МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

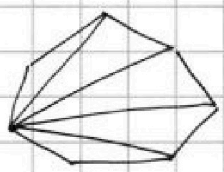
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть исходный многоугольник имеет n вершин



Выберем одну из вершин и проведем отрезки ко всем другим вершинам.
Тогда образуется $n-2$ треугольников
Сумма их углов $180°(n-2)$ равна сумме углов исходного многоугольника

$\Rightarrow$ Сумма углов многоугольника: $180°(n-2)$

Найдем сумму углов при помощи арифмет. прогрессии:

1) Если арифметическая прогрессия — возрастающая:
Углы: $143°,\ 143°+2°,\ \dots\ 143°+2°(n-1)$
Их сумма: $\frac{143°+(143+2°(n-1))}{2}\cdot n = (142°+n)\cdot n$

Суммы углов равны

$\Rightarrow 180(n-2) = (142+n)\cdot n$

$180n - 360 = 142n + n^2$

$n^2 - 38n + 360 = 0 \quad D = 38^2 - 4\cdot 360 = 4(19^2-360) = 4(361-360) = 4$

$\Rightarrow n_1 = \frac{38+\sqrt{4}}{2} = 19+1 = 20, \quad n_2 = \frac{38-\sqrt{4}}{2} = 19-1 = 18$

2) Если арифметическая прогрессия — убывающая:
Углы: $143°,\ 143°-2°\ \dots\ 143°-2°(n-1)$
Их сумма: $\frac{143°+(143°-2°(n-1))}{2}\cdot n = (144°-n)\cdot n$

Суммы углов равны

$\Rightarrow 180(n-2) = (144-n)\cdot n$

$180n - 360 = 144n - n^2$

$n^2 + 36n - 360 = 0 \quad D = 36^2 + 4\cdot 360 = 36(36+40) = 36\cdot 4\cdot 19$

$n_1 = \frac{-36+\sqrt{36\cdot 4\cdot 19}}{2} = -18+6\sqrt{19}, \quad n_2 = \frac{-36-\sqrt{36\cdot 4\cdot 19}}{2} = -18-6\sqrt{19}$

Оба решения не подходят т.к. n должно быть натуральным числом

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Известно, что многоугольник выпуклый

=> ~~во~~ любой угол не может быть больше 180°

Значит $143 + 2(n-1) \leq 179$

$2(n-1) \leq 36$

$(n-1) \leq 18$

$n \leq 19$

=> ~~Не существует подходящего многоугольника~~

=> $n = 20$ не подходит

Наибольшее число вершин — 18

Ответ: 18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x \cdot \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$

$x \cdot \ln 2^4 + y \ln 2^3 + z \ln(6 \cdot 2^2) = \ln 6$

$4x \cdot \ln 2 + 3y \ln 2 + 2z \ln 2 + z \ln 6 = \ln 6$

$\ln 2 (4x + 3y + 2z) + z \cdot \ln 6 = \ln 6$, x, y, z — целые

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ z \cdot \ln 6 = \ln 6 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 4x + 3y + 2 = 0$ $\cancel{\Rightarrow y = \frac{-2(2x+1)}{3}}$

~~Значит~~ $\cancel{x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \frac{4}{9}(2x+1)^2 + 1 = \frac{9x^2 + 4(4x^2+4x+1) + 9}{9}} =$

$= \cancel{\frac{25x^2 + 16x + 13}{9}}$

Т.к. x, y, z — целые то $\Rightarrow 3y \underset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow y \underset{2}{\equiv} 0$

Если $y = 0$, то $x = -0,5$, не целое число

Если $y = 2$, то $x = -2$

Если $y = -2$, то $x = 1$ $\Big\} \Rightarrow$ минимальное $y^2 = 4$

Если $x = 0$, то y — не целое

Если $x = 1$, то $y = -2$ $\Big\} \Rightarrow$ минимальное $x^2 = 1$

Если $x = -1$, то y — не целое

Сумма $x^2 + y^2 + z^2$ тем меньше, чем меньше каждый из её членов если $x = 1$, $y = -2$ то достигается минимальный x^2 и y^2

$\Rightarrow$ Наименьшее значение $x^2 + y^2 + z^2 = (1)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 1 + 4 + 1 = 6$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=792=2^3\cdot 3^2\cdot 11$

Пусть $p=N-a$, $q=N-b$, где N — сумма элементов M

$p-q=b-a$. Элементы множества M: $n, n+1 \dots n+6$

$\Rightarrow$ $p-q$ может быть $1,2,3,4,5,6$ т.к. $p-q>0$ (т.к. $p^2-q^2>0$)

p, q — простые ~~натураль~~ числа

$\Rightarrow$ либо одно из них 2, но тогда второе нечетное и $(p-q)(p+q)$ — нечетное

либо они оба нечетные $\Rightarrow$ $p-q$ — четное, $p+q$ — четное

$\Rightarrow$ $p-q$ может быть $2, 4, 6$

Проверим $p-q=2$:

$p-q=2 \Rightarrow p+q=2^2\cdot 3^2\cdot 11=4\cdot 99=396$

$p-q=(M-a)-(M-b)=b-a$, $p+q=2M-(a+b)$

$\Rightarrow b=a+2$, $p+q=2M-2a-2$

$2M-2a-2=396$

$2M-2a=398$

$M-a=199$

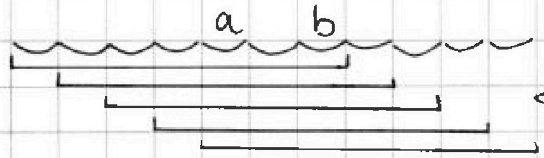
Найдем, чему может быть равно M:

~~...~~ Представим ряд чисел:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



← способы, которыми можно выбрать 7 чисел

Тогда возможные суммы:

$(a-1)\cdot 7$, $a\cdot 7$, $(a+1)\cdot 7$, $(a+2)\cdot 7$, $(a+3)\cdot 7$

Подставим в $M-a=199$:

$$\left[\begin{array}{l}(a-1)\cdot 7-a=199\\ a\cdot 7-a=199\\ (a+1)\cdot 7-a=199\\ (a+2)\cdot 7-a=199\\ (a+3)\cdot 7-a=199\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}6a=206\\ 6a=199\\ 6a=192\\ 6a=185\\ 6a=178\end{array}\right.$$

Т.к. a — натуральное, то число справа должно делится на 2 и на 3

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow 6a=192$

$a=\frac{192}{6}=32 \Rightarrow b=34$. ~~$M=\{29;30;31;32;33;34;35\}$~~

$M=\{30;31;\underline{32};33;\underline{34};35;36\} \Rightarrow N=33\cdot 7=231$

$p=N-a=231-32=199$, $q=231-34=197$

$13^2<199$ и $197<17^2 \Rightarrow$ в простоте можно убедиться, проверив $2,3,5,7,11,13$

Также $p^2-q^2=199^2-197^2=(199-197)(199+197)=2\cdot 396=792$

Найденное множество целиком соответствует условиям

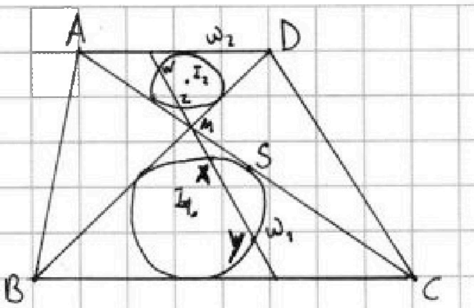
Ответ: $\{30;31;32;33;34;35;36\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\triangle AMD \sim \triangle CMB$ т.к.:

· $\angle AMD = \angle CMB$ как вертикальные

· $\angle ADM = \angle MBC$ т.к. $AD \parallel BC$ (т.к. трапеция и основания), BD — секущая,

$\frac{BC}{AD} = 2$ => это коэффициент подобия

=> $\triangle AMI_2 \sim \triangle CMI_1$ т.к. $\angle I_2MA = \frac{1}{2}\angle AMD = \frac{1}{2}\angle BMC = \angle I_1MC$

$\angle I_2AM = \frac{1}{2}\angle MAD = \frac{1}{2}\angle MCB = \angle MCI_1$

=> причем с тем же коэффициентом подобия
(т.к. общее отношение $AM : MC$)

=> $\frac{MI_1}{MI_2} = 2$, $MI_1 + MI_2 = I_1I_2 = \frac{13}{2}$ (лежат на одной прямой т.к. на биссектрисе $\angle AMD$)

=> $MI_1 = \frac{13}{3}$, $MI_2 = \frac{13}{6}$

Пусть ω_1 касается MC в точке S

=> $MS^2 = MX \cdot MY$

$\frac{MX}{MZ} = 2$ (из подобия фигур относительно т. M, гомотетия)

=> $MS^2 = 2MZ \cdot MY = 2 \cdot 5 = 10$

Т.к. S — т. касания, I_1S — радиус, то по т. Пифагора:

$MI_1^2 = MS^2 + I_1S^2$ => $I_1S^2 = MI_1^2 - MS^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - 10$

$I_2S = \sqrt{\frac{169}{9} - 10} = \sqrt{\frac{169-90}{9}} = \sqrt{\frac{79}{9}} = \frac{\sqrt{79}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} = \cos\left(\cancel{90^\circ}\ \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \sin\frac{5\pi}{14}$$

$$1 = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} + x = 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$$

$$x = 4\left(\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{14}\right) - 5\left(\sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 4\left(\sin\frac{5\pi}{14} + \sin\frac{3\pi}{14}\right) - 5\left(\sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{7\pi}{14}\right) =$$

$$= 4\cdot 2\cdot\sin\frac{8\pi}{28}\cdot\cos\frac{2\pi}{28} - 5\cdot 2\cdot\sin\frac{8\pi}{28}\cdot\cos\frac{6\pi}{28} =$$

$$= 2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\left(4\cos\frac{\pi}{14} - 5\cdot\cos\frac{3\pi}{14}\right) \qquad \sin\frac{2\pi}{7} > 0$$

$$\cos\frac{\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$$

$$\cos\frac{3\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\frac{2\pi}{7}$$

$$\Rightarrow x = 2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\left(4\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot$$

$$\cdot\left(4\left(\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{-2\pi}{7}\right) - \sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\left(8\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{2\pi}{7}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{2\pi}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из условия „если 4 точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость — α" следует, что если в основании пирамиды лежит ≥ 4 точек, то все точки основания из плоскости α (выбор из 7), а вершина вне (выбор из 5)

Если в основании:

7 вершин: 5 ~~7~~ вариантов

6 вершин: $5 \; \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6!} = 5\cdot7$

5 вершин: $5 \; \frac{7!}{5!(7-5)!} = 5\cdot7\cdot3$

4 вершины: $5 \; \frac{7!}{4!(7-4)!} = 5\cdot7\cdot5$

Если в основании 3 вершины, то можно выбрать любые 4 точки из 12, за исключением тех комбинаций, когда они лежат в одной плоскости:

$C_4^{12} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 11\cdot5\cdot9$

$C_4^{7} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 5\cdot7$

Значит для 3 вершин в основании: $C_4^{12} - C_4^{7} = 11\cdot5\cdot9 - 5\cdot7 =$

$= 5(11\cdot9 - 7) = 5\cdot92$

Значит всего пирамид: $5 + 5\cdot7 + 5\cdot7\cdot3 + 5\cdot7\cdot5 + 5\cdot92 =$

$= 5 + 5\cdot7(1+3+5) + 5\cdot92 = 5 + 5\cdot7\cdot9 + 5\cdot92 = 5(1+63+92) = 5\cdot156 =$

$= 780$

Ответ: 780

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Остались: ~~4~~, 5 ~~6~~, 7

$11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$

$\cos\frac{\pi}{7} = \cos^2\frac{\pi}{14} - \sin^2\frac{\pi}{14} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{14}$

$4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14} = 4 - 8\sin^2\frac{\pi}{14} - 5\sin\frac{\pi}{14}$ ~~Dr~~ $= -8\sin^2\frac{\pi}{14} - 5\sin\frac{\pi}{14} + 4$

$D = 25 + 4\cdot4\cdot8 = 25 + \cancel{128} = 64\cdot2 = 25 + 128 = 153$

$\frac{5 \pm \sqrt{153}}{-16}$

$\frac{-5 \pm \sqrt{153}}{16}$

$12 < \sqrt{D} < 13$

~~$17 < 5 + \sqrt{D} < 18$~~

$\frac{5 + \sqrt{D}}{16}$

$7 < -5 + \sqrt{D} < 8$

$\frac{7}{16} < \frac{-5 + \sqrt{D}}{16} < 0,5$

Если основание из 4:

$5\,\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5\cdot7\cdot5 = 5^2\cdot7$

Если основание из 5:

$5\cdot\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5^2\cdot7\cdot\frac{3}{5} = 3\cdot5\cdot7$

$5\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 5\cdot5\cdot7$

Если основание из 6:

$5\cdot7$

Если основание из 7: 5

Если основание из 3:

$\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1} - \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 2\cdot11\cdot10 - 7\cdot5 = 220 - 35 = 200 - 15 = 185 = 5\cdot37$

Итого: $5 + 5\cdot7 + 3\cdot5\cdot7 + 5^2\cdot7 + 37\cdot5 = 5(1 + 7 + 3\cdot7 + 5\cdot7 + 37) =$
$= 5(1 + 7(1+3+5) + 37) = 5(38 + 7\cdot9) = 5(38+63) = 5\cdot101 = 505$

$\frac{12!}{4!\,8!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2} = 11\cdot5\cdot9$

$64 + 92 = 156$

$156\cdot5 = 780$

$\frac{7!}{4!\cdot3!} = \frac{7\cdot6\cdot5!}{4!\cdot3!} = \frac{7\cdot5!}{4!} = 7\cdot5$

$156 : 2 = 78$

$n, n+1, \dots n+6$

$792 : 8 = 99$

$p = M - n_i$
$q = M - n_j$

$(p-q)(p+q) = 792 = 2^3\cdot3^2\cdot11$

$\Rightarrow p - q \le 6$

$\Rightarrow p-q = 6$
$p-q = 4$
$p-q = 3$
$p-q = 2$
$p-q = 1$

76

p-q	p+q
6	4·33
4	99·2
3	8·33
2	4·99
1	792

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~p-q~~	~~p+q~~
~~6~~	~~4·33~~
~~4~~	~~2·99~~
~~3~~	~~8·33~~
~~2~~	~~4·99~~
1	8·99

~~$p-q=6: \quad p=q+6$ сумма: $\frac{2q+6}{2}\cdot 7 = q+3$~~

$p=M-a$
$q=M-b$

$p-q=6 \Rightarrow b-a=6$
$b=a+6$

$M=\frac{2a+6}{2}\cdot 7=(a+3)\cdot 7$

~~$p=6a+$~~ $p+q=2M-(a+b)=(a+3)\cdot 14-(2a+6)=$
$=12a+3\cdot 14-6=12a+6(7-1)=12a+36$

$12a+36=4\cdot 33$
$4a+12=4\cdot 11$
$a+3=11$
$a=8 \Rightarrow b=8+6=14$

p, q – простые $\Rightarrow$ p-q и p+q ~~взаимнопрост~~

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

$$\begin{array}{r} \times\ 132 \\ 6 \\ \hline 12 \\ +18 \\ 6 \\ \hline 792 \end{array}$$

$M=\frac{8+14}{2}\cdot 7=(4+7)\cdot 7=11\cdot 7=77$

$p=77-8=69$
$q=77-14=63$

$p^2-q^2=69^2-63^2=(69-63)(69+63)=$
$=6\cdot(69+63)=6\cdot 132=6\cdot 11\cdot 12=$

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$p-q=1 \Rightarrow$
$p=M-a \Rightarrow b-a=1$
$q=M-b \quad b=a+1$

~~1, 2, 3, 4,~~ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ~~19, 23~~

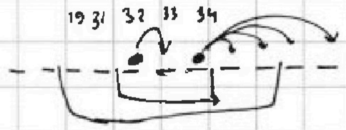
$$\begin{array}{r|l} 199 & 7 \\ -14 & \\ \hline 59 & \\ 56 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$p+q=2M-(a+b)=2M-2a-1=8\cdot 99=792$

~~p-q~~	~~p+q~~
6	4·33
4	2·99
~~3~~	~~8·33~~
2	4·99
~~1~~	~~8·99~~

2

p, q – нч $\Rightarrow$ p-q – 2
p+q – 2



$p-q=2$
$p=M-a \Rightarrow b-a=2$
$q=M-b \quad b=a+2$

$M_{min}=\frac{\cancel{a+a}+6}{2}\cdot 7 \quad \frac{(a+2)\cdot 2-6}{2}\cdot 7=(a-1)\cdot 7$

$M_{max}=\frac{(a+2)\cdot 2+6}{2}=(a+3)\cdot 7$

$p+q=M\cdot 2-(a+b)=2M-2a-2=4\cdot 99=396$

$2M-2a=398$

$M-a=199 \equiv_7 3 \Rightarrow a\equiv_7 4$

$$\begin{array}{r} \times\ 32 \\ 7 \\ \hline 14 \\ 21 \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 32 \\ 6 \\ \hline 12 \\ 18 \\ \hline 192 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 33 \\ 6 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 198 \end{array}$$

$(a-1)\cdot 7-a=199 \quad 6a=206 \ \times \quad 3a$
$(a-\cancel{1})\cdot 7-a=199 \quad 6a=199 \ \times \quad \cancel{3a}$
$(a+1)\cdot 7-a=199 \quad 6a=192$
$(a+2)\cdot 7-a=199 \quad 6a=185 \ \times$
$(a+3)\cdot 7-a=199 \quad 6a=178 \ \times$

$a=\frac{192}{6}=32$
$b=34$

$$\begin{array}{r|l} 197 & 13 \\ 13 & \\ \hline 67 & \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 13 \\ 4 \\ \hline 52 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 13 \\ 5 \\ \hline 65 \end{array}$$

~~29~~, 30, 31, 32, 33, 34, 35

$M=(a+1)\cdot 7=33\cdot 7$

$p=33\cdot 7-32=32\cdot 7+7-32=32\cdot 6+7=192+7=199$
$q=33\cdot 7-34=33\cdot 6-1=197$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть n углов

их сумма: $\frac{143+143+2(n-1)}{2}\cdot n = (143+n-1)\cdot n =$

$=(142+n)\cdot n$

$(142+n)\cdot n \vdots 180$

сумма $\angle$ n угольника:

$180°(n-2)$

$\begin{array}{r} -179 \\ 143 \\ \hline 36 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ +19 \\ \hline 361 \end{array}$

$\Rightarrow (142+n)\cdot n = 180(n-2)$

$142n + n^2 = 180n - 360$

$n^2 - 38n + 360 = 0 \quad D = 38^2 - 4\cdot 360 = 4(19^2 - 360) < 0$

$= 4\cdot 1$

или обратное: $\frac{143+143-2(n-1)}{2}\cdot n = (143-n+1)\cdot n = (144-n)\cdot n$

$180(n-2) = (144-n)\cdot n$

$180n - 360 = 144n - n^2$

$n^2 + 36n - 360 = 0 \quad D = 36^2 + 4\cdot 360 = 36(36+40) = 36\cdot 76 =$

~~$\sqrt{D} = 6\cdot 2\sqrt{109} = 12\sqrt{109}$~~

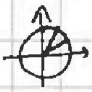
$(20-1)(20-1) = 400-40+1 = 361$

$36+40 = 76 = 4$

$\begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & \end{array}$

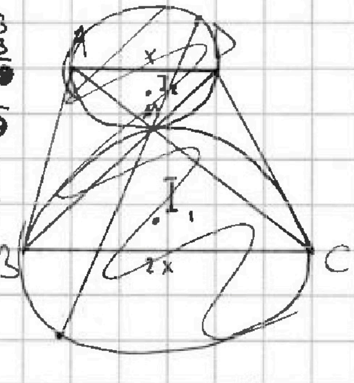
$\cos\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

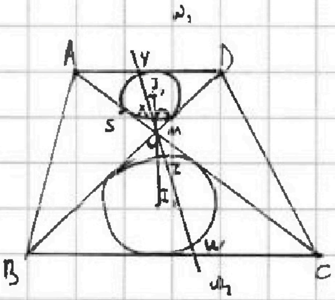
$\cos 60° - \sin 30° = 2\cdot\cos\frac{90}{2}\cdot\sin\frac{30}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 15°$



$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 18 \\ 5 \\ \hline 90 \end{array}$





$I_1I_2 = \frac{13}{2} \quad MZ\cdot MY = 5$

радиус ω_1 - ?

$\angle AMI_2 = \angle I_2MD = \angle I_1MB = \angle I_1MC$

Пусть коэф подобия $k = 2$

$\Rightarrow \frac{MI_1}{MI_2} = 2 \Rightarrow MI_1 = \frac{13}{3}$

$MI_1 = \frac{13}{6}$

$MZ = 2MX$

$MW = 2MY$

$5 = MZ\cdot MY = 2MX\cdot MY = 2MS^2 \Rightarrow MS = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$I_2S^2 = I_2M^2 - MS^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \frac{5}{2} = \frac{169}{36} - \frac{5}{2} = \frac{169-5\cdot 18}{36} = \frac{169-90}{36} = \frac{79}{36}$

$I_1S = \sqrt{\frac{79}{36}} = \frac{\sqrt{79}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

семь подряд идущих чисел

$792 = 2\cdot396 = 2\cdot2\cdot198 = 2\cdot2\cdot2\cdot99 = 2^3\cdot9\cdot11$

$M = \{n, n+1, n+2 \ldots n+6\}$ $\quad M = \frac{2n+6}{2}\cdot7 = (n+3)\cdot7 \quad M \geqslant 28$

$\Sigma M - n_i$ — простое число

0 1 2 3 4 5 6

0 1 4 2 2 4 1 mod = 7

$p^2 - q^2 = \underset{7}{792} \equiv 1$

$\Rightarrow p^2 \underset{7}{\equiv} 2,\ q^2 \underset{7}{\equiv} 1$ или $p^2 \underset{7}{\equiv} 1\ \ q^2 \underset{7}{\equiv} 0$

$p \underset{7}{\equiv} 3$ или 4 $\quad q \underset{7}{\equiv} 1$ или 6 $\qquad q = 7$

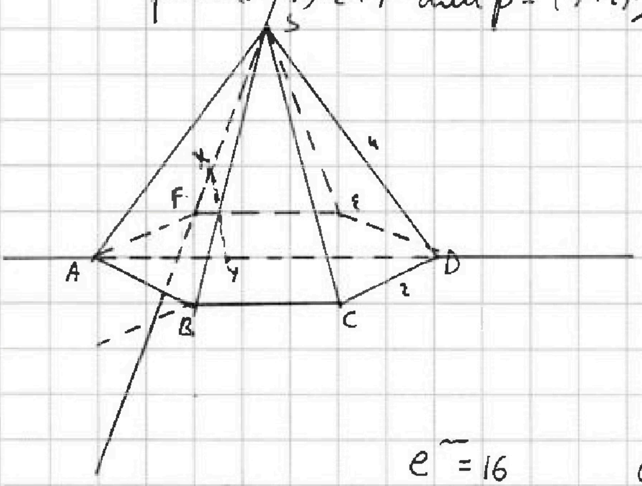
Оба числа нечетные

p макс $= 13 \Rightarrow$ не подходит

~~$p = (7+1)\cdot2+1$ или $p = (7+2)\cdot2+1$~~

0 1 2 3 4 5 6 7 8

0 1 4 0 7 7 0 4 1



$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$2^2\cdot2^3 = 2^5$

$e^{\sim}\cdot e^{\sim} = 24$

$e^{\sim} = 16 \qquad e^{\sim} = 24 \qquad e^{\sim+\sim} = 24 =$

$x\ln16 + y\ln8 + z\ln24 = $ ~~$2x\ln4$~~ $\quad 4x\ln2 + 3y\ln2 + z\ln4 + z\ln6 = \ln6$

$4x\ln2 + 3y\ln2 + 2z\ln2 + z\cdot\ln6 = \ln6$

$\ln2\cdot(4x+3y+2z) + z\cdot\ln6 = \ln6 \qquad \Rightarrow z = 1,\ 4x+3y+2z = 0$

$(5x+a)^2 = 25x^2 + 10ax + a^2$

$10a = 16$

$a = \frac{16}{10}$

$4x + 3y + 2 = 0 \qquad \Rightarrow y = \frac{-(2+4x)}{3}$

$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+1 = x^2 + \frac{4(1+2x)^2}{9} + 1 =$

$\frac{9x^2+4(4x^2+4x+1)}{9} = \frac{25x^2+16x+4}{9} = (5x+1{,}6)^2$

$(5x+1{,}6)^2$

$4x + 3y + 2 = 0$

$1 \quad -2$

$y \underset{2}{\equiv} 0$

$4 - 6 + 2 = 0$

~~$1^2+4^2+1^2 = 1+16+1 = 18$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

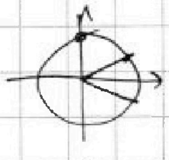
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Осталось: 5, 7.

$3+4+4+5+5+4+6 = 11+5+5+10 = 31$

$$5-4\sin\frac{3\pi}{14}+x = 4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$$



$$x = 4\left(\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{14}\right)-5\left(\sin\frac{\pi}{14}+1\right)$$

$$\sin\alpha+\cos\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}=\frac{5\pi}{14}$$

$$\sin 30^\circ+\cos 60^\circ = 1 = 2\cdot\sin\frac{60^\circ-30^\circ}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ-30^\circ}{2} =$$

$$\cancel{\sin 60^\circ+\cos 60^\circ = 2\cdot\sin 60^\circ\cdot\cos 60^\circ =}$$

$\frac{1}{2}+$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$= 2\,\cancel{(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\cancel{s\alpha\cdot c\beta\cdot c\alpha\cdot c\beta+s\beta\cdot c\alpha}$$

$$2(a_1+a_2)(a_3+a_4) = 2(a_1a_3+a_1a_3+a_2a_3+a_2a_4)$$

$$(a_1a_3+a_2a_4)+(a_1a_4+a_2a_3)$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\beta$$

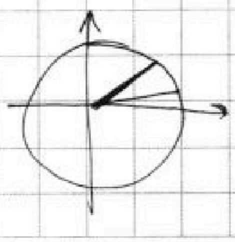
$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

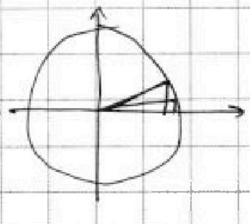
$$\sin\alpha+\cos\beta = \sin\alpha+\sin(90^\circ-\beta) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+90^\circ-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta-90^\circ}{2}$$

$$\sin\frac{3\pi}{14} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{14}\right) = \cos\frac{4\pi}{14}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}=\frac{6\pi}{14}=\frac{3\pi}{7}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}=\frac{7\pi-3\pi}{14}=\frac{2\pi}{7}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!