



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Для каждого n задан, чему равна сумма углов n -угольника, данного в задаче: $143 + (143+2) + (143+2)^2 + \dots + (143+2 \cdot (n-1))$
 $= 143n + 2(1+2+3+\dots+(n-1)) = 143n + n(n-1)$. Здесь n - количество углов в фигуре из задачи. Эта сумма должна быть равна, по известной формуле, $(n-2) \cdot 180$. Приравняв эти формулы, получаем уравнение: $143n + n(n-1) = 180(n-2) \Leftrightarrow n^2 - 38n + 360 = 0 \Rightarrow$

\Rightarrow по т. Виета $n = \begin{bmatrix} 18 \\ 20 \end{bmatrix}$. Стоит заметить, что

угол выпуклого многоугольника не может быть

больше 180, можем записать этот факт в виде

неравенства: $143 + 2 \cdot (n-1) < 180 \Rightarrow n < 19,5$, т.е.

(т.к. $n \in \mathbb{Z}$) $n \leq 19$. Поэтому наибольшее количество

вершин у данного многоугольника - 18.
Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение №2

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z) = \\ = \ln 6 \Rightarrow 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6 \Leftrightarrow 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^z \cdot 3^z = 2^1 \cdot 3^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{м.к. числа равен: } \begin{cases} z=1, \\ 4x+3y+3=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ 4x+3y=-2; \end{cases}$$

Второе равенство задаёт прямую $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow$

\Rightarrow если $|x| \uparrow$, то $|y| \uparrow$. Как нужно выбрать минимальное значение для $|x| + |y|$. Оно будет достигаться при $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$, ведь ^{или} меньше, чем 1 модулем x число y может быть только 0, но при $x=0$ $y \notin \mathbb{Z}$, а при $|x| > 1$ $|y| > 2$ (как по y так, так как y выше). Значит, $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4 + 1 = 6$ и это наименьшее значение.

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

Имеется 7 подряд идущих натуральных чисел:

$n, n+1, n+2, \dots, n+6$ (n — наименьшее из них).

По условию $p = 6n+k$ и $q = 6n+l$, где k и $l \in \mathbb{Z}$ и

$15 \leq k \leq 21, 15 \leq l \leq 21$ (т.е. если взять первые 6 подряд

~~идущих~~ данных чисел, то их сумма будет равна $6n+15$, а если взять крайние 6, то $6n+21$).

Также заметим, что т.к. p и q — простые и равны модулю, то было написано выше, то

$k \equiv 3, k \equiv 2, l \equiv 3, l \equiv 2$. Получаем, что $k \in \{17, 19\}$ и

$l \in \{17, 19\}$. Из данных в условии равенства

следует, что $k > l$, а значит $k = 17$, а $l = 19$.

Подставляем наши p и q в равенство из условия и получаем уравнение для n :

$$(6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 792 \Leftrightarrow 24n + 72 = 792 \Rightarrow n = 30.$$

Ответ: $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}} \Leftrightarrow 5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{4(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(1 + \sin \frac{\pi}{14}) + (1 + \sin \frac{\pi}{14}) \sqrt{4(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14})}. \text{ Пусть } \frac{\pi}{14} = d,$$

$$\text{тогда } 5 - 4 \sin 3d \sqrt{4 \cos 2d - 5 \sin d} \Leftrightarrow 5(1 + \sin d) \sqrt{$$

$$\sqrt{4(\cos 2d + \sin 3d)}, \cos 2d + \sin 3d = \cos^2 d - \sin^2 d + 2 \sin d \cos^2 d +$$

$$+ \cos^2 d \sin d - \sin^3 d = 1 - 2 \sin^2 d + 3 \sin d - 4 \sin^3 d =$$

$$= (1 + \sin d)(1 - 4 \sin^2 d + 2 \sin d) \Rightarrow 5 \sqrt{1 - 4 \sin^2 d + 2 \sin d}$$

(сравним на $1 + \sin d$, знае, что $\sin d \neq -1$ и т.к. $1 + \sin d > 0$ - знак неравенства не изменился)

$2 \sin^2 d - \sin d + 2 > 0$. Рассмотрим левую часть как квадратный трехчлен относительно $\sin d$.

$$D = 1 - 16 = -15, D < 0 \Rightarrow 2 \sin^2 d - \sin d + 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}.$$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

Заметим, что у пирамиды не более 8 вершин, т.к. если их больше, то в одной плоскости дадутся хотя бы более 7 точек, а по условию в одной плоскости у нас максимум 3 точки (это d).

Далее рассмотрим 2 случая: I) у пирамиды 4 вершины; II) у пирамиды 5, 6, 7 или 8 вершин.

I: количество пирамид в данном случае равно $\frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$ (нам просто нужно выбрать любые 4 точки из 12 и провести сечение, которое не все лежит в d)

II: если 5 вершин: $\frac{12!}{5!7!} \cdot 5 = 7 \cdot 25 = 175$,

если 6 вершин: $\frac{12!}{6!6!} \cdot 5 = 105$, (выбираем 4, 5, 6 или 7 вершин соответственно)

если 7 вершин: $\frac{12!}{7!5!} \cdot 5 = 35$, (но в d и одну из 5 точек в d)

если 8 вершин: 5 вариантов.

Значит существует $495 + 175 + 105 + 35 + 5 = 795$ пирамид, удовлетворяющих условию.

Ответ: 795.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

1) треугольная: 4 точки: $3d + 1: \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 5 = 7 \cdot 25$

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$2d + 2: \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$d + 3: 7 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 7 \cdot 10$$

$$4: \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6}$$

n-гранная: I) $8 \leq n \leq 12$

II) $3 \leq n \leq 7$

I)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin 3d = \sin(2d+d) = \sin 2d \cos d + \cos 2d \sin d = 2\sin d \cos^2 d + \cos^2 d \sin d - \sin^3 d = 3\sin d(1 - \sin^2 d) - \sin^3 d = 3\sin d - 4\sin^3 d.$$

$$4(\cos 2d + \sin 3d) = \cos 1 - 2\sin^2 d + 3\sin d - 4\sin^3 d = 1 + \sin d - 2\sin^2 d(1 + \sin d) + 2\sin d - 2\sin^3 d = (1 + \sin d)(1 - 2\sin^2 d) + 2\sin d(1 - \sin d)(1 + \sin d).$$

$$4\sin^2 d - 2\sin d + 4V0$$

$$2\sin^2 d - \sin d + 2V0$$

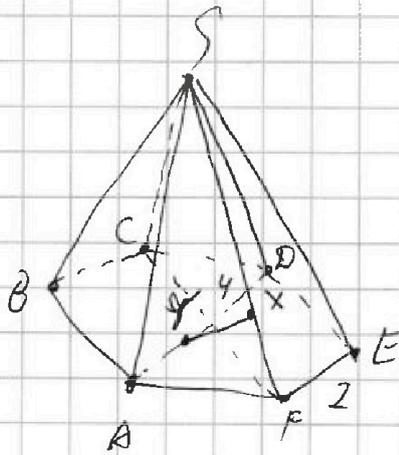
$$D = 1 - \sqrt{7}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 495 \\ \hline 155 \\ + 650 \\ \hline 105 \\ \hline 755 \end{array}$$

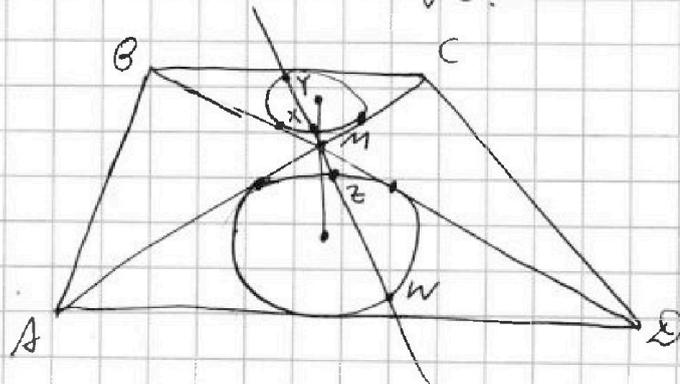
$$\begin{array}{r} 1 \\ + 755 \\ \hline 75 \\ \hline 790 \end{array}$$

$$\sqrt{6} =$$



$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8!}{4! 4!}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6 \quad x^2 + y^2 + z^2 = ?$$

$$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6$$

$$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6 = 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 2^1 \cdot 3^1 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 4x+3y+3=1 \\ 4x+3y=-2. \end{cases}$$

№3. $X = -\frac{2+3y}{4}$

$$n, n+1, n+2, \dots, n+6$$

$$p = 6n + k$$

$$q = 6n + l$$

$$(6n+k)^2 - (6n+l)^2 = 7962$$

$$15 \leq k \leq 20 \quad 15 \leq l \leq 20 \quad k > l$$

$$12nk + k^2 - 12nl - l^2 = 7962$$

$$12n(k-l) + (k-l)(k+l) = 7962$$

19, 17

$k, l \in \{19, 17\}$

$$25n + 2 \cdot 36 = 796$$

$\{19, 17\}$

$$n = \frac{760}{25} = \frac{360}{12} = \frac{90}{3} = 30 \quad k=19, l=17$$

№5

$$\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} = 4 \cos \frac{\pi}{7} + 4$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14} + \sin \frac{\pi}{14} \cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^3 \frac{\pi}{14} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14} =$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}}$$

$$+ 2 \cos^2 \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14} =$$

$$4 \sin \left(\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{14} \right) = 4 \left(\cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14} \right)$$

$$= \cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14} - \sin \frac{3\pi}{14} +$$

$$= 4 \left(\sin \frac{\pi}{14} \left(\cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14} \right) + 2 \cos^2 \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14} \right)$$

$$+ 2 \cos^2 \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin \frac{\pi}{14} \cos^2 \frac{\pi}{14} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{14} + 8 \cos^2 \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{14} - 4 \sin^2 \frac{\pi}{14} - 5 \sin \frac{\pi}{14}}$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) \sqrt{4 \left(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14} \right)}$$

$$4 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) + 4 \sin \frac{\pi}{14} \sqrt{4 \left(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{14} \right)}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} < \cos \frac{\pi}{7} \quad \text{или} \quad \sin$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$143, 143+2, 143+4, \dots$
 $(n-2) \cdot 180$
 $143+2 \cdot 18 = 179$
 $S = 143 \cdot n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 143 \cdot n + n(n-1)$
 $143n + n(n-1) = (n-2) \cdot 180$
 $180 - 143 = 37$
 $37 : 2 = 18,5$
 $\text{max } \text{sum} : 143 + 2 \cdot 18 = 179$
 $\text{Условия: } 3 \leq n \leq 19 \text{ и } 143n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180$
 $n=19: 143 \cdot 19 + 2 \cdot (18 + 17 + 16 + \dots + 1) = 143 \cdot 19 + 2 \cdot \frac{18 \cdot 19}{2} = 143 \cdot 19 + 18 \cdot 19 = 180 \cdot 19$
 $n=18: 143 \cdot 18 + 18 \cdot 17 = 180 \cdot 18$
 $n=17: 143 \cdot 17 + 17 \cdot 16 = 180 \cdot 17$
 $n=16: 143 \cdot 16 + 16 \cdot 15 = 180 \cdot 16$
 $n=15: 143 \cdot 15 + 15 \cdot 14 = 180 \cdot 15$
 $n=14: 143 \cdot 14 + 14 \cdot 13 = 180 \cdot 14$
 $n=13: 143 \cdot 13 + 13 \cdot 12 = 180 \cdot 13$
 $n=12: 143 \cdot 12 + 12 \cdot 11 = 180 \cdot 12$
 $n=11: 143 \cdot 11 + 11 \cdot 10 = 180 \cdot 11$
 $n=10: 143 \cdot 10 + 10 \cdot 9 = 180 \cdot 10$
 $n=9: 143 \cdot 9 + 9 \cdot 8 = 180 \cdot 9$
 $n=8: 143 \cdot 8 + 8 \cdot 7 = 180 \cdot 8$
 $n=7: 143 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 180 \cdot 7$
 $n=6: 143 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = 180 \cdot 6$
 $n=5: 143 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 180 \cdot 5$
 $n=4: 143 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 180 \cdot 4$
 $n=3: 143 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 180 \cdot 3$
 $n=2: 143 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 180 \cdot 2$
 $n=1: 143 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 180 \cdot 1$

$n^2 - 38n + 360 = 0$
 $D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 1554$
 $\sqrt{1554} \approx 39,4$
 $n_1 = \frac{38 + 39,4}{2} \approx 38,7$
 $n_2 = \frac{38 - 39,4}{2} \approx -0,7$
 $n = 15$

$a_1 = 143, a_2 = 143 + 2, a_3 = 143 + 2 \cdot 2, \dots, a_n = 143 + 2 \cdot (n-1)$
 $S_n = 143 \cdot n + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) = 143n + (n-1)n = 180(n-2)$
 $n^2 - 38n + 360 = 0$
 $n = 15$