



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ gt^2 - g > 0 \end{cases}$$

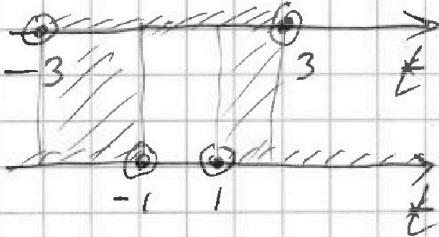
$$\begin{cases} 32t^2 - 4(gt^2 - g) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$m. k. x_1, x_2 = gt^2 - g$$

$$4(3t-1)(3t+1)$$

$$\begin{cases} 4(g-t^2) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(3-t)(3+t) > 0 \\ g(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$a - b = 12$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$a - b = 12 \quad a = b + 12$$

~~лучше:  $(a+b) : 19$~~

~~тогда если  $p \neq 19$ , то  $(a+b+3) : 19$~~

$$(2b+12)(2b+12+3) = 19p^4$$

$$2(b+6)(2b+15) = 19p^4$$

Левая сторона - четная, значит

т.к. 19 - нечетное  $p^4 : 2 \Rightarrow p = 2$

т.к. 2 единственное четное простое число

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152 \quad 2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$(b-2)(2b+31) = 0 \quad b = 2 \quad b = -\frac{31}{2}$$

$$a = 14 \quad a = -\frac{7}{2}$$

Ответ:  $(14; 2); (-3,5; -15,5)$



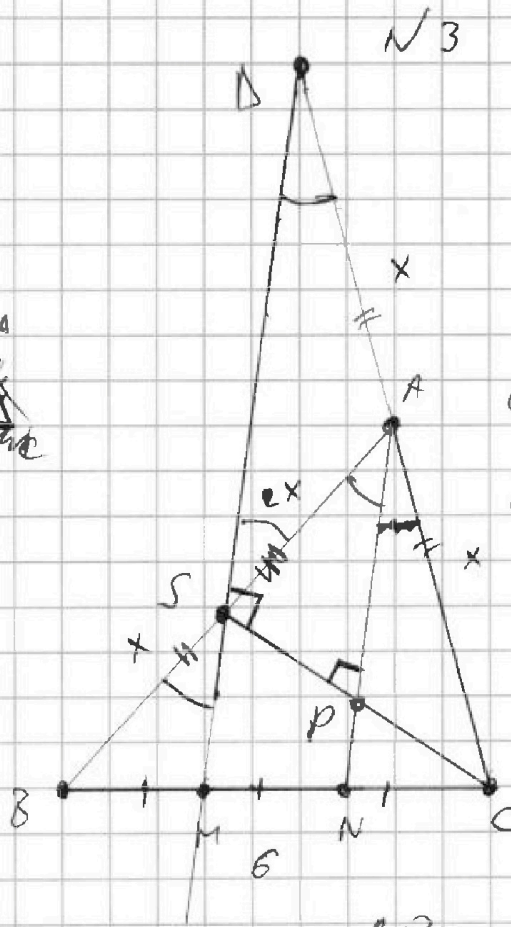
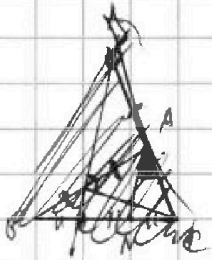


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CA$$

$$\triangle M \parallel AN$$

$$BC = 5$$

$$BM = MN = NC = 2$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

AN - ср. линия в  $\triangle ABC$

$\triangle BMC$  м.к AN // BM

$$NC = MN$$

$$AB = AC$$

S - точка пересечения

$$AM \subset AP$$

$$2AC = AP \quad AC = \frac{AP}{2}$$

$BS = AS$  м.к SM - ср. линия в  $\triangle BNA$

$$\text{м.к } AB = AC = \frac{AP}{2} = AS \Rightarrow \angle ASC = 90^\circ$$

м.к  $AS \perp SC \quad AS \parallel AN \Rightarrow AN \perp SC$

$\triangle SAC$  - равнобедренный м.к  $AS = AC$

AP - высота  $\Rightarrow$  и биссектриса

$$\angle SAP = \angle PAC$$

по теореме косинусов:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BC^2$$

$$\cos \angle CAN$$

$$\cos(2\angle CAN) = \cos \angle BAC$$

$$AC = x \quad AB = 2x$$

$$5x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4} = 6^2$$

$$3x^2 = 6^2$$

$$x^2 = \frac{36}{3} = 12$$

$$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AB = 2x = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{3} = AB$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Назовём деревом с  $n > 1$  вершинами  $n$ -угольником. На ~~сторонах~~ между ними может быть максимум 8 дорог (концы две стороны). Минимальное число дорог соединяющих  $n$ -угольником  $n$  вершин - 3. Докажем, что 2 достаточно не может.

Из  $n$ -угольника в  $n$ -угольнику можно попасть либо напрямую, либо через  $n$ -угольнику  $n$ -вершинно. Если дорог, соединяющих их - 2. Тогда из  $n$ -угольника  $n$ -вершинно, нельзя попасть в  $n$ -угольнику. т.к. 2 дороги могут соединить только 3  $n$ -угольнику, а их 4.  $k > 3$  - не подходит, иначе можно добраться  $> 1$  маршрутом.

$$N_{\text{деревья}} = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 2k \quad k \in [3]; \quad \text{ⓧ}$$

$$N_{\text{деревья}} = 25; \quad \text{ⓧ } 2, 19$$

$$\text{Ответ: } 25; \quad \text{ⓧ } 2, 19$$

$k > 3$  не подходит, иначе можно добраться  $> 1$  маршрутом





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

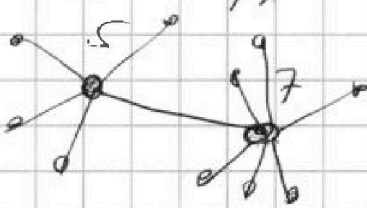
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a} \geq 2 - \sqrt{b}$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 4 + 1 - |x - y - 1| - 4\sqrt{x - y - 1}$$

Заметим, что для деревьев из кото-  
рых выходит  $n > 1$  дороги (из 4)  
можно попасть в группу с  $n > 1$  дорог  $\rightarrow$  доро-  
гой. Например: из дерева с 5-ю доро-  
гами можно попасть как минимум  
в одну деревню с  $n > 1$  дорогами

используя только одну дорогу



Если это больше так, то существо-  
вует все еще дерево с  $n > 1$   
Если из деревни дорогами

~~можно проехать по  
группе из 3-х дорог  
из каждой деревни выходит  $n$~~

Из деревни с числом дорог  $> 1$   
выходит  $k$  дорог в деревни с числом  
дорог  $n > 1$ .  $k \geq 1$  и  $k \leq 4$ ;

Если  $k = 0$ ; значит из деревни  
с  $n > 1$  дорогами нельзя попасть  
в группу ~~из~~. Так как из деревни

с 1 дорогой можно попасть только  
обратно





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

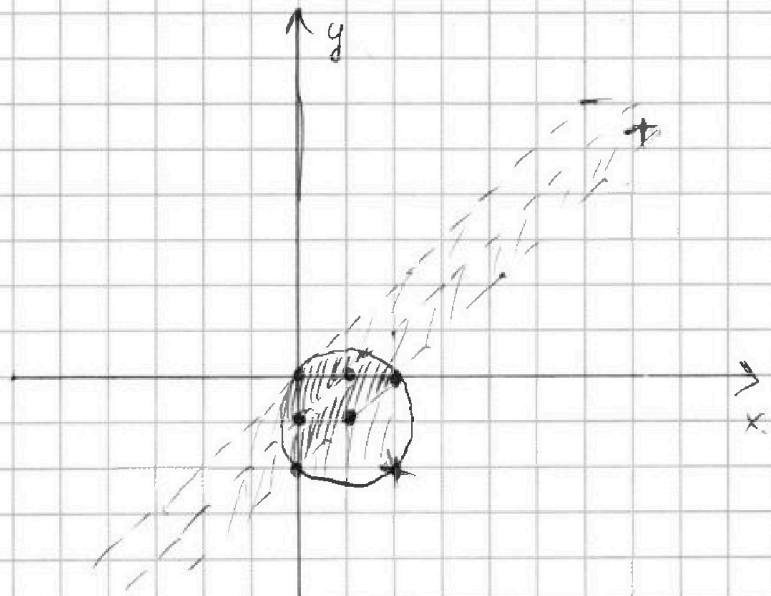
Графически определим область определе-  
ния

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \text{ - окружность с центром } (1; -1)$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$\begin{cases} x - y - 1 \geq 0 \\ 1 - x + y + 1 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 1 + x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$$



В указанной

области 6 точек точек  $(0; 0)$   $(1; 0)$   $(2; 0)$

$(0; -1)$   $(1; -1)$   $(0; -2)$  точки, лежащие

на окружности:  $\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 0$ , диаметр

для границы касая на

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2 \text{ из 6 точек}$$

подходит 2:  $(1; 0)$   $(0; -1)$  Ответ:  $\begin{cases} (1; 0) \\ (0; -1) \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

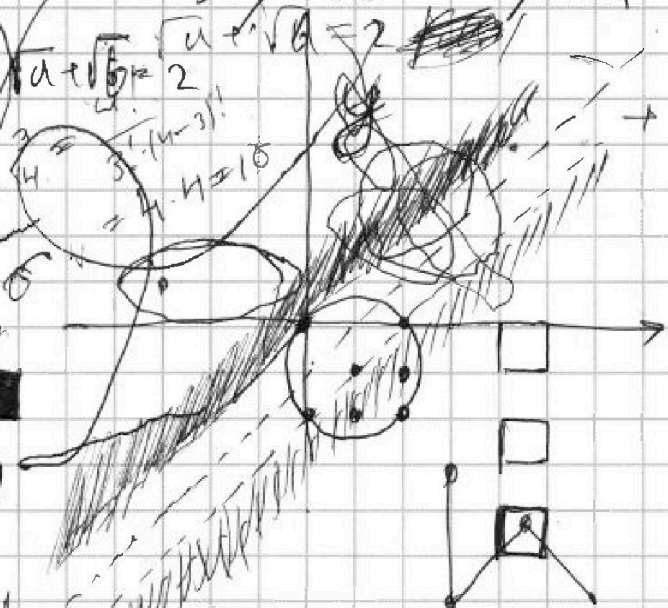
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2  $y = \sqrt{1 - |x - y - 1|}$  или  $y^2 = \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$   
 $y^2 = 1 - |x - y - 1|$   $y^2 =$   
 переопределенные уравнения  
 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$   $N_{\text{пар}} = 12$   
 $2y^2 + 4y + 4 = 2x - 2y - x^2 - y^2$   
 $2x - 2y - x^2 - y^2 = 2y^2 + 4y + 4$

на первые 4 партия: можно посадить  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Если посадить  $a_5$  и бис, то не получится т.к. посажены как минимум 2 свободные партия

1	2	3	4
5	4	3	8



$\sqrt{1 - |x - y - 1|} \geq 0$   
 $|x - y - 1| \geq 1$   
 $x - y - 1 \geq 1$  or  $x - y - 1 \leq -1$   
 $x - y \geq 2$  or  $x - y \leq 0$   
 $y \leq x - 2$   
 $-x + y + 1 \geq 0$

1	2	$a + b = 2$
	3	
1	3	
2		

$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$   $2x - 2y - x^2 - y^2 = 0$   
 $x^2 - 2x + y^2 + 2y \leq 0$   $+ \sqrt{1 - |x - y - 1|}$   
 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$





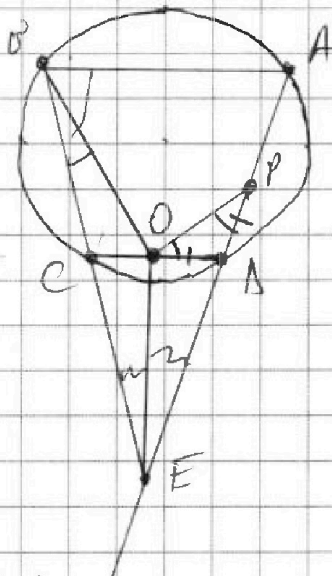
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5



Отложим на AD P

$$PA = OA$$

точка O лежит

на биссектрисе угла

$$\triangle AOE$$

$$\angle CBO = \angle OPA$$

$$\angle CPA = \angle CDE \text{ м.к. } ABCA$$

- вписанный

$\triangle OPA$  - равнобедренный  $\triangle$

$$\angle BOP = \frac{\angle CAE}{2}$$

$$\triangle BOE \sim \triangle POE \text{ м.к. } \angle EBO = \angle OPE;$$

$$\angle BEO = \angle PEO$$

$$\frac{OE}{OE} = \frac{BE}{PA + AE} = 1$$

$$BE = OA + AE = 12$$

Ответ: 12





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
8 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Докажем, что число дорог между  
большими деревьями 3: Если белая  
тем 3, то из одной обязательно  
можно попасть в группу 2-ух  
способами если дорог меньше  
тем 3 то в одну большую ветвь  
попасть из группы, т.к. группа  
содержит 4 дерева нужно 3 дороги

$$N_{\text{деревья}} = 4 + 5 + 5 + 7 + 9 - 2 \cdot 3 = 25$$

Докажем, что существует только  
один маршрут из концы в  
концы. Концы маленькие деревья  
содержат в только с, большой  
А любая две большие ветви  
~~можно~~ можно пройти только  
1 способом.

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 черновик

$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 2 - \sqrt{1-|x-y-1|}$   
 $180 - \alpha + 180 - (180 - 2\alpha + \beta)$   
 $+ 180 - (180 - 2\beta + \alpha)$   
 $2180$   
 $x \geq -x+y+1$   
 $y \leq x$

$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{AE} = \frac{OE}{AE}$   
 $\frac{OE}{AE} = \frac{OB}{AE} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{CA-OA}$

$\frac{DE}{BE} = \frac{EC}{AE+AB}$   
 $\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{EC}$   
 $\frac{DE}{BE} = \frac{OA}{OC} + \frac{AB}{EC}$   
 $OA+DE = OE = \frac{OP}{OB} \times \frac{OB}{OB} \geq x-y-1$

$x^2+y^2-2x+2y \leq 0 \quad (5+5+7+9+n) \cdot 2$   
 $2 \leq \sqrt{1-|x-y-1|}$   
 $\geq 0$   
 $4 = 1 - |x-y-1|$   
 $4 = 1 - x+y+1 \quad 2 = -x+y$

$2 \geq x-y$   
 $y \geq x-2$



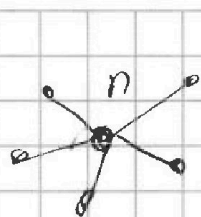


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

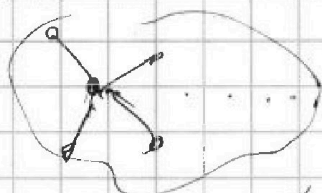
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если  $k=0$



$$y + x - y - \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} \geq 0$$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

$$- \sqrt{|x - y - 1|} = 2$$

Пусть  $k=3$ , тогда (для определенности из дерева  $n=5$ ) можно показать

в каждую вершину ( $n=5, n=7, n=9$ )

конвергентно.  $x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq 5$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

Вершина =  $\sqrt{2+3} + 4 + (5-3) + (5-1) + (7-1)$

$(y-1) = 25$   $1 - |x - y - 1| \geq 0$

Если это была вершина с  $n=5$ ; то Вершина

то же.  $Вер = 4 + (5-3) + (5-1) + (7-1) + (9-1) = 25$ .

Пусть  $k=2$  тогда (для определенности из дерева  $n=5$ ) можно показать то же в 2

вершина с  $n > 1$  (пусть будут  $n=7, n=9$ )

из орды  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2x - 2y - x^2 - y^2 = 4$

$$x - y - 1 \geq 0 \quad | \quad 1 - |x - y - 1| = 0 = 2 - \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

$$1 - x + y + 1 \geq 0 \quad \sqrt{-(x+y)^2} \geq -x - 2$$

$$y \leq x - 1 \quad 1 + x + y + 1 \geq 0 \quad y \geq -x - 2$$

