сред. кос  $\triangle AZY$ )

$$AY^2 = AZ^2 + YZ^2 - 2 \cos(\angle AZY) \cdot AZ \cdot YZ$$

(π1, по усл.)

$$9 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(\angle AZY)$$

$$\cos(\angle AZY) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\angle AZY = \angle MZB \Rightarrow \cos(\angle MZB) = \cos(\angle AZY)$$

(сред. кос  $\triangle ZMB$ ) (π2, π3)

$$MB^2 = MZ^2 + ZB^2 - 2 \cos(\angle MZB) \cdot MZ \cdot ZB$$

$$MB^2 = 256 + 36 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 6 = 256 + 36 - 128 = 164$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{164} \Rightarrow BC = 2MB = 2\sqrt{164} \text{ км/ч. } BC = 4\sqrt{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+2)(4-x)} - 4 \quad (-2x^2 + 10x + 48 \geq 0)$$

$$x+2 + 4-x - 2\sqrt{(x+2)(4-x)} = 4(x+2)(4-x) - 29\sqrt{(x+2)(4-x)}$$

$$-4x^2 + 20x + 56 + 49 - 4 = 26\sqrt{-x^2 + 5x + 14}$$

$$-4x - 2x^2 + 10x + 49 = 13\sqrt{-x^2 + 5x + 14}$$

$$4x^4 + 100x^2 + 2304 - 40x^2 - 192x^2 + 960x =$$

$$= 13 - 196x^2 + 960x + 2366$$

$$4x^4 - 40x^3 + 44x^2 + 945x + 115x - 62 = 0$$

при подстановке  $x = \frac{1}{2}$

разделим многочлен на  $x - \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 40x^3 + 44x^2 + 945x - 62 & x - \frac{1}{2} \\ \hline -4x^4 + 2x^3 & \\ \hline -38x^3 + 44x^2 + 945x - 62 & \\ -38x^3 + 19x^2 & \\ \hline -56x^2 + 945x - 62 & \\ -56x^2 + 28x & \\ \hline 1 & \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 4 = 2\sqrt{4+5xy}$  ОДЗ:  $x \geq 0, y \leq 4 \Rightarrow$   
 2)  $x^4 + 4x - \sqrt{4y} = y^2 \sqrt{2x} + 4xy, x^2 - y^2 + 2x - 2y + \sqrt{2x} - \sqrt{2y}$   $y \leq 4$

2)  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2) + 2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{2x} + \sqrt{2y}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$   
 $x, y \geq 0 \Rightarrow$

$\sqrt{1} \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$   
 $\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$  1)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 4 = 2\sqrt{4+5xy}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если квадрат  $10 \times 10 \Rightarrow$  всего  $11 \times 11$  узлов  
 $= 121$  ~~узлов~~ узлов. Каждую раскраску  
 можно повернуть на  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$  каждая раскраска  $\leftrightarrow$   
 у каждой раскраски есть  $4$  "близнеца"  
 (если считать поворотом)  
 $\Rightarrow$  все раскраски распределены в группы  
 по  $4$  раскраски.

Следов. придем к задаче с учетом все-  
 жем раскраски  $C_{121}^2$ , но, на самом деле  
 их в  $4$  раза меньше  $\Rightarrow$  Ответ  $\frac{C_{121}^2}{4} =$

$$\frac{121!}{119! \cdot 2! \cdot 4} = \frac{120 \cdot 121}{8} = 15 \cdot 121 = 1815 \text{ ответов}$$

Ответ: 1815





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N^2$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 4m - 4n$$

$$M = m^2 + 2mn + n^2$$

$$(m + 2n)^2 - 4(m + 2n)$$

$$(m + 2n - 4)(m + 2n) = 459^2 = 210681$$

$$mn(m + 2n)$$

$$mn(m + 2n + 4) = 110901$$

Чёрт

$$m + 2n > m + 2n - 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

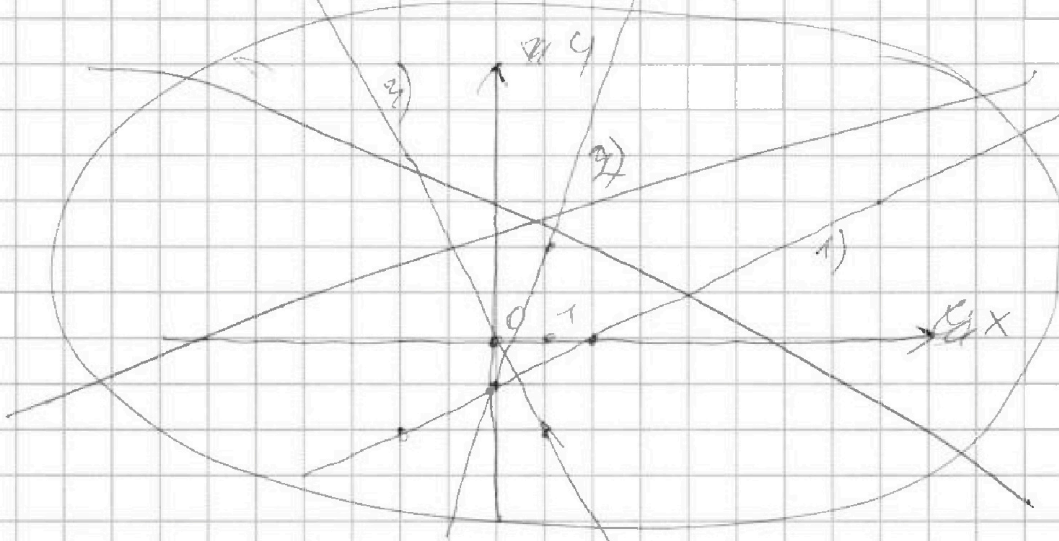
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь на координатной плоскости  
уравнение  $|x-2y| \leq 2$ ;  $|2x-y| \leq 1$

1)  $x-2y=2$ ; 2)  $2x-y=1$ ; 3)  $3y+6x=0$



1)  $y = \frac{x-2}{2} - 1$  у. функция св. прямой

x	2	0
y	0	-1

2)  $y = 2x - 1$  у. функция св. прямой

x	1	0
y	2	-1

3)  $y = -2x$  у. функция св. прямой

x	0	1
y	0	-2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  ~~$x - 2y = 2$~~   $x - 2y = 2$  преобразим

б)  $|x - 2y| = 2$

2)  $2x - y$  преобразим в  $|2x - y| = 1$

и)  $x - 2y = -2$

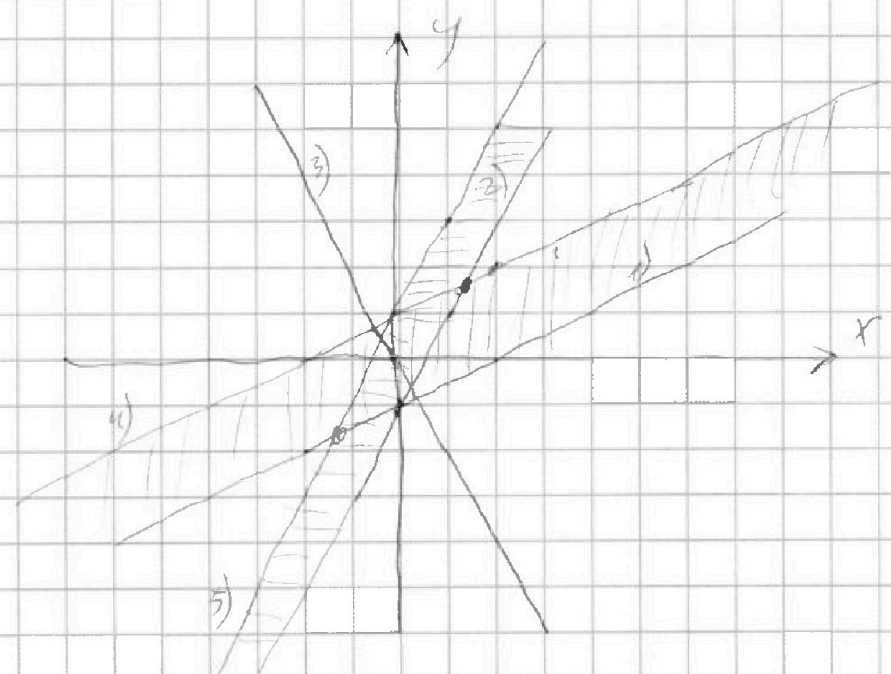
5)  $2x - y = -1$

пр. урав. сф. упр.

пр. урав. сф. упр.

x	2	0
y	2	1

x	1	0
y	2	1





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 4 = 2\sqrt{4+5x-x^2}$  ОДЗ:  $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 4, y \leq 2$   
 (1)  $x^2 + 4x - \sqrt{2x} = y^2 - \sqrt{2x} + 3y, x^2 - y^2 + 4x - 3y + \sqrt{2x} - \sqrt{2x} = 0$

1)  $x - y (\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}) (\sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}) (x^2 + 4x + y^2) + 3(\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}) (\sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}) + \sqrt{2x} (\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}) = 0$

2)  $(\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}) (\sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}) (x^2 + 4x + y^2) + 3(\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}) + \sqrt{2x} (\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}) = 0$   
 м.к.  $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x} \leq 0, x^2 + 4x + y^2 \geq 0, 3(\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}) \geq 0$   
 $\Rightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}) (x^2 + 4x + y^2 + 3) + \sqrt{2x} > 0$   
 $\Rightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{4-x} \Rightarrow (x+2 = 4-x) \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow 2) \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 4 = 2\sqrt{4+5x-x^2}$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} + 4 = 2\sqrt{(x+2)(4-x)}$   
 ОДЗ:  $x \geq 0, x \leq 4$   
 $a - b + 4 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow 49$   
 $a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2 - 2ab + 49$   
 м.к.  $x \geq 0, x \leq 4$   
 $\sqrt{4x} = \sqrt{4+2} = 3, \sqrt{4} = 2$

~~Оформление решения~~  
 $x+2 - 2\sqrt{(x+2)(4-x)} + 4 = x = 4(x+2)(4-x) - 29\sqrt{(x+2)(4-x)} + 49$   
 $29x + 56 = -4x^2 - 8x + 49 - 9 = 26\sqrt{(x+2)(4-x)}$   
 $-4x^2 + 20x + 96 = 26\sqrt{(x+2)(4-x)}; -2x^2 + 10x + 48 = 13\sqrt{(x+2)(4-x)}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

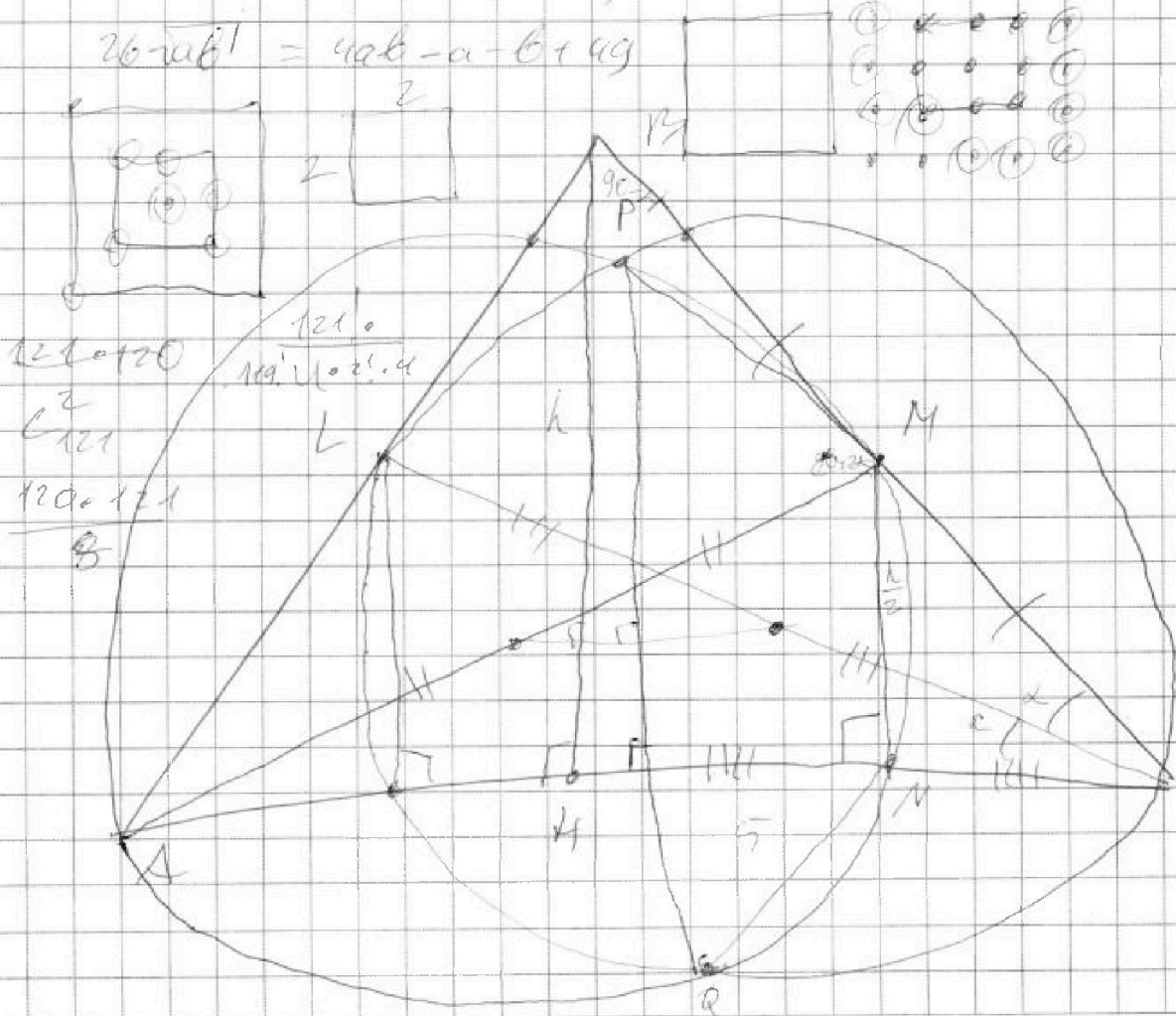
$$4x^4 + 100x^2 + 49^2 - 40x^2 = 9 \cdot 192x^2 + 960x = 17(x+2)(4-x) = 16 \cdot 1193x + 2366 - 169x^2 - 338x \Rightarrow 4x^4 - 40x^2 - 92x^2 + 960x - 1193x + 2366 + 169x^2 - 2366 + 49^2 = 0$$

$$4x^4 - 40x^2 + 92x^2 - 993x + 62 = 0$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 4 = 2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 4, a - 2 \cdot 4b + 4 = 4ab - 2 \cdot 2\sqrt{ab} + 49$$

$$26\sqrt{ab} = 4ab - a - b + 49$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 4m - 4n = (m+2n)^2 - 4(m+n) =$$

$$= (m+2n-4)(m+2n)$$

$$M = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

1. Пусть  $B = 11 \cdot p^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mn(m+2n+9) = 11 \cdot p^2$$

1) Если  $m=1 \Rightarrow n(m+2n+9) \cdot n(2n+10) = 11 \cdot p^2$

$$2n+10 > n \in \mathbb{N} \Rightarrow (2n+10) \mid 11 \cdot p^2, 2n+10 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow p \equiv 2 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 11 \cdot p^2 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow p \equiv 2 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow n(2n+10) = 44$$

$$2n^2 + 10n - 44 = 0; n^2 + 5n - 22 = 0; D = 25 + 88 =$$

$$= 113 \Rightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{113} - 10}{2} \approx 5 - \text{не натуральное} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \neq 1, \text{ и т.д.} \text{ Если } n=1 \Rightarrow m(m+1) = 11 \cdot p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Если } m \equiv 11 \pmod{11} \Rightarrow m+1 \equiv 12 \pmod{11}, m+1 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow m \equiv 11 \pmod{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \mid m(m+1) \equiv 11 \pmod{11} \Rightarrow p=11 \Rightarrow m^2 + 11m - 11^3 = 0$$

$$121 + 4 \cdot 121 \cdot m = 121 \cdot 45 - \text{не квадратное} \Rightarrow n \neq 1$$

2)  $m, n < m+2n+9 \Rightarrow m=p; n=p; m+2n+9 = 11 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m=n, A = (m+2n-4)(m+2n) = (3p-4) \cdot 3p = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9^2$$

$$m+2n+9=11 \Rightarrow m+2n=2 \Rightarrow m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{невозможно} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \neq 11 \cdot p^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 2 \cdot A = 110p^2 \Rightarrow K = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9^2$$

$$m(m+2n)(m+2n+4) = 11 \cdot p^2$$

$m+2n > m+2n-4$   $\Rightarrow$  - ОДНО из чисел четное

$$\Rightarrow 11 \cdot p^2 : 2 \Rightarrow p : 2 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow$$

$$1) \begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-4 = 20 \cdot 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} m+2n = 11 \cdot 2 \\ m+2n-4 = 2 \end{cases}$$

Ищем  $m+2n = k \Rightarrow$

$$k(k-4) = 44 \Rightarrow$$

$$k^2 - 4k + 44 = 0 \Rightarrow 49 + 146 = 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{4 \pm 15 + 4}{2} = 11; -9$$

$$\Rightarrow k = m+2n = 11$$

$$K = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9^2 = mn(m+2n+4) = mn \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K : 2 \Rightarrow 9^2 : 2 \Rightarrow 9 : 2 \Rightarrow 9 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = mn \cdot 20$$

$$3 \cdot 5 = mn$$

$$\Rightarrow m=1, n=15 \Rightarrow m+2n=31 - \text{не подходит}$$

$$m=3, n=5 \Rightarrow m+2n=13 - \text{не подходит}$$

$$m=5, n=3 \Rightarrow m+2n=11$$

$$m=15, n=1 \Rightarrow m+2n=17 - \text{не подходит}$$

$\Rightarrow$  перебором. Методом

$$m=5, n=3$$

Ответ:  $m=5, n=3$

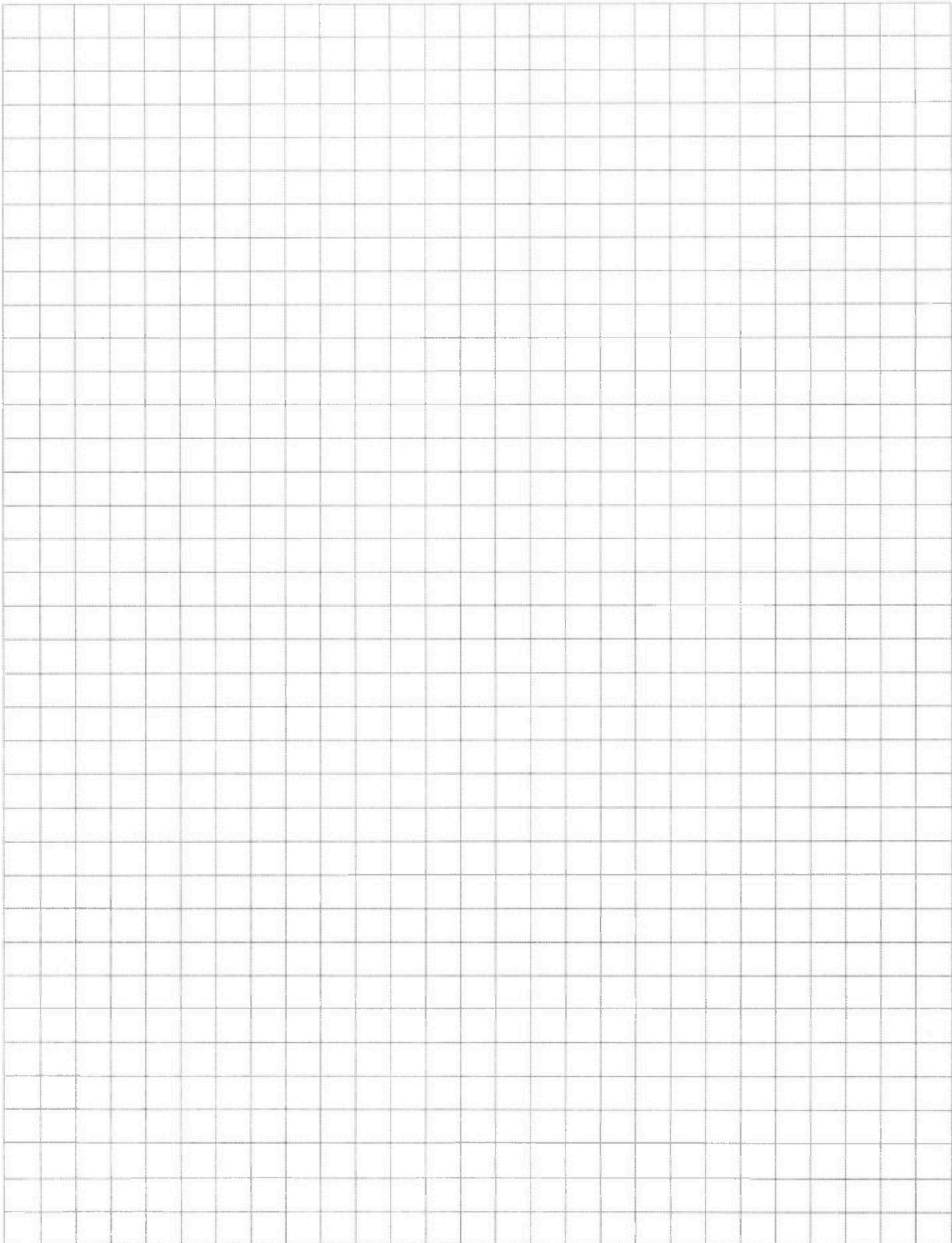


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$3y + 6x$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$|2y - x| \leq 2$$

$$|2x - y| \leq 1$$

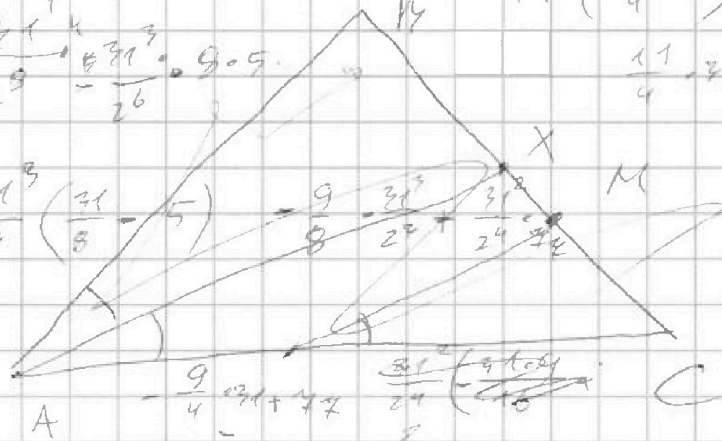
$$2x = y + kx + y$$

$$\frac{31^4}{4} + 31^4 = 5$$

$$4y = 2x + 5$$

$$\frac{31^4}{2^3} - \frac{31^3}{2^6} = 9 = 9$$

$$\frac{31^3}{2^3} \left( \frac{21}{8} - 5 \right) = 9 - \frac{31^3}{2^2} + \frac{31^2}{24} = 4$$

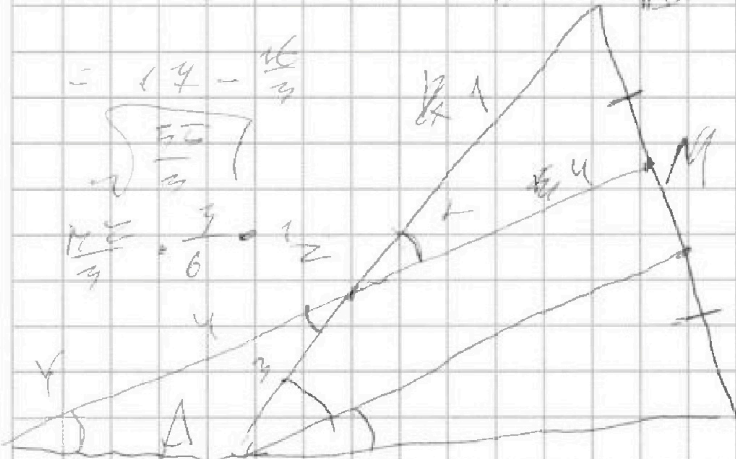


$$16 + 1 + 2 = 4 \cdot 0 = 0 = B$$

$$= 14 - \frac{16}{2}$$

$$\sqrt{\frac{50}{2}}$$

$$\frac{12}{9} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



$$12 = 12$$

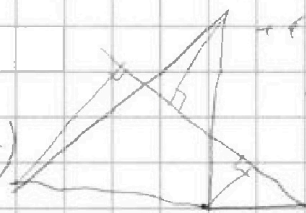
$$12 = 12$$

$$6$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AY}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AZ}{AC} = 1$$

$$\frac{31^4}{24} \cdot 4 - \frac{27}{24} = \frac{27}{24} = 309$$

$$\frac{31^4}{4} - \frac{31^3 \cdot 0.5}{2} + \frac{31^2}{4} \cdot 4 = 115.71 = 62$$



$$\frac{11}{4} \cdot 31^2 = \frac{31^2}{2}$$

$$9 = 9 + 16 = 24 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \alpha = 1$$

$$r = 9$$

$$12 = 30r \quad r = 4$$

$$\frac{MN}{MC} = \frac{AC}{YC} = \frac{AZ}{ZB} = 1$$

$$1 = \frac{6}{6+A} = \frac{9}{k} = 1$$

$$\frac{12}{9} = \frac{AY}{AC} = \frac{MC}{AC} = 1$$

$$9 = 6k \cdot kA$$

$$C6$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AY}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AZ}{AC} = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - 3d = 6 - 9x$$

$$x = ?$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 15 \\ 15 \\ \hline 1605 \\ 15 \\ \hline 1515 \end{array}$$

$$a + 5d = (x^2 - 2x)^2$$

$$\sqrt{6} (2\sqrt{a} + 1) = \frac{1}{2} (2\sqrt{a} + 1) + 1,5$$

$$a + 9d = 9x^2$$

$$a = 6 - 9x - 3d \quad (\sqrt{6} \frac{1}{2}) (2\sqrt{a} + 1) = 6,5$$

$$6 - 9x - 3d + 5d = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$ad = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$6 - 9x - 3d + 9d$$

$$6 - 9x + 6d$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 169 \\ 119 \\ \hline 169 \\ 169 \\ \hline 345 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 109 \\ \times 148 \\ 316 \\ \hline 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$-15 \cdot 9x^2 = 9x^2$$

$$64 - 320 + 440x - 62 = 0$$

$$3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 15x - 12 = 0$$

$$\frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{43}{9} - \frac{4 \cdot 15}{9} - \frac{62}{9} = 4x^2 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$\frac{1}{4} - 5 + \frac{44}{4} + \frac{15}{2} - 62$$

$$x = 1 \Rightarrow 4 + 40 + 44 - 115 - 62$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ -3x^3 + x^2 \\ \underline{-3x^3 + 9x^2} \\ -2x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ 4x - 4 \end{array}$$

$$x + 2 + 7 - x =$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$-2\sqrt{(x+d)(4-x)} =$$

$$= 4 \cdot 14 + 4 \cdot 5 \cdot 4 - 4x^2 +$$

$$\sqrt{28(14+5x-x^2)} + 49$$

$$4x - 4$$

$$\sqrt{26(14+5x-x^2)} = -4x^2 + 20x + 96$$

$$\sqrt{169(14+5x-x^2)} = 4x^2 + 100x +$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ -3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-3x^3 + 9x^2} \\ -2x^2 + 2x - 4 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ -4x - 4 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$4 \cdot 34^4 - 40 \cdot 34^3$   
 $34^3(4 \cdot 34 - 40)$   
 $34^3(4 \cdot 34 - 40)$   
 $34^3(136 - 40)$   
 $34^3 \cdot 96$   
 $34^2(34 \cdot 96)$   
 $1156 \cdot 96$   
 $110976$

$a = 2ab + b - 4$   
 $a - b + 4 = 2ab$   
 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$   
 $169 = 169$   
 $169 = 169$   
 $118 \frac{2}{3}$   
 $118 \frac{2}{3}$   
 $118 \frac{2}{3} \cdot 3 = 356$   
 $356 + 4 = 360$   
 $360 \cdot 3 = 1080$   
 $1080 + 4 = 1084$   
 $1084 \cdot 3 = 3252$   
 $3252 + 4 = 3256$   
 $3256 \cdot 3 = 9768$   
 $9768 + 4 = 9772$   
 $9772 \cdot 3 = 29316$   
 $29316 + 4 = 29320$   
 $29320 \cdot 3 = 87960$   
 $87960 + 4 = 87964$   
 $87964 \cdot 3 = 263892$   
 $263892 + 4 = 263896$   
 $263896 \cdot 3 = 791688$   
 $791688 + 4 = 791692$   
 $791692 \cdot 3 = 2375076$   
 $2375076 + 4 = 2375080$   
 $2375080 \cdot 3 = 7125240$   
 $7125240 + 4 = 7125244$   
 $7125244 \cdot 3 = 21375732$   
 $21375732 + 4 = 21375736$   
 $21375736 \cdot 3 = 64127208$   
 $64127208 + 4 = 64127212$   
 $64127212 \cdot 3 = 192381636$   
 $192381636 + 4 = 192381640$   
 $192381640 \cdot 3 = 577144920$   
 $577144920 + 4 = 577144924$   
 $577144924 \cdot 3 = 1731434772$   
 $1731434772 + 4 = 1731434776$   
 $1731434776 \cdot 3 = 5194304328$   
 $5194304328 + 4 = 5194304332$   
 $5194304332 \cdot 3 = 15582912996$   
 $15582912996 + 4 = 15582912999$   
 $15582912999 \cdot 3 = 46748738997$   
 $46748738997 + 4 = 46748738999$   
 $46748738999 \cdot 3 = 140246216997$   
 $140246216997 + 4 = 140246216999$   
 $140246216999 \cdot 3 = 420738650997$   
 $420738650997 + 4 = 420738650999$   
 $420738650999 \cdot 3 = 1262215952997$   
 $1262215952997 + 4 = 1262215952999$   
 $1262215952999 \cdot 3 = 3786647858997$   
 $3786647858997 + 4 = 3786647858999$   
 $3786647858999 \cdot 3 = 11359943576997$   
 $11359943576997 + 4 = 11359943576999$   
 $11359943576999 \cdot 3 = 34079830730997$   
 $34079830730997 + 4 = 34079830730999$   
 $34079830730999 \cdot 3 = 102239492192997$   
 $102239492192997 + 4 = 102239492192999$   
 $102239492192999 \cdot 3 = 306718476578997$   
 $306718476578997 + 4 = 306718476578999$   
 $306718476578999 \cdot 3 = 920155429736997$   
 $920155429736997 + 4 = 920155429736999$   
 $920155429736999 \cdot 3 = 2760466289210997$   
 $2760466289210997 + 4 = 2760466289210999$   
 $2760466289210999 \cdot 3 = 8281398867632997$   
 $8281398867632997 + 4 = 8281398867632999$   
 $8281398867632999 \cdot 3 = 24844196602898997$   
 $24844196602898997 + 4 = 24844196602898999$   
 $24844196602898999 \cdot 3 = 74532589808696997$   
 $74532589808696997 + 4 = 74532589808696999$   
 $74532589808696999 \cdot 3 = 223597769426090997$   
 $223597769426090997 + 4 = 223597769426090999$   
 $223597769426090999 \cdot 3 = 670793308278272997$   
 $670793308278272997 + 4 = 670793308278272999$   
 $670793308278272999 \cdot 3 = 2012379924834818997$   
 $2012379924834818997 + 4 = 2012379924834818999$   
 $2012379924834818999 \cdot 3 = 6037139774504456997$   
 $6037139774504456997 + 4 = 6037139774504456999$   
 $6037139774504456999 \cdot 3 = 18111419323513370997$   
 $18111419323513370997 + 4 = 18111419323513370999$   
 $18111419323513370999 \cdot 3 = 54334257970540112997$   
 $54334257970540112997 + 4 = 54334257970540112999$   
 $54334257970540112999 \cdot 3 = 163002773911620338997$   
 $163002773911620338997 + 4 = 163002773911620338999$   
 $163002773911620338999 \cdot 3 = 489008321734861016997$   
 $489008321734861016997 + 4 = 489008321734861016999$   
 $489008321734861016999 \cdot 3 = 1467024965204583050997$   
 $1467024965204583050997 + 4 = 1467024965204583050999$   
 $1467024965204583050999 \cdot 3 = 4401074895613749152997$   
 $4401074895613749152997 + 4 = 4401074895613749152999$   
 $4401074895613749152999 \cdot 3 = 13203224686841247458997$   
 $13203224686841247458997 + 4 = 13203224686841247458999$   
 $13203224686841247458999 \cdot 3 = 39609674060523742376997$   
 $39609674060523742376997 + 4 = 39609674060523742376999$   
 $39609674060523742376999 \cdot 3 = 118829022181571227130997$   
 $118829022181571227130997 + 4 = 118829022181571227130999$   
 $118829022181571227130999 \cdot 3 = 356487066544713681392997$   
 $356487066544713681392997 + 4 = 356487066544713681392999$   
 $356487066544713681392999 \cdot 3 = 1069461199634141044178997$   
 $1069461199634141044178997 + 4 = 1069461199634141044178999$   
 $1069461199634141044178999 \cdot 3 = 3208383598902423132536997$   
 $3208383598902423132536997 + 4 = 3208383598902423132536999$   
 $3208383598902423132536999 \cdot 3 = 9625150796707269397610997$   
 $9625150796707269397610997 + 4 = 9625150796707269397610999$   
 $9625150796707269397610999 \cdot 3 = 28875452390121808192832997$   
 $28875452390121808192832997 + 4 = 28875452390121808192832999$   
 $28875452390121808192832999 \cdot 3 = 86626357170365424578498997$   
 $86626357170365424578498997 + 4 = 86626357170365424578498999$   
 $86626357170365424578498999 \cdot 3 = 259879071511096273735496997$   
 $259879071511096273735496997 + 4 = 259879071511096273735496999$   
 $259879071511096273735496999 \cdot 3 = 779637214533288821206490997$   
 $779637214533288821206490997 + 4 = 779637214533288821206490999$   
 $779637214533288821206490999 \cdot 3 = 2338911643599866463619472997$   
 $2338911643599866463619472997 + 4 = 2338911643599866463619472999$   
 $2338911643599866463619472999 \cdot 3 = 7016734930799599390858418997$   
 $7016734930799599390858418997 + 4 = 7016734930799599390858418999$   
 $7016734930799599390858418999 \cdot 3 = 21050204792398798172575256997$   
 $21050204792398798172575256997 + 4 = 21050204792398798172575256999$   
 $21050204792398798172575256999 \cdot 3 = 63150614377196394517725770997$   
 $63150614377196394517725770997 + 4 = 63150614377196394517725770999$   
 $63150614377196394517725770999 \cdot 3 = 189451843131589183553177312997$   
 $189451843131589183553177312997 + 4 = 189451843131589183553177312999$   
 $189451843131589183553177312999 \cdot 3 = 568355529394767550659531938997$   
 $568355529394767550659531938997 + 4 = 568355529394767550659531938999$   
 $568355529394767550659531938999 \cdot 3 = 1705066588184302651978595816997$   
 $1705066588184302651978595816997 + 4 = 1705066588184302651978595816999$   
 $1705066588184302651978595816999 \cdot 3 = 5115199764552907955935787450997$   
 $5115199764552907955935787450997 + 4 = 5115199764552907955935787450999$   
 $5115199764552907955935787450999 \cdot 3 = 15345599293658723867807362352997$   
 $15345599293658723867807362352997 + 4 = 15345599293658723867807362352999$   
 $15345599293658723867807362352999 \cdot 3 = 46036797880976171603422087058997$   
 $46036797880976171603422087058997 + 4 = 46036797880976171603422087058999$   
 $46036797880976171603422087058999 \cdot 3 = 138110393642928514810266261176997$   
 $138110393642928514810266261176997 + 4 = 138110393642928514810266261176999$   
 $138110393642928514810266261176999 \cdot 3 = 414331180928785544430798783530997$   
 $414331180928785544430798783530997 + 4 = 414331180928785544430798783530999$   
 $414331180928785544430798783530999 \cdot 3 = 1242993542786356633292396350592997$   
 $1242993542786356633292396350592997 + 4 = 1242993542786356633292396350592999$   
 $1242993542786356633292396350592999 \cdot 3 = 3728980628359070000000000000000000$   
 $3728980628359070000000000000000000 + 4 = 3728980628359070000000000000000000$

$x^2 - y^3 + 3x - 2y + \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0$   
 $(x - 2y) \leq 2$   
 $x - 2y \leq 2$   
 $x - 2y \geq -2$   
 $(\sqrt{x} - \sqrt{2y})(\sqrt{2x} + \sqrt{2y})(x^2 + x + y^2) + \sqrt{2}(x - \sqrt{2y})(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) +$   
 $= \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{2y}) = 0$   
 $(-\sqrt{x} - \sqrt{2y})(x^2 \sqrt{x} + \sqrt{x}(x + y^2) + \sqrt{2y}(x^2 + y^2) + \sqrt{2y}(x + y) + \sqrt{2y}y^2 + 3\sqrt{x} + 3\sqrt{2y} + \sqrt{2}) = 0$   
 $x = 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x} = y + 2\sqrt{4+5x-x^2}$   
 $x^2 - 9x - 14 = 25 + 56$   
 $\frac{2+9 \pm 9}{2} = 10, -2$