



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Дано:

a - арифмет. прогр.

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = (-3x^2)$$

Решение:

$$1) a_7 = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

2) назовем P - разности нашей прогрессии

$$3) \text{Получим } a_7 = a_5 + 2P, a_{11} = a_5 + 6P, a_{11} = a_7 + 4P$$

$$4) a_{11} - a_7 = 4P : -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 4P$$

$$5) 2(a_7 - a_5) = 4P : 2(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18) = 4P$$

$$6) -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36$$

$$0 = 3x^4 - 24x^3 + 17x^2 - 12x - 36 \quad | : 3$$

$$0 = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$$

$$0 = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$$

$$0 = (x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3)$$

$$0 = (x-2)^2(x^2 - 4x - 3) \quad \text{корни } x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

7) Заметим, что $a_7 \geq 0, a_{11} \leq 0 \Rightarrow a_5 \geq 0$ т.к. арифмет. прогр. монотонна.

8) Подставим корни $x : x_0 = 2; x_1 = 2 + \sqrt{7}; x_2 = 2 - \sqrt{7}$

Объ x_0 :

$$a_5 = 30$$

$$a_7 = (4 - 8)^2 = 16 \quad \begin{cases} 2P = 14 \Rightarrow P = 7 \\ 4P = -28 \Rightarrow P = -7 \end{cases}$$

$$a_{11} = -3 \cdot 4 = -12$$

$x = 2$ - не годится

x_1 :

$$a_5 = 12 + 6\sqrt{7} + 18 = 30 + 6\sqrt{7} \quad \begin{cases} 2P = -21 - 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 - 3\sqrt{7} \\ 4P = -42 - 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 - 3\sqrt{7} \end{cases}$$

$$a_7 = (4 + 4\sqrt{7} + 7 - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = -3(4 + 4\sqrt{7} + 7) = -33 - 12\sqrt{7}$$

$x = 2 + \sqrt{7}$ - не год.

x_2 :

$$a_5 = 12 - 6\sqrt{7} + 18 = 30 - 6\sqrt{7} \quad \begin{cases} 2P = -21 + 6\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 + 3\sqrt{7} \\ 4P = -42 + 12\sqrt{7} \Rightarrow P = -10,5 + 3\sqrt{7} \end{cases}$$

$$a_7 = (4 - 4\sqrt{7} + 7 - 8 + 4\sqrt{7})^2 = 9$$

$$a_{11} = -3(4 - 4\sqrt{7} + 7) = -33 + 12\sqrt{7}$$

$x = 2 - \sqrt{7}$ - не год.

Ответ: $x = 2; x = 2 + \sqrt{7}; x = 2 - \sqrt{7}$ не годится.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Других корней нет т.к. все они дают отрицательные значения. П. 4, 5, 6 не найдем все решения уравнения из п. 6. => мы найдем все корни.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2:

Дано:

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

Найти:

$$14x + 7y - \min = ?$$

Решение:

1) Две параболы решим систему:

$$\begin{aligned} |4x - 3y| \leq 6 &\Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y \geq -6 \\ 4x - 3y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1,5 + \frac{3}{4}y \\ x \leq 1,5 + \frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in \left[-1,5 + \frac{3}{4}y; 1,5 + \frac{3}{4}y\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |3x - 4y| \leq 8 &\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y \geq -8 \\ 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \\ x \leq 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in \left[-2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y; 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right] \end{aligned}$$

$$x \in \begin{cases} \left[-1,5 + \frac{3}{4}y; 1,5 + \frac{3}{4}y\right] \\ \left[-2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y; 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right] \end{cases} \quad (I)$$

2) $14x + 7y = 7(2x + y) \Rightarrow$ если мы хотим, чтобы выражение $14x + 7y$ было \min , то это будет выполняться при $2x + y - \min$ (II)

3) Найдем, для каких y может выполняться (I):

$$1,5 + \frac{3}{4}y \geq -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \Rightarrow \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{3} - \frac{4}{3}\right)y \Rightarrow \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{18+8}{12} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{26}{12} = \frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{50}{12} = \frac{5}{12}y \Rightarrow y = \frac{50}{5} = 10$$

$$-1,5 + \frac{3}{4}y \leq 2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y \Rightarrow -\frac{6}{4} - \frac{8}{3} = \frac{5}{12}y \Rightarrow y = \frac{-50}{5} = -10$$

Мы знаем это ~~интервал~~, посмотрев на графики. $\Rightarrow y \in [-10; 10]$ (II)

4) Найдем, что для каждого значения y , выражение (II) \min , при наибольшей x , наименьшей возможной x при y удобен (III)

$x = \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right)$, очевидно, что чем меньше y , тем меньше $x \Rightarrow$ вып-ние (III) - \min при $x = \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right)$

$$x = \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right) \Rightarrow \text{вып-ние (III) - } \min \text{ при } x = \max\left(-1,5 + \frac{3}{4}y; -2\frac{2}{3} + \frac{4}{3}y\right)$$

$$x = -\frac{6}{4} - \frac{150}{28} = -\frac{42}{28} - \frac{150}{28} = -\frac{192}{28} = -\frac{48}{7}$$

$$2x + y = -\frac{96}{7} + \frac{50}{7} = -\frac{46}{7} \Rightarrow 14x + 7y = -146$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Проверим, подходит ли $y = -\frac{50}{7}, x = -\frac{48}{7}$ для усл. :

$$\left| -\frac{102}{7} + \frac{150}{7} \right| = |-6| \leq 6 \quad (\checkmark)$$

$$\left| -\frac{144}{7} + \frac{280}{7} \right| = |-8| \leq 8 \quad (\checkmark)$$

Ответ: $14x + 7y - \min = -146$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Найти

$(m; n)$: ~~13; 9~~

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n \quad 13p^2$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn \quad 3q^2$$

Решение:

~~1) $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3)$~~

~~2) $A = (m - n)^2 + 9(m - n) = (m - n)(m - n + 9)$~~

~~3) Найдем, что если A или $B = 13p^2$ или $3q^2$, то в разл. на ~~13~~ множ. в A и в B может быть ровно 3 простых фактора.~~

~~4) Тогда посмотрим на B ①: $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3)$ если $m, n > 1$ то $m, n, (m - n + 3)$ - простые числа при чем два из них равны по модулю. если $m = n$, то $B = 3m^2$, если $m = m - n + 3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow B = 3m^2$, если $n = m - n + 3$, то $2n = m + 3$, а т.к. m, n - простые, то $m = 13$ или $m = 3 \Rightarrow 2n = 6$ или $2n = 16 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$ или $2n = 16 \Rightarrow n = 8$ - не может быть \Rightarrow тогда $B = 3m^2$~~

~~• если m, n или $(m - n + 3) = 1$, то~~
 $m = 1 \quad B = n(4 - n) = 4n - n^2 \Rightarrow n < 4 \Rightarrow n = 2$ или $n = 3$, не годит
 $n = 1 \quad B = m(m - 2) = m^2 - 2m \Rightarrow B = 13$ или $B = 3$

3) Найдем, что если $A = 3q^2 = (m - n)(m - n + 9)$, то $m - n : 3$ или $m - n + 9 : 3$, но если $m - n : 3$, то и $m - n + 9 : 3$, и тогда т.к. $9 : 3 \Rightarrow A = 3q^2 = 3k \cdot 3 \Rightarrow q^2 = 3k \Rightarrow q = 3 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow A = 27$, рассмотрим, как мы можем получить $A = 27 = k(k + 9) = 3^3 \Rightarrow k = 1, 3, 9$ или $-1, -3, -9, (k + 9) = 1, 3, 9$ или $-1, -3, -9$, найдем это никак мы не можем найти k и $k + 9$ в \mathbb{Z} условию, т.к. они оба на 9, а среди $-1, -3, -9, 1, 3, 9$ нет числа отн. на 9 $\Rightarrow A \neq 3q^2 \Rightarrow A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2$

4) Из 1) найдем, что $(m - n) : 13$ или $(m - n + 9) : 13$, а $m : 3$ или $n : 3$ или $(m - n + 3) : 3$, причем если $(m - n + 3) : 3$, то и $m - n : 3$ и $(m - n + 9) : 3 \Rightarrow A : 9 \Rightarrow A = 13 \cdot 9 = 117$, при этом $B = 3q^2 = m \cdot n \cdot 3l \Rightarrow m \cdot n \cdot l = q^2$
 $\begin{cases} m - n = 13 \cdot 9 \\ m - n + 9 = 13 \cdot 9 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Попробуем, что $m > n$, т.к. если $m = n$, то $A = 0$, если $m < n$, то $A > 0 \Rightarrow m - n + 9 < 0 \Rightarrow m - n + 3 < 0$, а $m, n > 0$ по условию $\Rightarrow *$

6) (из п. 5) Попробуем, что если $m > n$, то $(m - n + 9) > 9$, $(m - n) \geq 1$, $(m - n + 3) \geq 4 > 3$, максимум найдем, что $m > 1$

7) Попробуем, что если $B = 3q^2$, то либо $m \equiv 3$, либо $n \equiv 3$ либо $(m - n + 3) \equiv 3$, тогда пусть $(m - n) = 3l$
 $A = 13q^2 = 9l(l+3)$

$l(l+3) = 13$ не имеет решений в $\mathbb{Z} \Rightarrow (m - n + 3) \not\equiv 3$.

$\Rightarrow m \equiv 3$ либо $n \equiv 3$ или $(m - n) \equiv 3$

8) $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3) = 3q^2$ если $n \equiv 3$, то $n = 3s$

$$B = m \cdot 3s(m - 3s + 3) = 3q^2$$

$$m \cdot s(m - 3s + 3) = q^2$$

$m - 3s + 3$ простое, $(m - n + 3)$ тоже простое $\Rightarrow s = 1$

$$m \cdot (m - 3) = q^2 \Rightarrow m = q, n = 3$$

если $m \equiv 3$, то $m = 3r$

$$B = 3r \cdot n(3r - n + 3) = 3q^2 \Rightarrow 2 \cdot n(3r - n + 3) = q^2$$

$n = 1 \Rightarrow 2(3r + 2) = q^2$
 $q^2 \equiv 2 \pmod{4}$
 $q^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$
 \Rightarrow не имеет решений в \mathbb{Z}

$n - 3$ простое $\Rightarrow r = 1$
 $n(6 - n) = q^2$

Находим образцы $n = 3, m = q$ - условие задачи.

9) Посмотрим на A :

$$A = 13p^2 = (m - n)(m - n + 9) \Rightarrow (m - n) \equiv 13 \text{ или } (m - n + 9) \equiv 13$$

если $m - n \equiv 13$
 $q - 3 \equiv 13 \Rightarrow q - 3$ простое, $q > 3 \Rightarrow q - n \cdot 2 = q - 3$ - простое.

$\Rightarrow q - 3 \equiv 13 \pmod{2} \Rightarrow p = 2$, максимум мы знаем, что $(m - n + 9) > (m - n) \geq 1 \Rightarrow$

$(m - n + 9)$ простое $\Rightarrow m - n + 9 = 2$, чего не может быть т.к. $(m - n) > 0$.

$$\frac{1}{2}(m - n + 9) \equiv 13 \quad (q + 6) \equiv 13 \quad \begin{cases} q = 7 & A = (7 - 3)(7 - 3 + 9) = 13 \cdot 4 \Rightarrow (\text{не подходит}) \\ q > 7 \Rightarrow (q + 6) \text{ больше, чем простое (или больше простое делит.)} \end{cases}$$

$$A = (q - 3)(q + 6) = q^2 + 3q - 18 = 13p^2$$

$q > 7$:
 $A = (q - 3)(q + 6)$, $q + 6$ больше чем простое $\Rightarrow q - 3$ - простое.

$$(q + 6) = 13 \cdot m \quad A = 13 \cdot m \cdot (q - 3) = 13p^2 \Rightarrow m(q - 3) = p^2$$

m простое, $q - 3$ простое, $q > 7, q - 3$ простое $\Rightarrow q - n \cdot 2 \Rightarrow q - 3$ - простое, $q - 3 > 4 \Rightarrow q - 3$ - больше чем простое $\Rightarrow m(q - 3) \neq p^2 \Rightarrow q \leq 7 \Rightarrow q = 7$

Ответ: $m = q = 7, n = 3$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

Дано:

$$\ell \parallel AX$$

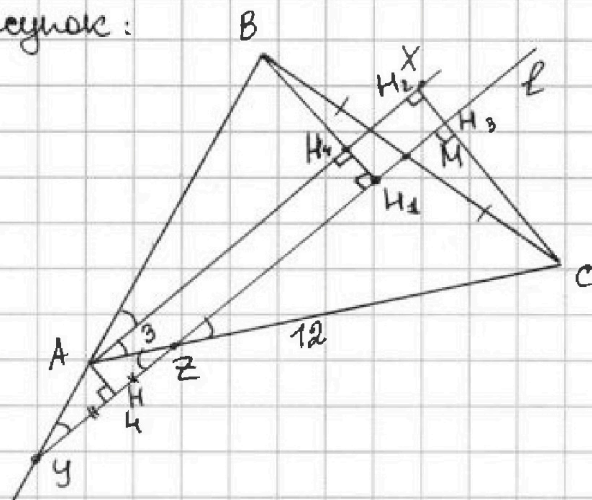
$$|AZ| = 9$$

$$|AC| = 12$$

$$|YZ| = 4$$

$$|BC| = ?$$

Рисунок:



Решение:

1) П.к. $\ell \parallel AX \Rightarrow \angle BAX = \angle BYZ$, $\angle CAX = \angle AZY = \angle BAX \Rightarrow \triangle YAZ \sim \triangle BAX$ по двум углам.

2) Тогда найдем высоту в $\triangle YAZ$, восп. из $\{AY\}$: по Тх. Пифагора и св-ву

$$h/\delta \triangle AH = \sqrt{AZ^2 - YZ^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

3) Проведем \perp из $\{B\}$ на ℓ , получим $\{H_1\}$ и из $\{C\}$ на AX , получим $\{H_2\}$, обозначим за $\{H_3\}$ и $\{H_4\}$ пересек. CH_2 с ℓ и BH_1 с AX соответственно.

4) $\angle AZY = \angle MZC$ как вертикальные $\Rightarrow \triangle H_3CZ \sim \triangle H_2CA$ по 3-му углу δ , подобие $= \frac{CZ}{AC} = \frac{AC - AZ}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = k_1$.

5) $\angle BAN_4 = \angle BH_1$ $\Rightarrow \triangle ABH_4 \sim \triangle YBH_1$ по 3-му углу δ , k_2 подобие $= \frac{BH_1}{BH_4}$.

6) Имеем, что $|H_1H_4| = |AH| = |H_2H_3| = \sqrt{5}$, $|H_2C| \cdot k_1 = |H_3C| \Rightarrow |H_2C| = \frac{|H_3C|}{k_1}$
 $|H_2C|(k_1 - 1) = -|H_2H_3| = -\sqrt{5} \Rightarrow |H_2C| = \frac{-\sqrt{5}}{\frac{3}{4} - 1} = 4\sqrt{5} \Rightarrow |H_3C| = 3\sqrt{5}$

7) $\angle BMH_1 = \angle CMH_3 \Rightarrow \triangle BMH_1 \sim \triangle CMH_3$ по 2-м углам ($\angle BMH_1 = \angle CMH_3$ и $\angle BH_1M = \angle CH_3M$) и стороне ($|BM| = |CM| = \frac{1}{2}BC$) $\Rightarrow |CH_3| = |BH_1| = 3\sqrt{5}$.

$$8) |BH_4| = |BH_1| - |H_1H_4| = 2\sqrt{5}$$

$$9) \text{ Из п. 5, 8 } k_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \Rightarrow |BY| \cdot k_2 = |BH_4| \Rightarrow |BY| = \frac{3}{2} |BH_4| = 3$$

$$|BY| \cdot \frac{2}{3} = |YZ| \Rightarrow -\frac{1}{3}|BY| = -|AZ| \Rightarrow |BY| = 9 \Rightarrow |AB| = 6$$

$$10) \text{ По Тх. Пифагора в } \triangle ZCH_3: |ZH_3| = \sqrt{|ZC|^2 - |CH_3|^2} = \sqrt{81 - 45} = \sqrt{36} = 6$$

$$11) \text{ По Тх. Пифагора в } \triangle YBH_1: |YH_1| = \sqrt{|YB|^2 - |BH_1|^2} = \sqrt{81 - 45} = \sqrt{36} = 6$$

$$12) |H_1H_3| = 2|H_1M| = |YH_3| - |YH_1| = |YZ| + |ZH_3| - |YH_1| = 4 \Rightarrow |H_1M| = 2 = |MH_3|$$

$$13) \text{ По Тх. Пифагора в } \triangle MH_3C: |CM| = \sqrt{|MH_3|^2 + |CH_3|^2} = \sqrt{4 + 45} = \sqrt{49} = 7$$

$$14) |CM| = \frac{1}{2}|BC| \text{ (по ант.)} \Rightarrow |BC| = 2|CM| = 14$$

Ответ: $|BC| = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

Решение:

$$1) 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y$$

$$4x^4 + 5\sqrt{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y$$

$$4x^4 - 4y^4 = (2y^2 + 2x^2) \cdot (2y^2 - 2x^2) \cdot 4(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 4(x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$$

ОДЗ: (по картинке):

$$x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$y \geq -6; y \leq 5 \Rightarrow y \in [0; 5]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

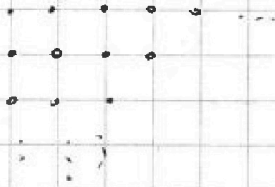
Задача 6

Дано:

квадрат 9×9

N раскрасок - ?

Рисунок:



Решение:

- 1) Найдем, что всего узлов в таком квадрате 100 (посчитаем их несложно: ~~100 - 99~~ в каждой строке их 10, строк тоже 10)
- 2) Тогда посмотрим, сколько способов их можем выбрать 2 узла пот. будем красить: $\frac{100 \cdot 99}{2} = N$ так, чтобы изнач. (двухцветов раскраски были симметричными)
- 3) Теперь рассмотрим повороты: они будут совершаться отн. центра поворотной симметрии квадрата (перес. диаг.) на 90° , очевидно, что при повороте большинства раскрасок на $\frac{\pi}{2}$ (кроме некоторых, их мы разберем далее) мы будем получать раскраску отн. от начальной $\Rightarrow N' = \frac{N}{4}$ (т.к. поворот осущ. -ся 4 раза).
- 4) Теперь найдем, что еще - будут раскраски, переходящие сами в себя при повороте на π , где $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ такой раскраски нет, т.к. у нас красится 2 узла, а тогда 2 точки перешли ~~в себя~~ наше число тогда их расст. от центра было одинак. и тогда у нас между напр. из центра симм. Эти 180° , и так они при каждом повороте перейдут только на свое же место, но никак одновременно не поменяются местами.
- 5) Кол-во раскрасок подг. под $(\pi, 4)$ - ~~1250~~ для 50 пар т.к. каждому узлу соотв. равно 1 симм. элемент отн. центра \Rightarrow в N мы посчитали 50 пар раскрасок, но их нужно делим пополам т.к. поворот на π и на $\frac{3\pi}{2}$ дает нам уже пары раскраски. $\Rightarrow N' + \frac{N}{4} = \text{итог} = \frac{100 \cdot 99}{8} + 12.5 = 1250$

Ответ: $N_{\text{раскрасок}} = 1250$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Дано:

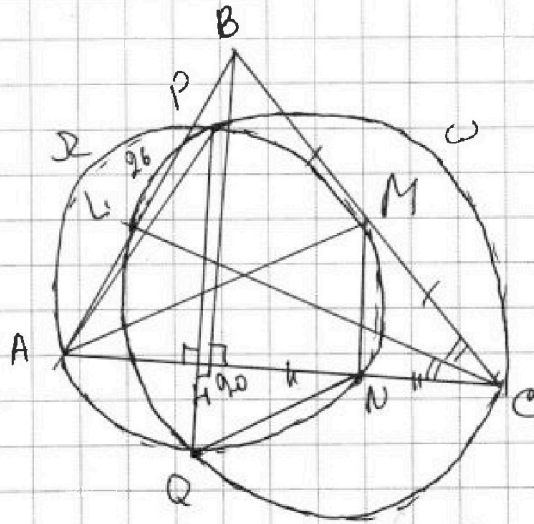
$$AP = 20$$

$$AB = 26$$

$$AC = ?$$

$$BC = ?$$

Рисунок:



Решение:

- 1) $MN \perp AC$ т.к. $\angle ANM$ опир. на диаметр $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$
- 2) $\angle MNC = \angle ANM = 90^\circ = 180^\circ - \angle ANM$
- 3) $\triangle BNC \sim \triangle MNC$ по 2м углам, к подобие = $\frac{1}{2}$
- 4) ~~$AP = 20$~~

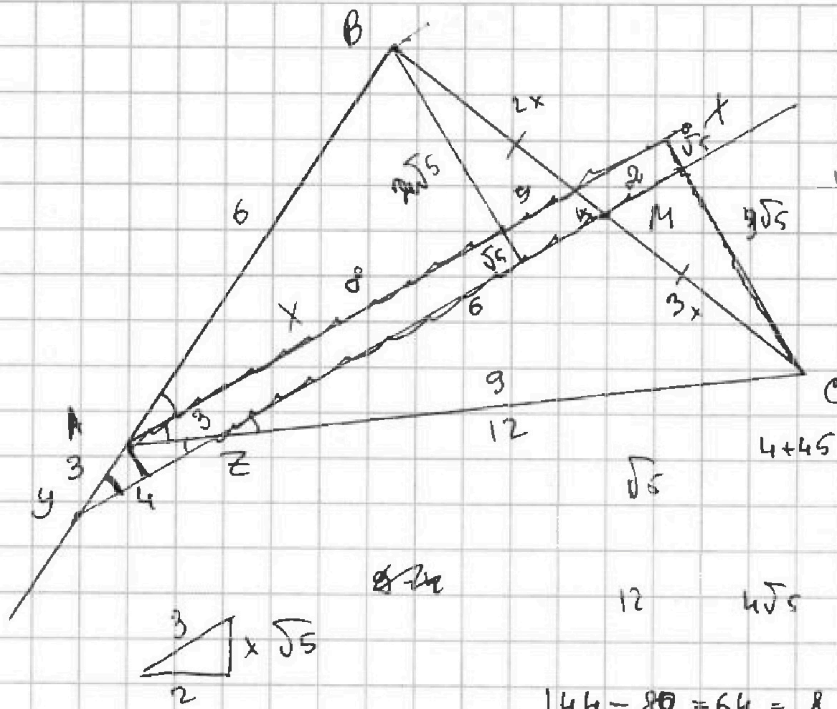


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



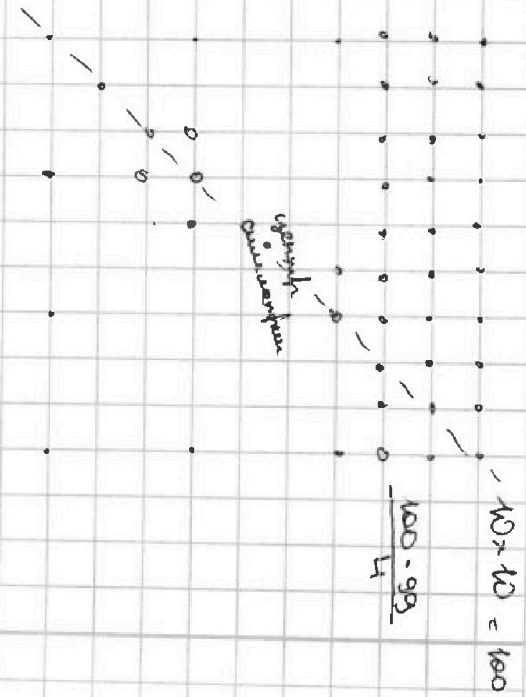
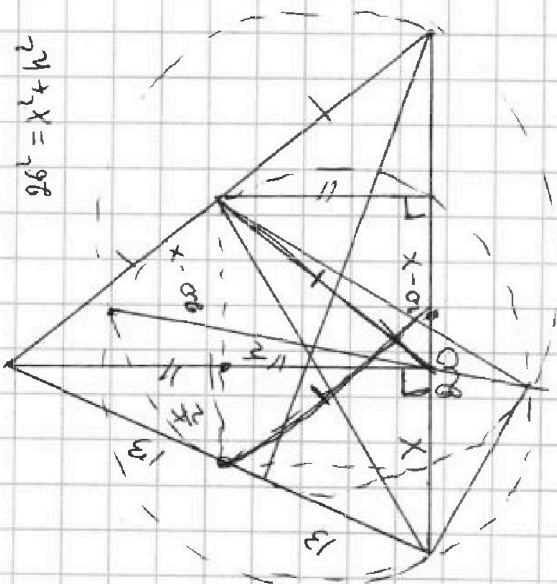
$BC = 9$
 $AC = 12$
 $AB = 6$
 $yz = 4$

$$144 - 80 = 64 = 8$$

$$81 -$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^2 + x - 5\sqrt{5} = 4y^2 - 5\sqrt{x} + y$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \\ x^4 - 2x^3 \\ \hline -6x^3 + 12x^2 \\ + 5x^2 - 10x \\ + 6x - 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} (x-2)(x^3 - 6x^2 + 12x + 6) = \\ = x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 12x^2 + 5x^2 - 10x + 6x - 12 \\ x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 + 8x \\ - 3x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4x - 3 \\ 4 \pm \sqrt{16+12} \\ \hline 2 \\ 2 \pm \sqrt{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad 2d \\ \hline 14 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{16-9}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{array}{l} |-36 - 30| \leq 6 \\ |-27 + 40| \\ 13 \end{array}$$

$$x = \max\left(-1.5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{50}{7}\right)$$

$$2 \cdot 3 \cdot (2)$$

$$|4k + 30| \leq 6$$

$$|3k + 40| \leq 8$$

$$-\frac{42}{2} = -6$$

$$x = \max\left(-1.5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{50}{4}\right)$$

$$13 \cdot 9 = 90 + 27 = 117$$

$$48 \cdot 2 = 96 \quad \left| -\frac{192}{4} + \frac{150}{4} \right| \leq 6$$

$$48 \cdot 4 = 192$$

$$48 \cdot 3 = 144 \quad \left| -\frac{144}{7} + \frac{100}{4} \right| \leq 8$$

$$A = 13q^2 = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = 3p^2 = m \cdot n \cdot (m-n+3)$$

$$A = 9k(k+9)$$

$$\begin{array}{l} k^2 + 3k = 13 \\ 3 \pm \sqrt{9+51} \\ 4 = 13 - 42 \end{array}$$

$$B = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 3p^2$$

$$A = (m-n)(m-n+9) = 13q^2$$

$$\begin{cases} m-n : 13 \\ m-n+9 : 13 \end{cases} \quad \begin{cases} m : 3 \\ n : 3 \\ m-n : 3 \end{cases}$$

$$B = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 3p^2 \Rightarrow$$

$$A = (m-n)(m-n+9) = 13q^2 \Rightarrow$$