МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$.

4. [5 баллов] Решите неравенство

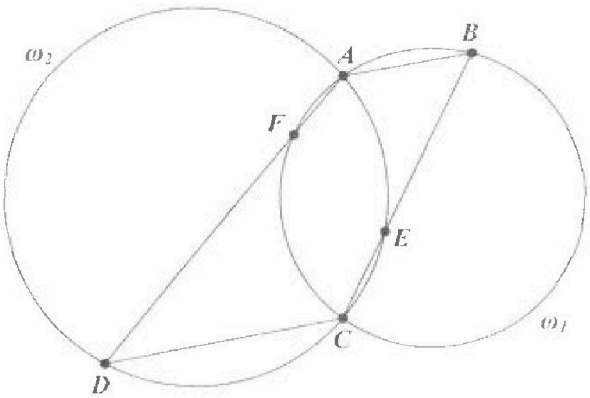
$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0,\\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0.\end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB<CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1:2$.



Задача №1 стр. 1 из 2

Докажем свойство модуля: $(|a|)^2 = a^2$, где a – любое число
Если $a \geq 0$, то $|a| = a$ и $(|a|)^2 = a^2$
Если $a < 0$, то $|a| = -a$ и $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$
Свойство доказано.

В прямоугольном треугольнике работает теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы $\Rightarrow$ выполняется уравнение $(|2x-2|)^2 + (|x^2+3x|)^2 = (|3x+1|)^2$.
Решим это уравнение:

$$(|2x-2|)^2 + (|x^2+3x|)^2 = (|3x+1|)^2$$
$$(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$$
$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$
$$\cancel{4x^2} \quad 4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 9x^2 - 6x - 1 = 0$$
$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$$

Теорема:
Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами равны всевозможным частным от деления какого-то из делителей свободного члена на делитель старшего коэффициента (делители могут быть отрицательными). Свободный член многочлена $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3$ равен 3, а старший коэффициент равен 1 $\Rightarrow$ рациональные корни этого многочлена равны ± 1 и ± 3.
Проверим корень $x = 1$:
$1^4 + 6 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 + 3 = 1 + 6 + 4 - 14 + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ является корнем уравнения $\Rightarrow$ многочлен $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3$ делится на $(x-1)$ (это следствие из теоремы Безу). Разделим многочлен на $(x-1)$:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 & x-1 \\
\underline{x^4 - x^3} & x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\
\quad - 7x^3 + 4x^2 & \\
\quad \underline{7x^3 - 7x^2} & \\
\qquad - 11x^2 - 14x & \\
\qquad \underline{11x^2 - 11x} & \\
\qquad\quad - -3x + 3 & \\
\qquad\quad \underline{-3x + 3} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №1 стр. 2 из 2

$x^4+6x^3+4x^2-14x+3=(x-1)(x^3+7x^2+11x-3)$

~~Пров~~ У многочлена $x^3+7x^2+11x-3$ рациональные корни также равны ±1 и ±3. Проверим эти корни:

$x=-1$: $-1+7-11-3=-8\neq0$

$x=1$: $1+7+11-3=16\neq0$

$x=3$: $27+63+33-3\neq0$

$x=-3$: $-27+63-33-3=0 \Rightarrow x=-3$ является корнем $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ многочлен $x^3+7x^2+11x-3$ делится на $x+3$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3+7x^2+11x-3 & x+3 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3+3x^2} \qquad\qquad & x^2+4x-1 \\
4x^2+11x \qquad & \\
-\underline{4x^2+12x} \qquad & \\
-x-3 & \\
-\underline{-x-3} & \\
0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow x^3+7x^2+11x-3=(x^2+4x-1)(x+3)$

Найдём корни многочлена x^2+4x-1

$x^2+4x-1=0$

$D=4^2-4\cdot1\cdot(-1)=16+4=20$

$x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{20}}{2}$

$x_1=-2+\sqrt5$ $\quad x_2=-2-\sqrt5 \Rightarrow x^2+4x-1=(x+2-\sqrt5)(x+2+\sqrt5)$

В итоге получилось, что $x^4+6x^3+4x^2-14x+3=$
$=(x-1)(x+3)(x+2-\sqrt5)(x+2+\sqrt5)$

Поэтому числа $1; -3; -2+\sqrt5; -2-\sqrt5$ являются корнями уравнения. ~~и под~~

Ответ: $1; -3; -2+\sqrt5; -2-\sqrt5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 стр. 1 из 1

$x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$

$2x\sqrt{2}+3y\sqrt{2}+z\sqrt{29}=4\sqrt{2}+2\sqrt{29} \quad |:\sqrt{2}$

$2x+3y+z\sqrt{\frac{29}{2}}=4+2\cdot\sqrt{\frac{29}{2}}$

$2x+3y-4=\sqrt{\frac{29}{2}}\cdot(2-z)$

$x,y,z\in Z \Rightarrow 2x+3y-4$ это целое число, $2-z$ тоже целое число. $\sqrt{\frac{29}{2}}$ – иррациональное число, $2-z$ – целое, и они при умножении друг на друга дают целое число. Такое возможно только, когда это целое число равно 0, т.е. $2-z=0$, т.е. $z=2$

тогда:

$2x+3y-4=\sqrt{\frac{29}{2}}\cdot 0 \Rightarrow 2x+3y-4=0 \Rightarrow x=\frac{4-3y}{2}$

число $z=const=2 \Rightarrow$ чтобы выражение $x^2-y^2+z^2$ было наименьшим, число x^2-y^2 должно быть наименьшим.

$x^2-y^2=\left(\frac{4-3y}{2}\right)^2-y^2$, надо найти ~~min~~ минимум числа $\left(\frac{4-3y}{2}\right)^2-y^2$

$\left(\frac{4-3y}{2}\right)^2-y^2=\left(\frac{4-3y}{2}-y\right)\left(\frac{4-3y}{2}+y\right)=\frac{4-5y}{2}\cdot\frac{4-y}{2}=\frac{16-4y-20y+5y^2}{4}=$

$=\frac{5y^2-24y+16}{4}=1{,}25y^2-6y+4$

Пусть $f(y)=1{,}25y^2-6y+4$. Тогда график этой функции – это парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$ её минимум достигается в вершине параболы. ~~x_0 – абсцисса вершины~~ Пусть ~~в – коор~~ в – абсцисса вершины параболы. По формуле: $в=\frac{-(-6)}{2\cdot1{,}25}=\frac{6}{2\cdot1{,}25}=$

$=\frac{3}{1{,}25}$. Тогда минимальное значение функции равно:

$f_{min}=1{,}25\cdot\left(\frac{3}{1{,}25}\right)^2-6\cdot\frac{3}{1{,}25}+4=\frac{9}{1{,}25}-\frac{18}{1{,}25}+4=\frac{36}{5}-\frac{72}{5}+$

$+4=\frac{36-72+20}{5}=-\frac{16}{5}$

Тогда наименьшее значение выражения $x^2-y^2+z^2$ равно $-\frac{16}{5}+$

$+2^2=-\frac{16}{5}+4=\frac{20-16}{5}=\frac{4}{5}=0{,}8$

Ответ: наименьшее значение выражения $x^2-y^2+z^2$ равно 0,8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 стр. 1 из 2

Для начала, определим условие для x.

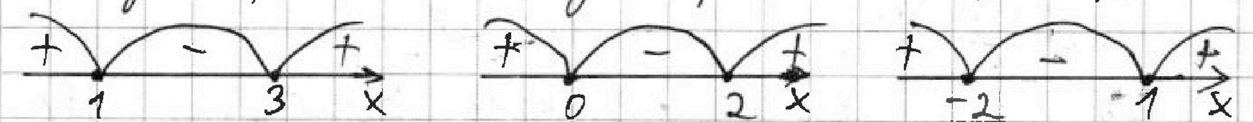
$$\begin{cases} 4x-x^2-3\geq 0 \\ 2x-x^2\geq 0 \\ x^2+x-2\geq 0 \\ \sqrt{2x-x^2}\neq\sqrt{x^2+x-2} \\ \sqrt{4x^2-x^2-3}\neq 3 \end{cases}$$

$\cancel{\sqrt{2x-x^2}\neq\sqrt{x^2+x-2}}$
$\cancel{2x-x^2\neq x^2+x-2}$

$4x-x^2-3\geq 0 \mid\cdot(-1)$
$x^2-4x+3\leq 0$
$x_1=3 \quad x_2=1$
Метод интервалов:

$2x-x^2\geq 0 \mid\cdot(-1)$
$x^2-2x\leq 0$
$x_1=2 \quad x_2=0$
Метод интервалов:

$x^2+x-2\geq 0$
$x_1=-2 \quad x_2=1$
Метод интервалов:



$\sqrt{2x-x^2}\neq\sqrt{x^2+x-2}$
$2x-x^2\neq x^2+x-2$
$2x^2-x-2\neq 0$
$D=1-4\cdot 2\cdot(-2)=1+16=17$
$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x\neq\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\sqrt{4x-x^2-3}\neq 3$
$4x-x^2-3\neq 9$
$x^2-4x+12\neq 0$
$x_1+x_2=4$ $\quad D=16-4\cdot 12=16-48<0$
$x_1x_2=12$ $\quad x^2-4x+12>0$ всегда

$\Rightarrow x\in[1;2]$; $\frac{1-\sqrt{17}}{4}<0<1$

$\cancel{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}$ $\quad 1=\frac{1+\sqrt{9}}{4}<\frac{1+\sqrt{17}}{4}<\frac{1+\sqrt{49}}{4}=2$

Условие для x (ОДЗ): $x\in\left[1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};2\right]$

Рассмотрим параболы $4x-x^2-3$; $2x-x^2$; x^2+x-2. x_0 – вершина параболы.

$4x-x^2-3$: $x_0=\frac{-4}{2\cdot(-1)}=2$; это парабола с ветвями ~~вверх~~ вниз $\Rightarrow$ на промежутке ~~от~~ $[1;2]$ эта парабола возрастает.

$2x-x^2$: $x_0=\frac{-2}{-2}=1$; это парабола с ветвями вниз $\Rightarrow$ на промежутке $[1;2]$ эта парабола ~~возрастает~~ убывает.

x^2+x-2: $x_0=-\frac{1}{2}$; это парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$ на промежутке $[1;2]$ эта парабола возрастает.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 стр. 2 из 2

Теперь найдём минимум и максимум каждой функции из $f(x)$, $g(x)$ и $y(x)$ ($f(x)=4x-x^2-3$, $g(x)=2x-x^2$, $y(x)=x^2+x-2$) на промежутке $[1;2]$.

$f_{min}=4-1-3=0$; $f_{max}=8-4-3=1$

$g_{\cancel{min}\ max}=8-4-3=1$; $g_{\cancel{max}\ min}=4-1-3=0$

$y_{min}=1+1-2=0$; $y_{max}=4+2-2=4$

Тогда левая часть неравенства находится в промежутке от $\frac{1}{-3}$ до $\frac{1}{-2}$, а правая в промежутке от $\frac{1}{1-0}=\frac{1}{1}$ до $\frac{1}{0-2}=$ $=\frac{1}{-2}$. Обе части неравенства монотонно возрастают или убывают на определённых промежутках.

~~При увеличении~~ До того момента, как правая часть станет отрицательной, левая часть всегда меньше (т.к. она отрицательна). После того, как правая часть стала отрицательной, она стала меньше левой, и так до того момента, как правая часть стала равной $-\frac{1}{2}$ (в этом случае левая часть тоже будет равна $-\frac{1}{2}$), это выполняется при $x=2$)

$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}=0$ при $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$; $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ не входит в ОДЗ $\Rightarrow$ до $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ правая часть будет больше левой, а после — всегда меньше, до того, как при $x=2$ не наступит равенство. Поэтому, неравенство выполняется при $x\in[1;\frac{1+\sqrt{17}}{4})\cup\{2\}$ (функция $\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}$ сначала уменьшается до числа, ~~примерно равного~~ стремящегося к 0, а после начинает увеличиваться от отрицательного числа $-\infty$ до числа $-\frac{1}{2}$).

Ответ: $x\in[1;\frac{1+\sqrt{17}}{4})\cup\{2\}$

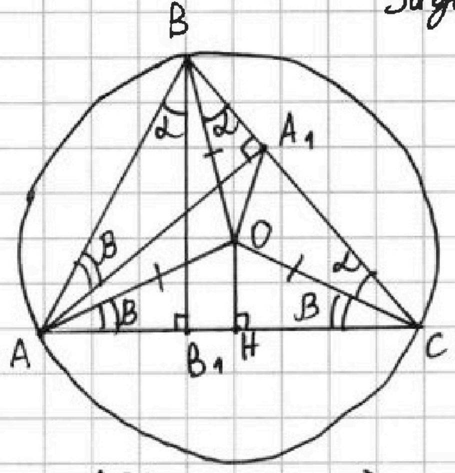
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 стр 1 из 1



$\triangle ABC$ остроугольный $\Rightarrow$ его центр описанной окружности и его высоты лежат внутри него. Пусть $A_1B = x$, $\angle OBA_1 = \alpha$, $\angle BAA_1 = \beta$, $OA = OB = OC = r$ (равны как радиусы описанной окружности).

$\angle OBC = \angle OCB = \alpha$ (т.к. $\triangle OBC$ равнобедренный) $\Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle BOC$ - центральный, опирается на $\breve{BC}$, $\angle BAC$ - центральный, опир. на $\breve{BC}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \alpha$

$\angle ABB_1 = 180^\circ - \angle BAC - \angle AB_1B = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$

$\angle OAC = \angle OCA$ ~~$\Rightarrow \beta$~~ (т.к. $\triangle AOC$ равнобедренный); пусть $\angle OAC = \gamma$

$\angle ABC = \cancel{2}\dfrac{\angle AOC}{2} = \cancel{2}\cdot\dfrac{(180^\circ - 2\gamma)}{2} = 90^\circ - \gamma$ (т.к. $\angle AOC$ - центральный, $\angle ABC$ - вписанный, оба опираются на $\breve{AC}$)

$\angle BAA_1 = 180^\circ - \angle ABC - \cancel{\gamma}\, 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \gamma = \gamma \Rightarrow \angle BAA_1 =$
$= \angle OAC = \angle OCA = \beta$

~~$\triangle BAA_1 \sim \triangle OA$~~ $\sin\beta = \dfrac{BA_1}{AB} = \dfrac{OH}{OA}$, т.е. $\sin\beta = \dfrac{x}{AB} = \dfrac{OH}{\cancel{OA}\,r}$ (OH - перпендикуляр из (·)O на AC, т.е. это расстояние от (·)O до AC)

$S_{\triangle OBA_1} = \dfrac{A_1B\cdot BO}{2}\cdot\sin\alpha = \dfrac{x\cdot r}{2}\cdot\sin\alpha$ (формула площади через синус)

$\sin\alpha = \dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{6}{AB}$ (~~из~~ следует из $\triangle ABB_1$)

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{AB} = \dfrac{OH}{r} \\ \sin\alpha = \dfrac{6}{AB} \\ \dfrac{xr}{2}\cdot\sin\alpha = S_{\triangle OBA_1} \end{cases}$$

$\sin\alpha = \dfrac{6}{AB} \Rightarrow S_{\triangle OBA_1} = \dfrac{xr}{2}\cdot\dfrac{6}{AB} = \dfrac{3xr}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3xr}{AB} = 6 \Rightarrow \boxed{\dfrac{xr}{AB} = 2}$

~~разделим уравнения $\dfrac{x}{AB} = \dfrac{OH}{r}$ и $\dfrac{xr}{AB}$~~

$\dfrac{x}{AB} = \dfrac{OH}{r} \Big| \cdot r \Rightarrow \dfrac{xr}{AB} = OH$; $\dfrac{xr}{AB} = 2 \Rightarrow OH = 2$

Ответ: расстояние от точки O до AC равно 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6 стр. 1 из 1

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0 \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \end{cases}$$

Сложим эти уравнения и получим:

$x^2-3xy+2x+2y^2-3y+1=0$

$x^2-x(3y-2)+(2y^2-3y+1)=0$

Решим это уравнение относительно x:

$D=(-(3y-2))^2-4\cdot 1(2y^2-3y+1)=9y^2-12y+4-8y^2+12y-4=$
$=y^2$

При $y\geq 0$: $|y|=y$

$x_{1,2}=\frac{3y-2\pm y}{2}$

При $y<0$: $|y|=-y$

$x_{1,2}=\frac{3y-2\pm y}{2}$

В любом случае получается 2 корня: $\frac{3y-2\pm y}{2}$, поэтому не будем рассматривать разные случаи y.

$x_1=\frac{3y-2+y}{2}$ $x_2=\frac{3y-2-y}{2}$

$x_1=2y-1$ $x_2=y-1$

① случай: $x=2y-1$:

$x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0$

$4y^2-4y+1-2y(2y-1)+y^3-3y^2-1=0$

$4y^2-4y+1-4y^2+2y+y^3-3y^2-1=0$

$y^3-3y^2-2y=0$

$y(y^2-3y-2)=0$

Корни уравнения y^2-3y-2:

$D=9+4\cdot 2=$
$=9+8=17$

$y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

получилось: $y=0$; $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

Тогда $x=-1$; $2-\sqrt{17}$; $2+\sqrt{17}$

② случай: $x=y-1$:

$x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0$

$y^2-2y+1-2y(y-1)+y^3-3y^2-1=0$

$y^2-2y+1-2y^2+2y+y^3-3y^2-1=0$

$y^3-4y^2=0$

$y^2(y-4)=0$

$y^2=0$ или $y-4=0$

$y=0$ или $y=4$

получилось: $y=0$; 4

Тогда $x=-1$; 3

Все получившиеся пары x и y: $(-1;0)$; $(2-\sqrt{17};\frac{3-\sqrt{17}}{2})$; $(2+\sqrt{17};\frac{3+\sqrt{17}}{2})$; $(3;4)$

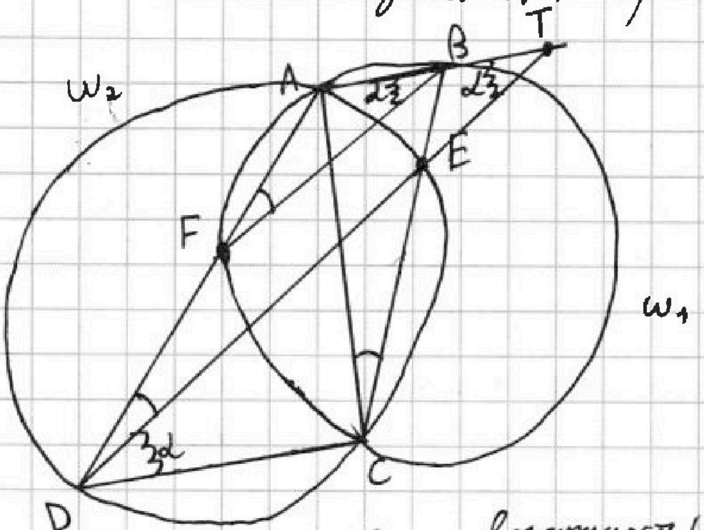
Ответ: $(3;4)$; $(-1;0)$; $(2-\sqrt{17};\frac{3-\sqrt{17}}{2})$; $(2+\sqrt{17};\frac{3+\sqrt{17}}{2})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒ СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются** отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7 стр. 1 из 1



Пусть $\angle ABF = \alpha$, радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно равны r_1 и r_2. На чертеже получилось, что (·)F находится выше (·)E, но на решение это никак не влияет. По условию $r_1 : r_2 = 1 : 2$, надо найти $AF : CE$. Проведём BF, DE и AC.

$\angle AFB = \angle ACB$ (как вписанные в окружность ω_1 и опирающиеся на одну дугу $\overset{\frown}{AB}$)

$\angle ADE = \angle ACE$ (как вписанные в окружность ω_2 и опирающиеся на одну дугу $\overset{\frown}{AE}$)

$\angle ACB = \angle ACE \Rightarrow \angle AFB = \angle ADE \Rightarrow$ FB ∥ DE (т.к. у этих прямых равны соответственные углы $\angle AFB$ и $\angle FBE$)

Продлим DE до пересечения с AB в точке T.

$\angle EDC = \angle ATE$ (как накрест лежащие при AB ∥ DC (AB ∥ DC т.к. ABCD – трапеция))

$\angle ABF = \angle ATE$ (как соответственные при BF ∥ DE) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EDC = \angle ABF = \alpha$

ω_1 – описанная окружность $\triangle ABF$; ω_2 – описанная окружность $\triangle DEC$. По теореме синусов для $\triangle ABF$ и $\triangle DEC$:

для $\triangle ABF$: $\frac{AF}{\sin\angle ABF} = 2r_1$ для $\triangle DEC$: $\frac{CE}{\sin\angle EDC} = 2r_2$

$\angle ABF = \angle EDC = \alpha \Rightarrow \frac{AF}{\sin\alpha} = 2r_1$; $\frac{CE}{\sin\alpha} = 2r_2$

Разделим уравнения:

$\frac{AF}{\sin\alpha} : \frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{2r_1}{2r_2} \Rightarrow \boxed{\frac{AE}{CE} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}}$

Ответ: AF : CE = 1 : 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 стр. 1 из 1

Пусть $n_1 = b(b+1)$ и $n_2 = c(c+1)$ это 2 хороших числа, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$; $c \in N$, $b \in N$, пусть $c > b$ и $n_2 > n_1$.
Тогда $n_2 - n_1 = c(c+1) - b(b+1) = 81\cdot 10^{2024}$

$c^2 + c - b^2 - b = 81\cdot 10^{2024}$

$(c^2 - b^2) + (c - b) = 81\cdot 10^{2024}$

$(c-b)(c+b) + (c-b) = 81\cdot 10^{2024}$

$(c-b)(c+b+1) = 81\cdot 10^{2024}$

Числа $c-b$ и $c+b+1$ обязательно разной чётности ~~c-b~~ (разность чисел и сумма чисел всегда одинаковой чётности ($Ч - Н = Н$, $Н - Н = Ч$, $Ч - Ч = Ч$; $Ч + Н = Н$, $Н + Н = Ч$, $Ч + Ч = Ч$, где Ч — чётное число, Н — нечётное), а если прибавить нечётное число 1 к любому числу, то изменится чётность).
$c \in N$, $b \in N \Rightarrow c - b < c + b + 1$. $81\cdot 10^{2024}$ делится на следующие нечётные числа: 1; 3; 9; 27; 81, при этом при делении на эти числа получится число, очевидно большее его; $81\cdot 10^{2024}$ делится на $c-b$, при этом $c - b < c + b + 1 \Rightarrow c - b$ это нечётное число, на которое делится $81\cdot 10^{2024}$ ($c-b$ нечётное или $c+b+1$ нечётное; $c-b < c+b+1$, поэтому $c-b$ — нечётное). Для $c-b$ получаются следующие варианты:

$$\boxed{\begin{array}{l} c-b=1 \\ c-b=3 \\ c-b=9 \\ c-b=27 \\ c-b=81 \end{array}}$$

~~$c-b=1$: $c=b+1$, тогда $c+b+1=81\cdot 10^{2024}$, т.е. $2b+2=81\cdot 10^{2024}$, $b+1=81\cdot 10^{2023}\cdot 5 \Rightarrow b = 81\cdot 10^{2023}\cdot 5 - 1$, $c = 81\cdot 10^{2023}\cdot 5$; $n_1 = (10^{2023}\cdot 5\cdot 81 - 1)\cdot 10^{2023}\cdot 5\cdot 81$, $n_2 = 10^{2023}\cdot 5\cdot 81\cdot (10^{2023}\cdot 5\cdot 81 + 1)$~~

~~Аналогичным образом получаем следующие варианты n_1 и n_2.~~
~~$c-b=3$: $n_1 = (27\cdot 10^{2023}\cdot 5 - 2)(27\cdot 10^{2023}\cdot 5 - 1)$, $n_2 = (27\cdot 10^{2023}\cdot 5 + 1)(27\cdot 10^{2023}\cdot 5 \dots)$~~
~~$c-b=9$: $n_1 = ($~~
~~$c-b=27$: $n_1 = ($~~
~~$c-b=81$: $n_1 = ($~~

Получилось всего 5 возможных вариантов пар b и c $\Rightarrow$ есть всего 5 пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$.

Ответ: 5 пар хороших чисел.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(|2x-2|)^2+(|x^2+3x|)^2=(|3x+1|)^2$

$11+3=14 \quad -14=0$

$1+6+4-14+3=$

$(2x-2)^2+(x^2+3x)^2=(3x+1)^2$

$4x^2-8x+4+x^4+6x^3+\cancel{9x^2}=\cancel{9x^2}+6x+1$

$4x^2-8x+4+x^4+6x^3-6x-1=0$

$x^4+6x^3+4x^2-14x+3=0$

$27 \times 6 = 162$

$81+36+42+3 = 162$

$3; -3$

$81+6\cdot27+4\cdot9-14\cdot3+3=81+162+36-42+3=$

$81-6\cdot2$

$81-162+36+42+3=162-162$

$x^4+6x^3+4x^2-14x+3 \;|\; x+3$

$-(x^4+3x^3)$

$3x^3+4x^2$

$-(3x^3+9x^2)$

$-5x^2-14x$

$-(-5x^2-15x)$

$x+3$

$x^3+3x^2-5x+1 \;|\; x-1$

$-(x^3-x^2)$

$4x^2-5x$

$-(4x^2-4x)$

$-x+1$

$-x+1$

0

x^2+4x-1

$16+4\cdot1=20$

$x^2-y^2+z^2$

x, y, z - целые

$2x\sqrt{2}+3y\sqrt{2}+z\sqrt{29}=$

$=4\sqrt{2}+2\sqrt{29}$

116

$29\cdot4=80+36=116$

$2x+3y+z\sqrt{\frac{29}{2}}=4+2\cdot\sqrt{\frac{29}{2}}$

$2x+3y=4$

x, y - целые

$z=2$

$2x+3y=4$

$2x+3y-4=\sqrt{\frac{29}{2}}(z-2)$

$x^2-y^2+z^2$

$x=2-\frac{3}{2}y \qquad x+\frac{3}{2}y=2$

$x^2-y^2=(2-\frac{3}{2}y)^2-y^2$

$a\in N$

$n_1=a(a+1)$

n

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n_2 = b(b+1)$

$n_1 = a(a+1)$

$a \in N, b \in N$

$b > c$

$3\beta + 3\lambda + \gamma + \delta = 180$

$180 - 3\beta - 3\lambda - \gamma - \delta = 0$

$\beta + 2\lambda + \gamma = 90$

$2\beta + \lambda + \delta = 90$

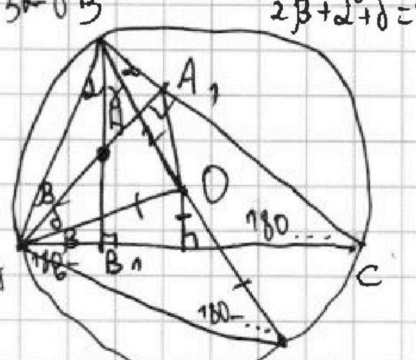
$n_1 - n_2 = 81 \cdot 10^{2024}$

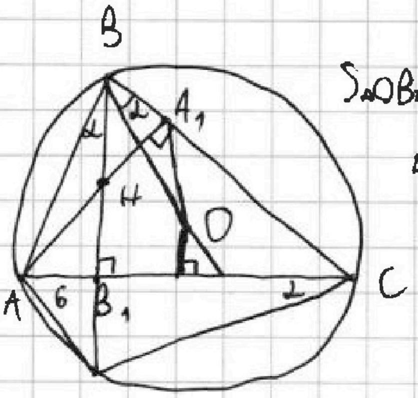
$b^2 + b$

$180 =$

$180 - 2\lambda - 2\beta - \delta - \delta$

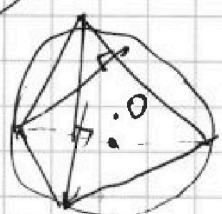
$180 - 2\lambda - 3\beta - \delta - \gamma$

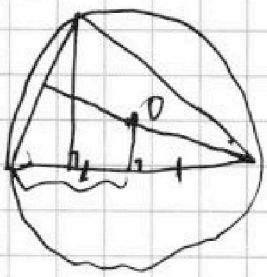


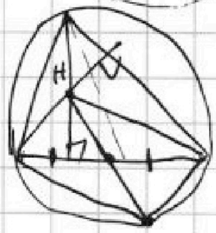


$S_{\triangle OBA_1} = 6$

$\frac{1}{2} OB \cdot BA_1 \cdot \sin\alpha = 6$

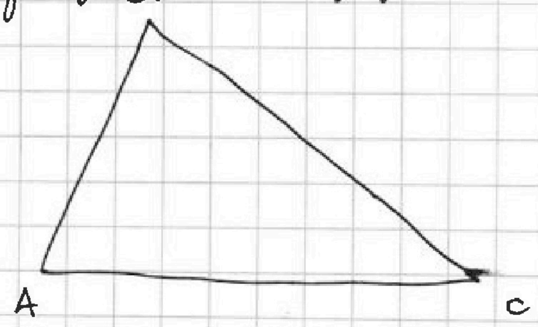






$(x-y)^2 + y^3 - 4y^2 - 1$

$x^2 - 2xy - xy + 2y^2 + 1 + 2x - 2y - y$



$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$

$2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$

$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 =$

$= 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2$

$x^2 + xy + 2y^3 - 8y^2 + 3y - 2x - 3 = 0$

$2y^3 - 8y^2 + 3y + x^2 + xy - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2xy + y^3 - y^2 - 2y^2 - 1 = 0$ $- xy$

$x^2 - 1 - 2y^2 - 2xy - y^2 + y^3$

$x^2 - xy = x(x-y)$

$(x-1)(x+2) - 2y(y+x) -$

$x^2 - 3xy + 2y^2 + 1 + 2x - 3y$

$-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{-3}$ $\frac{1}{1}$

$\frac{AF}{CE}=1$

к : возр. : уменьш.

уменьш.

$-\frac{1}{0{,}5}=-2$

$\frac{1}{0}$ $-\frac{1}{x^2}$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{-2}$ $-\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{-0{,}5}$ $\frac{1}{-2}$

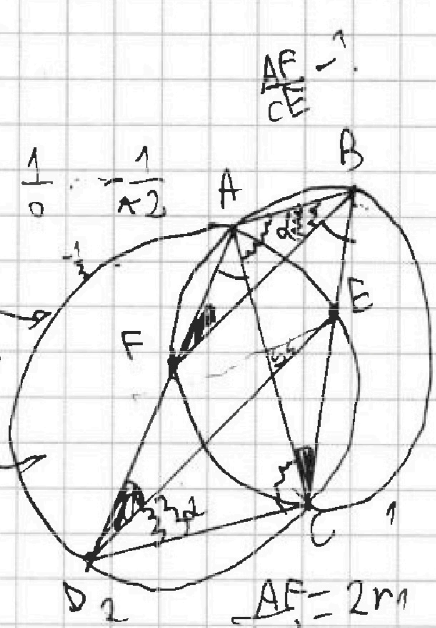
$-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$

-1

$-\frac{1}{2}$ 1

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$



$\sqrt{2x-x^2}=1$

$2x-x^2=x^2+x-2$

$2x^2-x-2=0$

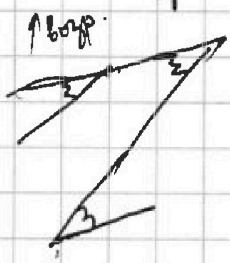
$D=1+4\cdot2\cdot2=1+16=17$

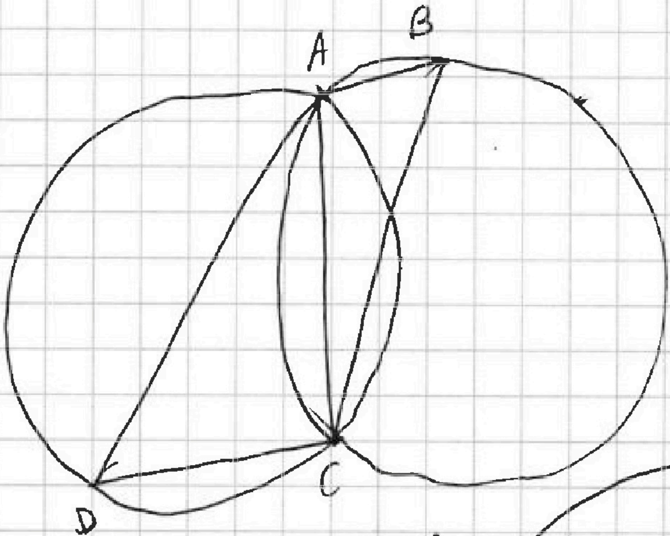
$\frac{AF}{\sin\alpha}=2r_1$

$\frac{CE}{\sin\alpha}=2r_2$

$\frac{AF}{CE}=\frac{2r_1}{2r_2}=$

возр. увел.

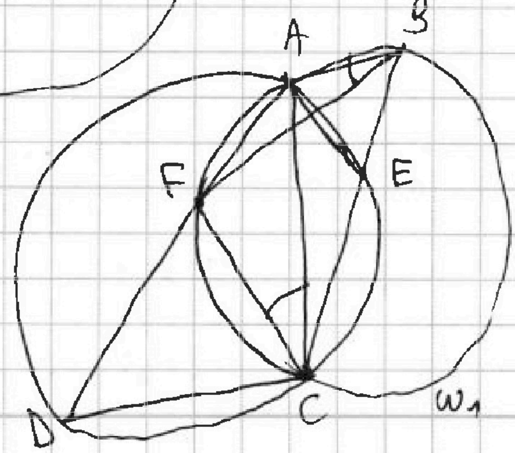




ω_2

$\frac{AF}{CE}$

$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x-1$ или $y-1$

$x^2-2xy-xy+2y^2+\boxed{1}+2x-2y-\boxed{y}$

$y-1$

$\cancel{(x-y)^2-xy+y^2+1+2x-2y-y}$

$x^2-3xy+2y^2+1+2x-3y=0$

$x^2-x(3y-2)+2y^2+1-3y=0$

$D=9y^2-\cancel{12y}+\cancel{4}-8y^2-\cancel{4}+\cancel{12y}=y^2$

$x_{1,2}=\frac{3y-2\pm|y|}{2}$

$x_1=\frac{4y-2}{2}$ $x_2=\frac{2y-2}{2}$

$x_1=2y-1$ $x_2=y-1$

y^2-2y

$y^2-2y+1-2(y-1)y+y^3-3y^2-y=0$

$4x-x^2-3\geq0$

$2x-x^2\geq0$

$x^2+x-2\geq0$

$c=4$
$n<3$ 3 и 1

$y^2-2y-2(y^2-2y)+y^3-3y^2=0$

$y^2-2y-2y^2+4y+y^3-3y^2=0$

-1

-2

-2 1

$x^2-4x+3\leq0$

$x^2-2x\leq0$

$x^2+x-2\geq0$

$y^3-4y^2+2y=0$

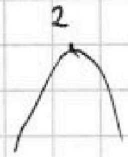
$y(y^2-2y+2)=0$

$y=0$

$(x-3)(x-1)\leq0$

$x(x-2)\leq0$

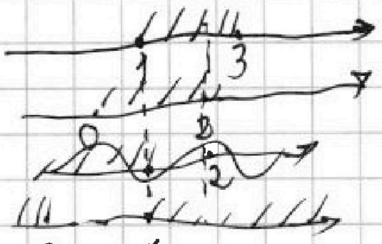
$(x+2)(x-1)\leq0$



$\frac{-4}{-2}=2$

$\frac{-2}{-2}$

$8-4-3=$



от 1 до 2

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{1-3}$

$\frac{1}{-2}$ $\frac{1}{-2}$ -2 1 $\frac{1}{-3}$

$\frac{1}{0-3}\leq\frac{1}{1-0}$

$\frac{1}{0-2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{-3}\leq1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$n = a(a+1)$

$n_1 = b(b+1)$

$n_2 = c(c+1)$

2024 последних цифры одинаковы

$a \neq 1$

$b^2 + b - c^2 - c$

2

$(10^{2023} \cdot 5 - 1) \cdot 10^{2023} \cdot 5$

$n_2 - n_1 = c^2 + c - b^2 - b = (c-b)(c+b) + c - b =$

$= (c-b)(c+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$

$c = b+3$

1 неч и 1 чёт

$c - b < c + b + 1$ $3^4 \cdot 10^{2024}$

1, 3, 9, 27, 81

$c = b+1$

$(c-b)(c+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$

$c - b = 1$

$c - b = 3$

$c - b = 9$

$c - b = 27$

$c - b = 81$

$c + b + 1 = 27 \cdot 10^{2024}$ $2b + 2 = 10^{2024}$

$b + 1 = 10^{2023} \cdot 5$

$b = \boxed{10^{2023} \cdot 5 - 1}$

$c = 1$

1) $\cancel{c = b+3}$ $c - b = 3$

$c = b + 3$ $b + 3 + b + 1 = 2b + 4$

$2b + 4 = 27 \cdot 10^{2024}$

$b + 2 = 27 \cdot 10^{2023} \cdot 5 - 2$

56

72

72

56

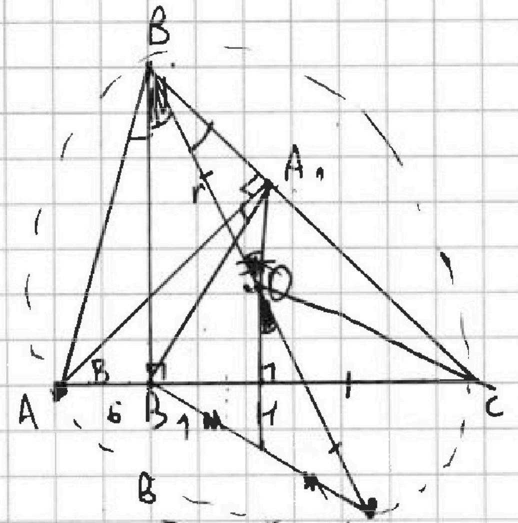
16

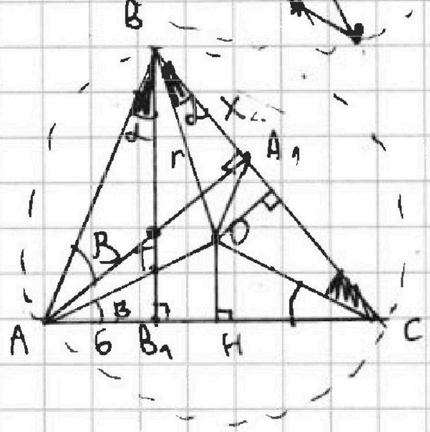
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





B_1T

$\triangle AB_1T_1 \sim \triangle AHO \sim \triangle AA_1B$

$\frac{AB_1}{AH} =$

$\frac{AA}{6}\ \frac{x}{OH} =$

$k = \frac{AB_1}{AH} = \frac{B_1T}{OH} = \frac{AB_1}{AA_1} = \frac{OH}{x}$

$\frac{2S}{xr}\cdot\frac{OH}{r} =$

$\sin\alpha = \frac{2S}{xr}$

$\frac{2S}{xr} = \frac{AB_1}{AB}$

$\frac{x}{AB} = \frac{OH}{r}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}x\cdot r\cdot\sin\alpha = S \ \checkmark \\ \sin\alpha = \frac{AB_1}{AB} \\ \frac{x}{AB} = \frac{OH}{r} \end{cases}$

$\sin\beta = \frac{x}{AB}$

$\sin\beta = \frac{OH}{r}$

$\frac{2S}{xr}\cdot\frac{r}{OH} = \frac{AB_1}{AB}\cdot\frac{AB}{x}\ \frac{2S}{xr}$

$\frac{2S}{A\cdot OH} = \frac{AB_1}{A}$

$\frac{2S}{OH} = AB_1$