



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 12 - 12x; \quad a_4 = (x^2 + 4x)^2; \quad a_8 = -6x^2;$$

Пусть мы имеем прогрессию  $d$ :

$$\begin{cases} a_4 = a_2 + 2d \\ a_8 = a_4 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 4x)^2 = 12 - 12x + 2d & (1) \\ -6x^2 = (x^2 + 4x)^2 + 4d & (2) \end{cases}$$

$$\text{Из (2) - (1) \cdot 2: } -6x^2 - 2(x^2 + 4x)^2 =$$

$$= (x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 4d - 4d$$

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0 \quad | :3$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

~~Если  $x=0$ , то  $-8=0 \Rightarrow \emptyset$~~

~~$\emptyset \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$  можем кубе поделить на  $x^2$ :~~

~~$$x^2: x^2 + 8x + 18 + \frac{8}{x} - \frac{8}{x^2} = 0$$~~

~~$\neq$~~

Заметим, что при  $x = -2$ :

$$16 - 8 \cdot 8 + 18 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 8 = 16 - 64 + 72 - 24 =$$

$$= 88 - 88 = 0$$

$\Rightarrow x = -2$  корень



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получим разложение на линейные множители по теореме Безу и методу теоретических корней:

$$(x+2) \mid (x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$$

Найдём корни второй скобки:

Заметим, что при  $x = -2$ :

$$-8 + 6 \cdot 4 - 12 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ — корень второй скобки.}$$

$\Rightarrow$  исходное уравнение принимает вид:

$$(x+2)^2 (x^2 + 4x - 2) = 0$$

Найдём корни второй скобки:

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 8 = 24 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Ответ:  $x \in \{-2 - \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}; -2\}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{40}{3}x + 10 \geq t \geq \frac{40}{3}x - 10 & (1) \\ \frac{35}{2}x + 10 \geq t \geq \frac{35}{2}x - 10 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{35}{2}x + 10 \geq \frac{40}{3}x - 10$$

$$\left(\frac{35}{2} - \frac{40}{3}\right)x \geq -20$$

$$\frac{105 - 80}{6}x \geq -20$$

$$\frac{25}{6}x \geq -20$$

$$x \geq \frac{-120}{25} = -\frac{24}{5}$$

$$\Rightarrow t \geq 35x \quad t \geq \frac{40}{3}x - 10 \geq \frac{-24 \cdot 40}{5} - 10 = -74$$

$$= \sqrt{-8 \cdot 8x - 40} \geq -\frac{40}{5} \cdot \frac{24}{5} - 10 = -74$$

$$\text{Пусть } x = -\frac{24}{5} \text{ и } y = -\frac{26}{5}, \quad 10x + 5y = \text{min} = -74$$

Ответ:  $-74$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Если  $2x \geq 3y$  и  $3x \geq 2y$ ;

$$\begin{cases} x \geq 1,5y \\ x \geq \frac{2}{3}y \\ 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

$10 + 40x \geq t \geq 40x - 10$

$10 + \frac{35}{2}x \geq t \geq \frac{35}{2}x - 10$

$35x \geq 20$

$x \geq \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

$10 + 40 \cdot \frac{4}{7} \geq t \geq 40 \cdot \frac{4}{7} - 10$

$10 + \frac{160}{7} \geq t \geq \frac{160}{7} - 10$

$\frac{130}{7} \geq t \geq \frac{90}{7}$

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

Пусть  $10x + 5y = t$ ; тогда  $y = \frac{t - 10x}{5}$ ; найдем минимальное значение  $t$ :

$$\begin{cases} -6 \leq 2x - \frac{3}{5}t + 6x \leq 6 \\ -4 \leq 3x - \frac{2}{5}t + 4x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 8x - \frac{3}{5}t \leq 6 \quad (1) \\ -4 \leq 7x - \frac{2}{5}t \leq 4 \quad (2) \end{cases}$$

(1)  $-10 \leq 15x - t \leq 10$

(2)  $-10 - 15x \leq -t \leq 10 - 15x$

$+10 + 15x \geq t \geq 15x - 10$

$t \geq 15x - 10 \Rightarrow t_{\min} = 15x - 10$

$\Rightarrow 10x + 5y = 15x - 10 \Rightarrow y = x - 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2)$$

1) Если  $A = 17p^2$ ,  $B = 15q^2$ . Если  $A$ : Если  $m - 2n : 2$ , то  $p = 2$ ; ~~иначе  $17p^2 : 2$~~   $\Rightarrow$  Если  $m - 2n \times 2$ , то  $m : 2 \Leftrightarrow m - 2n + 13 : 2 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow p = 2$

$$A = 17 \cdot 4 = 68; \text{ очевидно } m - 2n < m - 2n + 13;$$

то  $m, n, A = 68$ , но  $m - 2n$  и  $m - 2n + 13$  должны быть делителями 68 так как  $m, n$  целые числа разность 13;  $68 = 2^2 \cdot 17$

$\Rightarrow m - 2n = 4$ ;  $m - 2n + 13 = 17$ ; урываются в произведение; ~~иначе~~ Если  $B = mn(m - 2n - 2) = 15q^2 \Rightarrow$

$$mn \cdot (4 - 2) = 15q^2 \Rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2 \Rightarrow q = 2, \text{ так как } q - \text{не простое число} \Rightarrow$$

$$2mn = 4 \cdot 15 \Rightarrow mn = 30, m - 2n = 4$$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m - 2n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ \frac{30}{n} - 2n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ 2n^2 + 4n - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ n^2 + 2n - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 15 \cdot 4}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{30}{n} \\ n = 3 \\ n = -5 \Rightarrow \text{н.к. } n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (10, 3)$$

2) Если  $A = 15q^2$ ,  $B = 17p^2$ . Если  $A$ : Аналогично  $q : 2$ , так как либо  $m - 2n$ , либо  $m - 2n + 13 : 2 \Rightarrow$

$$(m - 2n)(m - 2n + 13) = 60; 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ Заметим, что } 60 \text{ делится на } 13 \Rightarrow \text{Ответ: } (10, 3)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle YZA = \angle ZAX$ , т.к. накрест лежащие при секущей AZ и ||-х прямых AX и MY

$$\Rightarrow \angle ZYA = 180^\circ - \angle YZA - \angle ZAY =$$

$$= 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha \Rightarrow \triangle YAZ \text{ р.и.о., т.к.}$$

уны при основании равны  $\Rightarrow AZ = AY = 6$

3) AX и MY ||-ны  $\Rightarrow \triangle YBM \sim \triangle ABX$  по двум углам  $\Rightarrow$

$$\frac{AB}{AY} = \frac{BX}{MX}$$

Заметим, что  $CM = MB = 2x$ , а  $MX = x \Rightarrow$

$$x \cdot 6 = 2x \cdot \frac{AB}{6} \Rightarrow \frac{AB}{6} = \frac{6}{2} \Rightarrow AB = 6$$

$$\Rightarrow AB = 6$$

4) ИК кос гме  $\triangle YAZ$ :  $YZ^2 = ZA^2 + YA^2 - 2ZA \cdot YA \cdot \cos \angle YAZ$

$$\cdot \cos \angle YAZ \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)$$

$$\Rightarrow 64 = 72 + 72 \cdot \cos 2\alpha, \text{ т.к. } \cos(180^\circ - 2\alpha) =$$

$$= -\cos(2\alpha) \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

5) ИК кос гме  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AC^2 + BA^2 - 2AC \cdot BA \cdot \cos(2\alpha)$$

$$BC = \sqrt{36 + 78^2 - 36 \cdot 6 \cos 2\alpha} = \sqrt{36 + 324 + 24}$$

$$= \sqrt{384} = 2\sqrt{96} = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6} \text{ Ответ: } 8\sqrt{6}$$



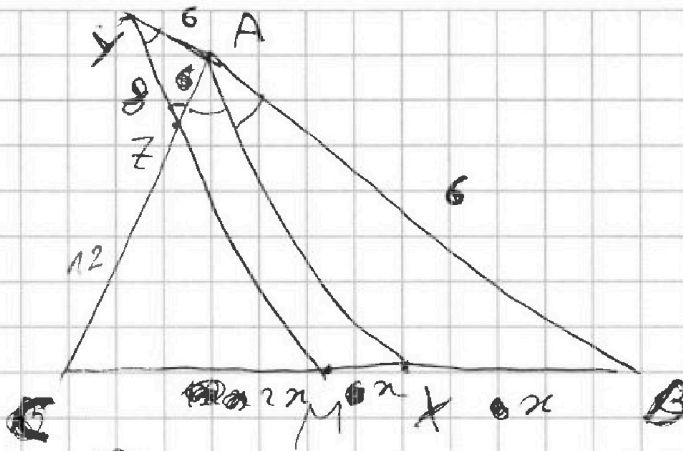


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ;

$AX$  — бис-са;  $YZ = 8$

$[M = MB; M \in [CB]]$

$MZ \parallel AX; AC = 18; AZ = 6$

Найти:  $BC = ?$

Решение

1. Так как  $AX \parallel YZ$  по условию,  $\triangle AXB \sim \triangle YZM$

$\Rightarrow \frac{AB}{AY} = \frac{BX}{MY}$ ; В то же время  $AX$  —

бис-са угла  $\angle CAB \Rightarrow$  по св-ву бис-сы

$\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB}$  . Прямые пропорциональные два отноше-

ние:  $\frac{AC}{AY} = \frac{CX}{MX}$

1)  $AC = 18; AZ = 6 \Rightarrow ZC = AC - AZ = 12$

$\Rightarrow \frac{CZ}{ZA} = \frac{2}{1}$ ;  $ZM \parallel AX \Rightarrow \triangle ZCM \sim \triangle AXB$  (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{CM}{MX} \Rightarrow \frac{CM}{MX} = 2 \Rightarrow CM = 2x$   
 $MX = x$

2)  $\angle CAZ = \alpha$ ;  $\angle XAB = \angle CAZ = \alpha$ ;  $\angle YAC = 180^\circ - 2\alpha$  как смежные с  $\angle CAB = \angle CAZ + \angle XAB = 2\alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$U_{\max} \begin{cases} ab=3 \\ ab=\frac{3}{2} \\ a^2+b^2=7 \end{cases}; \quad 1) \begin{cases} ab=3 \\ a^2+b^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{a} \\ a^2+\frac{9}{a^2}=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4 - 7a^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow D = 49 - 36 = 13$$

$$a^2 = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow x + 4 = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 8 = 7 + \sqrt{13} \\ 2x + 8 = 7 - \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \leq 3 \\ x = \frac{-\sqrt{13} - 1}{2} \Rightarrow \text{m.k. } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right);$$

$$\left( \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right)$$

$$2) \begin{cases} ab = \frac{3}{2} \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2a} \\ a^2 + \frac{9}{4a^2} = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a^4 - 28a^2 + 9 = 0$$

$$D = 196 - 36 = 160$$

$$a^2 = \frac{7 \pm 4\sqrt{10}}{4}$$

$$\Rightarrow x + 4 = \frac{7 \pm 4\sqrt{10}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+16} = 7 + 4\sqrt{10} \\ \sqrt{x+16} = 7 - 4\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 16 = 49 + 4\sqrt{10} \\ 4x + 16 = 49 - 4\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} - \frac{1}{2} \leq 3 \\ x = -\sqrt{10} - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{m.k. } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left( \sqrt{10} - \frac{1}{2}, \sqrt{10} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left( \sqrt{10} - \frac{1}{2}, \sqrt{10} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( \sqrt{10} - \frac{1}{2}, \sqrt{10} - \frac{1}{2} \right); \left( \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (1) \quad x^2 - 4y \leq 3 \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x + 4y^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2): 2x^5 + 4x^2 - 2y^5 - 4y^2 = \sqrt[4]{3y} - \sqrt[4]{3x}$$

$$2 \cdot (x-y) \cdot (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + 4 \cdot (x-y) \cdot (x+y) = \sqrt[4]{3} \cdot (\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{x})$$

$$(x-y)(2x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4 + 4x + 4y) = \sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{x})$$

(2): Заметим, что это уравнение симметрично относительно  $x$  и  $y \Rightarrow$  можем предположить, что  $x \geq y$ :  $2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 = \sqrt[4]{3y} - \sqrt[4]{3x}$

Также заметим, что  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ ,

т.к. по корням центральной степени смо-

жем  $3y$  и  $3x$ ; Если  $x \geq y$ , то  $2x^5 \geq 2y^5$  и

$4x^2 \geq 4y^2$ , т.к.  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$  ~~и тогда~~ ~~и тогда~~.

~~и тогда~~ ~~и тогда~~; Но в любое время  $\sqrt[4]{3y} \leq$

$\leq \sqrt[4]{3x} \Rightarrow$  левая часть  $\geq 0$ , а правая  $\leq 0$

значит  $y \geq x \Rightarrow$  ~~и тогда~~ ~~и тогда~~  $\Rightarrow y = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3x} = 2x^5 - \sqrt[4]{3x + 4x^2} \\ x^2 - 4, x \leq 3 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{72-x-x^2} \\ x \geq 0; x \geq -4; x \leq 3 \end{cases}$$

Сделаем замену  $a = \sqrt{x+4} \geq 0$  и  $b = \sqrt{3-x} \geq 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{3-x} \\ x \geq 0; x \geq -4; x \leq 3 \end{cases} \text{ и не забываем}$$

Замена  $a = \sqrt{x+4} \geq 0$ ,  $b = \sqrt{3-x} \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 & (3) \\ a - b + 5 = 2ab & (4) \end{cases}$$

$5a^2 + 5b^2 + 7a - 7b - 14ab = 0$

$(3) + (4): a^2 + b^2 - 2ab + a - b = 2$

$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 + a - b = 2$

$(4): a - b = 2ab - 5$

$a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2 - 20ab + 25b = 2ab - 9$

$4a^2 - 22ab + 25b^2 = 0$

$a = 2b$

возводим в квадрат

Замена:  $a = \sqrt{x+4} \geq 0$

и  $b = \sqrt{3-x} \geq 0$

$$\begin{cases} a - b + 5 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2ab - 5 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab = 4a^2 - 20ab + 25b^2 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a^2 - 18ab + 18b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 9ab + 9b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ ab = 1,5 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

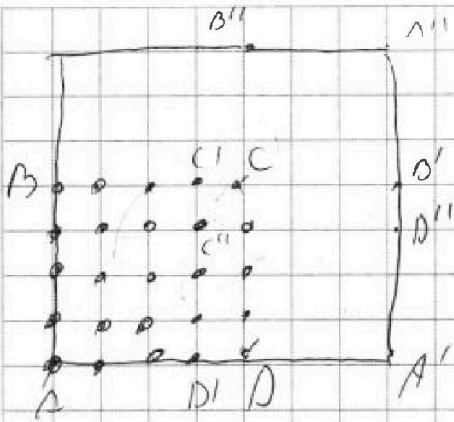
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

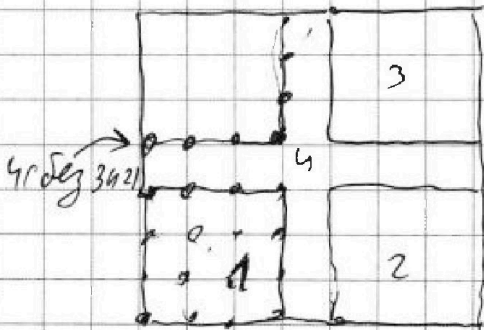
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



71 Заметим, что принципиально раскраски разные возможны и так: либо оба белыми узла в одной четверти наименьшего  $\square ABCD$ , либо будут красна одна в квадрате  $ABCD$  и другая в  $A'B'C'D'$ , либо одна в  $ABCD$  и другая в  $A''B''C''D''$

21 В первом случае способов 25

Во втором



Заметим, что принципиально раскраски различаются по узлам.

I одна белая в 1, другая в 3

II одна в 1, другая в 2

III одна в 1, другая в 4 (без 3 и 2)

IV обе в 4

Остальные способы получаются поворотами.

I: способов:  $16 \cdot 16 = 256$

II: способов:  $16 \cdot 16 = 256$

III: способов:  $16 \cdot 7 = 112$

IV: способов:  $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$

$\Rightarrow$  Ответ:  $256 + 256 + 112 + 120 = 512 + 232 = 744$



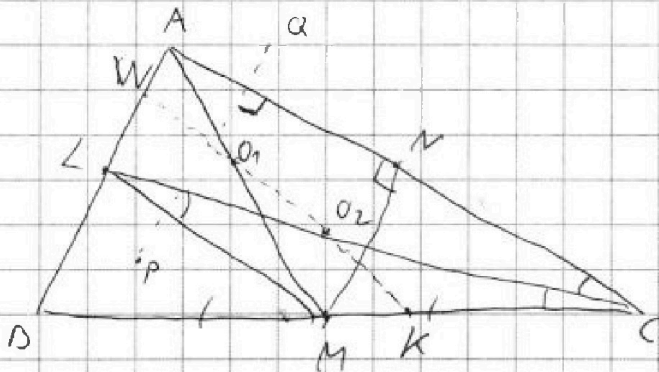


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\omega \cap BC = \{P, Q\}$   
 $P, Q, A, M \in \Omega$  (опр-ть с диаметром  $AM$ );  $L, Q, P \in \omega$  (опр-ть с диаметром  $LM$ );  $AN = 5$   
 $AB = 6$ ;  $PQ \parallel$  высоте  $\triangle ABC$

1)  $PQ \parallel$  высоте из  $B$  на  $AC \Rightarrow PQ \perp AC$

В то же время  $PQ$  - хорда  $\omega$  и  $\Omega \Rightarrow PQ \perp$  линии центров  $\Rightarrow$  линии центров  $\perp$  на  $AC$ .

Кроме того пусть  $O_1 - ц. \Omega$ ;  $O_2 - ц. \omega$ . Пусть  $(O_1 O_2) \cap BC =$

$= K$ ;  $(O_1 O_2) \cap AB = W$ ; тогда  $O_2 K$  - ср. линия в  $\triangle LAC \Rightarrow$

$LW = WA$  и  $O_2 K$  - ср. линия в  $\triangle ACM \Rightarrow MK = KC \Leftrightarrow$

$KC = MK$  и  $CO_2 = O_2 C \Rightarrow O_2 K$  - ср. линия в  $\triangle ACM \Rightarrow$

$O_2 K \parallel LM \Rightarrow O_1 O_2 \parallel LM \parallel AC \Rightarrow AC \parallel LM$

2)  $\angle MLC = \angle LCM$  как углы при основании  $LM$  в равнобедренном  $\triangle LMC$  как функции угла  $\angle LMC = \angle ACL$  как функции угла  $\angle LMC = \angle ACB$ , т.к.  $CL$  - биссектриса

$\Rightarrow \triangle LCM$  - равносторонний, т.к. равны две стороны при основании  $\Rightarrow$

$\angle M = \angle C$ . Но в то же время  $BM = MC \Rightarrow BM = MC = LM$  и  $\triangle BLC$  - равнобедренный, т.к. медиана равна половине гипотенузы  $\Rightarrow \angle C = \angle B$  биссектриса, и высота  $\Rightarrow$

$\triangle ABC$  - р(б);

3)  $\angle ANM = 90^\circ$ , т.к.  $AM$  - диаметр  $\Omega$

Передадим рисунок:

Т.к.  $\cos$  в  $\triangle ACF$ :

$$36 = 2 \cdot (x+5)^2 - 2(x+5)^2 \cdot \cos(\angle ACM)$$

$$18 = (x+5)^2 - (x+5)^2 \cdot \frac{2x}{x+5}$$

$$\Rightarrow 18 = x^2 + 10x + 25 - 2x^2 - 10x$$

$$x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

Пусть  $\angle APN = \alpha \Rightarrow \angle ACB = 180 - 2\alpha$

Пусть  $\angle NCM = \gamma \Rightarrow \angle C = \frac{\pi + 5}{2}$

$$\cos \angle NCM = \frac{x}{x+5} \Rightarrow \cos \angle ACB = \frac{2x}{x+5} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}+5}$$

Ответ:  $AB = 6$ ;  $BC = AC = 5 + \sqrt{7}$