МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) Предположим, что у многоугольника, ~~удв~~ удовлетворяющего условию ровно t вершин, тогда у него и t углов, обозначим его углы через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, при этом положим $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_t$, тогда по условию $\alpha_1 = 132^\circ$, $\alpha_i = \alpha_{i-1} + 2^\circ$, где $i \in \{2, 3, \ldots, t\}$, тогда с одной стороны $\alpha_1 + \ldots + \alpha_t = 132^\circ + 134^\circ + \ldots + 132^\circ + 2^\circ(t-1) =$

$$= \frac{(132^\circ + 132^\circ + 2(t-1))t}{2} = \frac{(264^\circ + 2t - 2^\circ)t}{2} = (131^\circ + t)t = t^2 + 131t,$$ с другой стороны по известному св-ву сумма всех углов у выпуклого t-угольника равна $180^\circ(t-2)$, тогда

$t^2 + 131t = 180(t-2)$; $t^2 + 131t = 180t - 360$; $t^2 - 49t + 360 = 0$

$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = (50-1)^2 - 4 \cdot 360 = 2500 - 100 + 1 - 1440 = 2401 - 1440 =$

$$= 961 = 31^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{49+31}{2} = 40 \\ t_2 = \frac{49-31}{2} = 9 \end{array} \right.$$

Предположим, что $t = 40$, рассмотрим наибольший угол полученного многоугольника: $\alpha_t = 132^\circ + 2^\circ(t-1) = 132^\circ + 2^\circ \cdot 39 = 132^\circ + 78^\circ = 210^\circ > 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ многоугольник не выпуклый — противоречие условию $\Rightarrow t \neq 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 9$, тогда несложно проверить, что многоугольник с углами $132^\circ, 134^\circ, \ldots, 148^\circ$ подходит и удовлетворяет условию.

Ответ: 9

② $x\cdot\ln(25)+y\cdot\ln(75)+z\cdot\ln(125)=\ln(45)$, при этом $x,y,z\in\mathbb{Z}$

$$x\cdot\ln(5^2)+y\cdot\ln(3\cdot5^2)+z\cdot\ln(5^3)=\ln(3^2\cdot5)$$

$$2x\cdot\ln(5)+y(2\ln(5)+\ln(3))+3z\cdot\ln(5)=2\ln(3)+\ln(5)$$

$$\ln(5)\cdot(2x+2y+3z-1)+\ln(3)\cdot(y-2)=0\;\Big|\cdot\frac{1}{\ln(3)}$$

$$\frac{\ln(5)}{\ln(3)}\cdot(2x+2y+3z-1)+\frac{\ln(3)}{\ln(3)}\cdot(y-2)=0$$

$$\log_3(5)\cdot(2x+2y+3z-1)+y-2=0$$

5 не является ~~сте~~ целой степенью тройки $\Rightarrow \log_3(5)\notin\mathbb{Z}$, но

$$\begin{cases}2x+2y+3z-1\in\mathbb{Z}\\ \log_3(5)\cdot(2x+2y+3z-1)=-y+2\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow 2x+2y+3z-1=0,$$ но

тогда и $y-2=0\Rightarrow y=2\Rightarrow 2x+2y+3z-1=2x+3z+3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+3z=-3$, заметим, что x и z не могут быть одновременно равны $0\Rightarrow$ хотя бы одно из них по модулю $\geq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow |x|+|z|\geq 1\Rightarrow$ ~~x^2+~~ $x^2+z^2\geq 1\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 1+2^2=5$ — оценка, нетрудно видеть, что оценка достигается при $x=0$; $z=-1$; $y=2$, действительно: $0\cdot\ln(25)+2\cdot\ln(75)-\ln(125)=$

$$=2\cdot\ln(3\cdot5^2)-\ln(5^3)=4\ln(5)+2\ln(3)-3\ln(5)=\ln(5)+2\ln(3)=\ln(45)$$

Ответ: 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(3) Положим $M = \{a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3\}$, где $a \geq 4$, $a \in \mathbb{N}$, кол-во способов выбрать 6 элементов из M равно $C_7^6 = \frac{7!}{6!\cdot 1!} = 7$, также можно отметить, что это то же самое, что и кол-во способов не выбрать 1 элемент из M. Сумма чисел множества M равна $7a$. Пусть A - множество сумм всевозможных 6-ти элементных подмножеств M, тогда $|A| = 7$;

$A = \{7a-(a-3), 7a-(a-2), \dots, 7a-(a+3)\} = \{6a+3, 6a+2, 6a+1, 6a, 6a-1, 6a-2, 6a-3\}$

Нетрудно видеть, что числа $6a+3 = 3(2a+1)$, $6a+2 = 2(3a+1)$, $6a = 2\cdot 3\cdot a$, $6a-2 = 2(3a-1)$, $6a-3 = 3(2a-1)$ не могут быть простыми, так как $a \geq 4$, $a \in \mathbb{N}$, но по условию в A находятся хотя бы 2 простых числа (p и q) $\Rightarrow$ это числа $6a+1$ и $6a-1$, причем $p = 6a+1$, $q = 6a-1$, т.к. $p > q$ (иначе разность p^2-q^2 была бы ~~...~~ не больше нуля), тогда $p^2-q^2 = (p-q)(p+q) = (6a+1-(6a-1))(6a-1+6a+1) = 2\cdot 12a = 24a = 1080 \Rightarrow a = \frac{1080}{24} = \frac{540}{12} = \frac{270}{6} = \frac{135}{3} = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

Ответ: $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

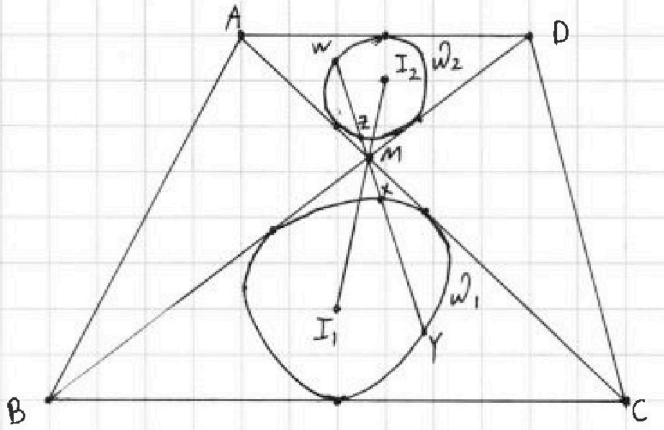
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4



Дано: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$, $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$; I_1, I_2 - центры окр., впис. в $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$, $I_1I_2 = 8$, $MZ \cdot MY = 9$

Найти: радиус ω_1 - ?

Решение:

1) ⅃ R_1, R_2 - радиусы ω_1 и ω_2 соответственно

2) $BC \parallel AD \Rightarrow \begin{cases} \angle MBC = \angle MDA \\ \angle MCB = \angle MAD \end{cases} \Rightarrow \triangle BCM \sim \triangle AMD$, $k = \frac{BC}{AD} = 2$, где k - коэфф. подобия $\triangle BCM$ и $\triangle AMD$

3) Рассмотрим гомотетию с центром в точке M и коэффициентом -2, тогда из пункта (2) следует, что A перейдет в C, D перейдет в $B \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle MAD$ перейдёт в $\triangle MCB$, но тогда и ω_2 перейдет в ω_1, так как ω_2 и ω_1 задаются тремя точками касаний с соответствующими треугольниками; ⅃ $Z \to Z'$, $W \to W'$, при этом $Z' \in MY$ и $W' \in MY$, Z' и $W' \in \omega_1$, т.к. Z и $W \in \omega_2$ и $\omega_2 \to \omega_1$, но поскольку прямая может иметь с окружностью максимум 2 точки пересечения, то точки W и Z перейдут в точки X и Y, при этом $MZ < MW$ и $MX < MY \Rightarrow Z' = X$ и $W' = Y$, то есть $Z \to X$ и $W \to Y$, но тогда $MX = 2MZ$ и $MY = 2MW$, $I_2 \to I_1$ (так как $\omega_2 \to \omega_1$) $\Rightarrow I_1M = 2I_2M$, но $I_1M + MI_2 = I_1I_2$, так как ~~образ и пр~~ точка, образ точки и центр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

гомотетии лежат на одной прямой $\Rightarrow I_1M + MI_2 = I_1I_2 = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow I_1M = 2 \cdot \frac{I_1I_2}{3} = \frac{16}{3}$; $I_2M = \frac{8}{3}$

4) Пусть $M\cancel{Z} = x$; $MW = x+y \Rightarrow MX = 2x$, $MY = 2(x+y)$, поскольку $MZ \cdot MY = x(2x+2y) = 2x(x+y) = 9$, степень точки M относительно ω, с одной стороны равна $MX \cdot MY = 2x \cdot 2(x+y) = 2 \cdot 2x(x+y) = 2 \cdot 9 = 18$, с другой стороны по определению степень точки M относительно ω, равна $MI_1^2 - R_1^2 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1^2 = MI_1^2 - 18 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256-90-72}{9} = \frac{256-162}{9} = \frac{56+38}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

⑤ $5-4\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) \vee 3\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

$5 \vee 4\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)+3\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

$4\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)+3\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=4\left(\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right)-$

$-\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=4\cdot\left(2\sin\left(\frac{\frac{9\pi}{14}+\frac{3\pi}{14}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{14}-\frac{3\pi}{14}}{2}\right)\right)-$

$-\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=8\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

$\exists\ \alpha=\frac{3\pi}{14} \Rightarrow 2\alpha=\frac{3\pi}{7}$, тогда

$8\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=8\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha-$

$-\sin\alpha-4\cos2\alpha=16\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin\alpha-8\cos^2\alpha+4=$

$=8\cos^2\alpha(2\sin\alpha-1)+4-\sin\alpha$

$\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4} \Rightarrow 8\cos^2\alpha(2\sin\alpha-1)+4-\sin\alpha<$

$<8(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{3}{4}+4-\frac{1}{2}=6\sqrt{2}-2-\frac{1}{2}=6\sqrt{2}-\frac{5}{2}<5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5-4\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)>3\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

Ответ: $5-4\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

③ $M = \{a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3\}$

$(p-q)(p+q) = 1080 = 2\cdot 540 = 2^2\cdot 270 = 2^3\cdot 135 = 2^3\cdot 3^3\cdot 5$

Всего 6-рк $= C_7^6 = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = 7$

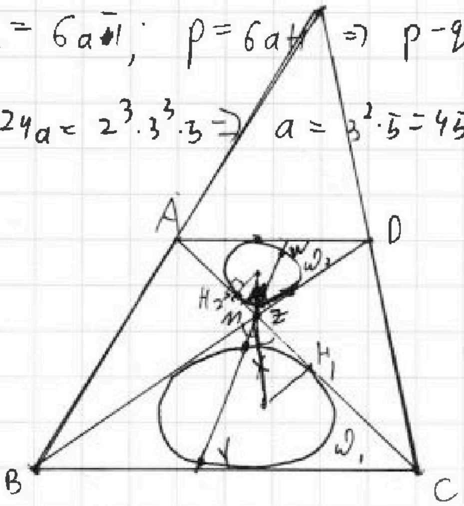
$\Sigma = 7a$

1) $6a+3$; 2) $6a+2$; 3) $6a+1$; 4) $\cancel{6a}$; 5) $6a-1$; 6) $6a-2$; 7) $\cancel{6a-3}$ =

$\Rightarrow q = 6a-1$; $p = 6a+1$ $\Rightarrow p-q=2$; $p+q = 12a$,

$\Rightarrow 24a = 2^3\cdot 3^3\cdot 5 \Rightarrow a = 3^2\cdot 5 = 45 \Rightarrow M$ найден.

④

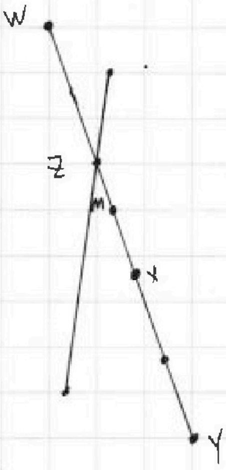


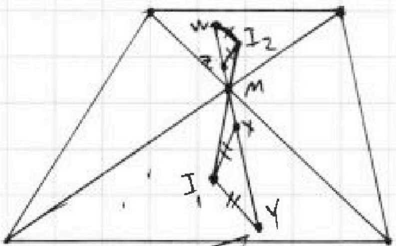
R_1 - ?; $I_1I_2 = 8$; $MZ\cdot MY = 9$; $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

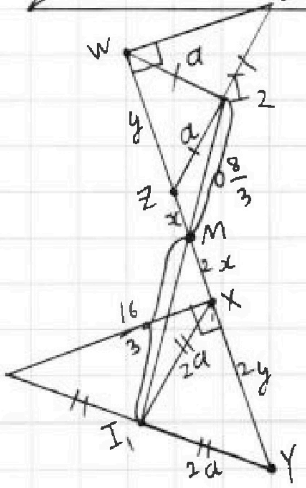
$\Delta AMD \sim \Delta BMC$, $k = 2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 2$

$\angle AMO_2 = \angle O_2MD = \angle BMO_1 = \angle O_1MC \Rightarrow M \in I_1I_2$

$\Delta MI_1H_1 \sim \Delta MH_2I_2 \Rightarrow \frac{MI_1}{MI_2} = 2$







$2x\cdot(x+y) = 9 = MX\cdot MW \Rightarrow x(x+y) = \frac{9}{2}$

$\Delta MXI_1 \sim \Delta MZI_2 \Rightarrow$

$MX\cdot MW = MZ\cdot MY \Rightarrow \frac{MX}{MY} = \frac{MZ}{MW}$, $2x$

$\frac{9}{2}$ – степень M отн-но $\omega_1 = MI_2^2 -$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $180^\circ(t-2)$

$\alpha_1 = 132^\circ$; $\alpha_i = \alpha_{i-1} + 2^\circ$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_t = 132^\circ + 134^\circ + \ldots + 132^\circ + (t-1)\cdot 2^\circ = \dfrac{(132^\circ + 132^\circ + (t-1)2^\circ)\,t}{2} =$

$= \cancel{\ldots}\ (132^\circ + t - 1)\,t = (131 + t)\,t = 180^\circ(t-2)$,

$131t + t^2 = 180t - 360$; $t^2 - 49t + 360 = 0$; $D = 7^4 - 1440$

$132t + \quad 2 + 4 + \ldots + (t-1)2 = \dfrac{2t\cdot(t-1)}{2} + 132t = t^2 + 131t = 180t - 360$

$49^2 = (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

$2401 - 1440 = 401 + 560 = 961 = 31^2$

$t = \dfrac{49 \pm 31}{2}$, $\left[\begin{array}{l} t = 40 \\ t = 9 \end{array}\right.$, но при $t = 40$ хотя бы 1 будет $> 180^\circ$ =!

$\Rightarrow t = 9$

Ответ: 9

2) $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x\ln 25 + y\cdot\ln 75 + z\cdot\ln 125 = \ln 45$

$x^2 + y^2 + z^2 \to \min$?

$2x\cdot\ln 5 + y(2\ln 5 + \ln 3) + 3z\ln 5 = \ln 5 + 2\ln(3)$

$\ln(5)\cdot(2x + 2y + 3z) + \ln(3)\cdot y = \ln(5) + 2\ln(3)$

$\ln(5)\cdot(2x + 2y + 3z - 1) + \ln(3)\cdot(y - 2) = 0$

$\cancel{x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\cdot\sqrt{\frac{x+y+z}{3}}}$ $\quad \cancel{\log_a b} = \log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$

$\log_3(5)\cdot(2x + 2y + 3z - 1) + \cancel{\ldots}\ y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$, $2x + 2y + 3z - 1 = 0$

$\boxed{2x + 3z = -3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\alpha = \frac{3\pi}{14}$

$3\sin(\alpha) - 4\cos 2\alpha = 3\sin\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 3\sin\alpha - 4(1 - 2\sin^2\alpha) =$

$= 3\sin\alpha - 4 + 8\sin^2\alpha = 8\sin^2\alpha + 3\sin\alpha - 4$

$\cos\frac{3\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)$

$5 + 4\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) \vee 3\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) + 4\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$

$\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{14} = \cos\left(\frac{7\pi}{14} - \frac{3\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \vee 3\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ $\qquad \sin(u) + \sin(v) = 2\cdot\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{v-u}{2}\right)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\exists \begin{cases}\alpha - \beta = u\\ \alpha + \beta = v\end{cases} \begin{cases}2\alpha = u + v\\ 2\beta = v - u\end{cases} \begin{cases}\alpha = \frac{u+v}{2}\\ \beta = \frac{v-u}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \cos(u) - \cos(v) = 2\cdot\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$

$4\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right) = 8\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$5 \vee 3\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 8\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 16\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{7} =$

$= 3\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 16\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$\frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{7}$ $\quad \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3\cos$

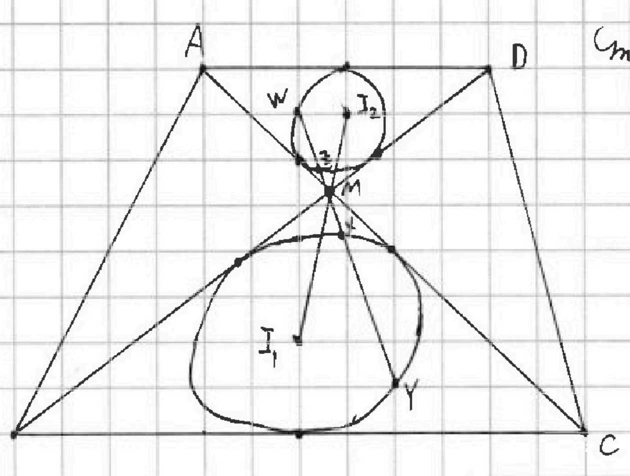
$3\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) > 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Степень M отн. ω_1 =

$= MX \cdot MY = 2x(2x+2y) =$

$= 4x(x+y) = 18 =$

$= MI_1^2 - R_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1^2 = MI_1^2 - 18 = \frac{16^2}{9} - 18 =$

$= \frac{16^2 - 2\cdot 9^2}{9} = \frac{256-162}{9} = \frac{38+56}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$

(5) $5 - 4\sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$ или $3\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) - 4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

Пусть $\frac{3\pi}{14} = \alpha \Rightarrow 5 - 4\sin(3\alpha) \vee 3\sin(\alpha) - 4\cos(2\alpha)$

$\frac{3\pi}{14} \vee \frac{\pi}{4}$, $6\pi \vee 7\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha) > \sin(\alpha)}$

Пусть $t = 5 - 4\sin(3\alpha) - 3\sin(\alpha) + 4\cos(2\alpha)$

$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin(\alpha)\cdot\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha =$

$= \sin(\alpha)\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha = -\sin^3(\alpha) + 3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$t = 5 - 4(-\sin^3(\alpha) + 3\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha)) - 3\sin\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha =$

$= 4\sin^3(\alpha) - 12\sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos^2(\alpha)}_{1-\sin^2(\alpha)} - 3\sin\alpha \underbrace{+4\cos^2\alpha}_{4-4\sin^2(\alpha)} - 4\sin^2\alpha + 5 =$

$= 16\sin^3(\alpha) - 15\sin\alpha \underbrace{- 8\sin^2(\alpha) + 9}_{>0} > 16\cdot\frac{1}{8} - 15\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 8\cdot\frac{1}{2} + 9 =$

$= 2 - 15\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4 + 9 =$

$= 7 - 15\frac{\sqrt{2}}{2}$

Пусть $\sin(\alpha) = k$; $f(k) = 16k^3 - 15k - 8k^2 + 9$

$\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$

$7 \vee 15\frac{\sqrt{2}}{2}$, $14 \vee 15\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5+4\cos\frac{3\pi}{7} \vee 4\sin\frac{9\pi}{14}+3\sin\frac{3\pi}{14}$

$\sin\frac{9\pi}{14}+\sin\frac{3\pi}{14} = 2\cdot\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

$5 \vee 8\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)$

$\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$5 \vee 4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\left(2\sin\frac{6\pi}{7}-1\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)$

$2\sin\frac{6\pi}{7}-1 = 2\sin\frac{\pi}{7}-1 < 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-1=0$

$\exists\ \alpha=\frac{3\pi}{14} \Rightarrow 2\alpha=\frac{3\pi}{7}$

$8\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha - \sin\alpha - 4\cos 2\alpha = 16\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha$

$= 16\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+4-8\cos^2\alpha-\sin\alpha=$

$8\cos^2\alpha(2\sin\alpha-1)$

$\cancel{\sin\alpha}\quad \frac{3\pi}{14} \vee \frac{\pi}{6},\quad 18\pi \vee 14\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{14}>\frac{\pi}{6}$

$\sin\alpha(4\cos\alpha-1)(4\cos\alpha+1)-4($

$\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4}$

$< 8(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{3}{4}+4-\frac{1}{2} = 6\sqrt{2}-\cancel{2}-\frac{1}{2} \vee 5$

$6\sqrt{2} \vee \frac{15}{2},\quad 36\cdot 2 \vee \frac{225}{4},\quad 36\cdot 8 \vee 225$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

② $x^2+z^2 \geq 2\sqrt{\frac{x+z}{2}}$

$x=0;\ z=1;\ y=2$

④ $132^\circ+130^\circ t \ldots + 130^\circ - 2^\circ(t-1) = \frac{(264^\circ-2t)t}{2} = (132-t)t = 180^\circ(t-2)$

$132t-t^2 = 180t-360;\quad t^2+48t-360=0$

$D = 48^2+1440 = 2500-200+4+1440 = 3744$

⑤ $5 \vee 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

$\cos 3\alpha = \cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos(2\alpha) - \sin\alpha\cdot\sin(2\alpha) =$

$= \cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha =$

$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) = \cos^3\alpha+3\cos^3\alpha-3\cos\alpha =$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = (2\cos^2\alpha-1)$

$5 \vee 4\cos(\alpha) + 6\cos^2(\alpha) - 3 - 16\cos^3\alpha + 12\cos\alpha =$

$5 \vee -16\cos^3\alpha + 6\cos^2(\alpha) - 3 + 16\cos(\alpha)$

$6\cos^2(\alpha)-3 = 3(2\cos^2\alpha-1) = 3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \leq 3$

$16\cos(\alpha)(1-\cos^2\alpha) = 16\cos(\alpha)\cdot\sin^2\alpha < 16$

$\alpha = \frac{\pi}{7}$