



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



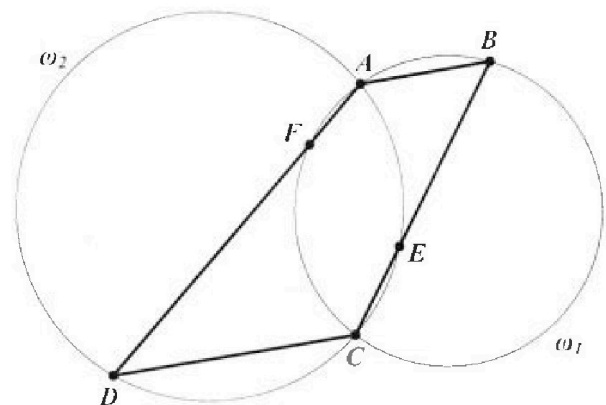
- [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x - 2|$ и $|x^2 + 3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x + 1|$. Найдите x .
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$.
- [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a + 1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.
- [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2} - 3 - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

- [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 — его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

- [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE , если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Сумма катетов² = гипотенузе².

$$(|2x-2|)^2 + (|x^2+3x|)^2 = (|3x+1|)^2$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$$

$$1 + 6 + 4 - 14 + 3 = 0 \Rightarrow x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 : x-1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 11x - 3) =$$

$$= (x-1)(x+3)(x^2 + 4x - 1) = (x-1)(x+3)(x - (-2 + \sqrt{5}))$$

$$(x - (-2 - \sqrt{5})) \Rightarrow x \in \{1, -3, -2 + \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5}\}$$

$x=1$: $|2x-2|=0$, сторона треугольника не может быть 0.

$x=-3$: $|x^2+3x|=0$, сторона треугольника $\neq 0$.

$$x \in \{-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\}$$

$$x = -2 - \sqrt{5}; \quad |2x-2| = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$|x^2+3x| = 3 + \sqrt{5}$$

$$|3x+1| = 5 + 3\sqrt{5}$$

$$(6+2\sqrt{5})^2 + (3+\sqrt{5})^2 = 56 + 24\sqrt{5} + 14 + 6\sqrt{5} = 70 + 30\sqrt{5} = (5+3\sqrt{5})^2$$

$$x = -2 + \sqrt{5}; \quad |2x-2| = 6 - 2\sqrt{5}; \quad |x^2+3x| = 3 - \sqrt{5}$$

$$|3x+1| = 5 - 3\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(6-2\sqrt{5})^2 + (3+7\sqrt{5})^2 = 56 - 24\sqrt{5} + \del{14} - 6\sqrt{5} =$$
$$= 70 - 30\sqrt{5} = (5-3\sqrt{5})^2.$$

Ответ: $x \in \{-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$$

$$\sqrt{32} = 2\sqrt{8}; \quad \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

Докажем, что $a\sqrt{8} + b\sqrt{18} + c\sqrt{29} \neq 0$, при $a, b, c \neq 0$. Т.к. 8, 18 и 29 — числа взаимно простые, то полностью сократить иррациональные не получится (т.к. $x\sqrt{8} \neq \sqrt{18}, \sqrt{29}$ при любом x , значит останется какая-то часть $\sqrt{8}$).

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{29}$$

$$(x-2)\sqrt{8} + y\sqrt{18} + (z-2)\sqrt{29} = 0$$

значит, $x-2=0, z-2=0, y=0 \Rightarrow x=2, z=2, y=0$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 4 - 0 + 4 = 8.$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024} \quad (a > b)$$

$$a^2 + a - b^2 - b = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

1) $a-b \vdots 2$

Числа $a-b$ и $a+b+1$ — разные четности

$$(a+b+1 - (a-b)) = 2b+1 - \text{неч.}$$

1) $a-b \vdots 2 \Rightarrow a-b = 2^{2024} \cdot l, a+b+1 = 81 \cdot 5^{2024}$

$$\begin{cases} a-b = 2^{2024} \cdot l \\ a+b+1 = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{c} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2^{2024} \cdot l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{c} - 1}{2}$$

$$b = \frac{\frac{81 \cdot 5^{2024}}{c} - 1 - 2^{2024} \cdot l}{2}$$

2) $a-b \nmid 2$. Аналогично:

$$\begin{cases} a-b = \frac{2^{2024}}{c} \\ a+b+1 = 2^{2024} \cdot l \end{cases}$$

$$a = \frac{2^{2024} \cdot l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{c} - 1}{2}; \quad b = \frac{2^{2024} \cdot l - 1 - \frac{81 \cdot 5^{2024}}{c}}{2}$$

т.к. $b > 0$, то $a+b+1 > a-b$.

Значит, для каждого $l \leq l$ пары $(a; b)$

Пары не будет, если они равны:

$$2^{2024} \cdot l = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{c}, \text{ но слева — четное, справа — нечетное.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Знаете, как-во таких пар - кол-во делителей
числа $81 \cdot 5^{2024} = 3^4 \cdot 5^{2024} : 5 \cdot 2025 =$
~~10125~~ 10125

Ответ: ~~10125~~ 10125.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

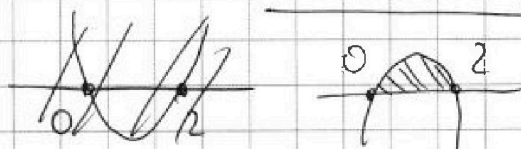
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

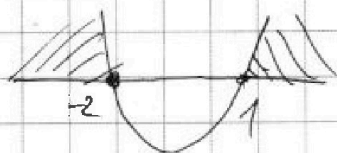
√4

$$1. \quad 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 2]$$



$$x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in \langle -2; 1 \rangle \cup (-\infty; -2] \cup$$

$$4x - x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in \langle 1; 3 \rangle \cup [1; +\infty)$$



$$4x + x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in [1; 3]$$



$$x \in [1; 2]$$

$$I. \quad x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right); \quad 2x - x^2 \stackrel{?}{>} x^2 + x - 2$$

$$0 > 2x^2 - x + 2. \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \quad \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{Т.к. } \sqrt{4x - x^2 - 3} < 3 \quad (4x - x^2 - 3, \quad x_0 = \frac{-4}{-2} = 2 \\ 4 \cdot 2 - 4 - 3 = 1 < 9)$$

то правая часть > 0 , левая < 0 .

$$II. \quad x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3} - 3.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x-x^2-3}} (4-2x) \geq 0 \text{ при } x \leq 2.$$

$$g(x) = \sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} (2-2x) - \frac{1}{2\sqrt{x^2+x-2}} (2x+1) < 0$$

при $x > 1$

Значит, $x \leq 1$ пересечения (т.к. $f'(x) \geq 0$ и $g'(x) < 0$). $f(2) = \sqrt{1} - 3 = -2$.

$g(2) = \sqrt{0} - \sqrt{4} = -2$. Т.к. пересечения в последней точке отрезка, то $f(x) \leq g(x)$, при $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$.

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)}, \text{ т.к. } f(x) < 0; g(x) < 0, \text{ то}$$

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow \underline{g(x) \leq f(x)} \Rightarrow \text{только при}$$

$$x = 2.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \{2\}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5/

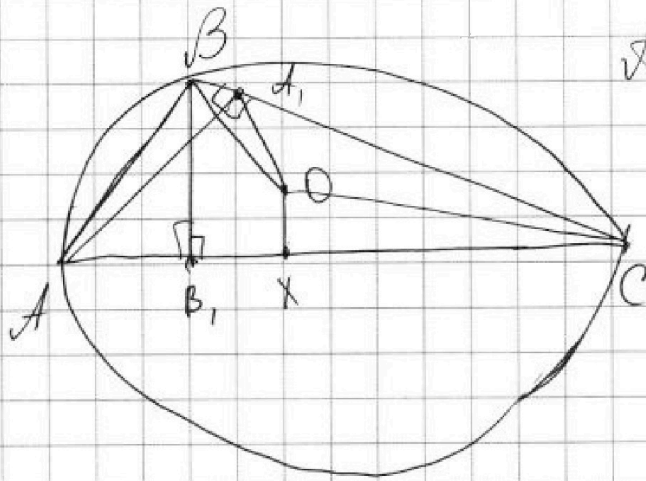
6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



$$AB_1 = 6,$$

$$S_{\triangle BAO} = 6$$

r - радиус ($\triangle ABC$)

$$\angle ABC = \beta, \quad \angle BAC = \alpha.$$

$$\triangle ABB_1: \quad AB = \frac{AB_1}{\cos \alpha} = \frac{6}{\cos \alpha}$$

$$\triangle ABA_1: \quad BA_1 = AB \cdot \cos \beta = \frac{6 \cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$S_{\triangle BAO} = \frac{1}{2} \sin \angle BOA_1 \cdot BO \cdot BA_1$$

$$\sin \angle BOA_1 = \sin \angle OBC$$

$$OB = OC \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB, \quad \angle BOC = 2\alpha \text{ (углы при основании)}$$

$$\angle OBC = 90 - \alpha$$

$$\sin \angle OBC = \cos \alpha, \quad BO = r$$

$$S_{\triangle BAO} = \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot r \cdot \frac{6 \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} r \cdot 6 \cos \beta$$

$$6 = \frac{1}{2} r \cdot 6 \cos \beta \Rightarrow r = \frac{2}{\cos \beta}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(т. Синусов $\triangle ABC$)
 $\frac{AC}{\sin \beta} = 2r \Rightarrow AC = 2r \sin \beta$

Расстояние от O до AC - $OK^2 = OC^2 - KC^2 =$
 $= r^2 - \frac{AC^2}{4} = r^2 - r^2 \sin^2 \beta = r^2 (1 - \sin^2 \beta) = r^2 \cos^2 \beta =$
 $= \frac{r^2}{4} \cdot \cos^2 \beta = 4$

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6/ 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{+} : x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0 \\ (x - y + 1)(x - 2y + 1) = 0$$

$$\text{I. } x - y + 1 = 0; \quad x = y - 1$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 &= y^2 - 2y + 1 - 2y(y - 1) + y^3 - \\ - 3y^2 - 1 &= y^2 - 2y + 1 - 2y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 = \\ &= \cancel{y^3} - 4y^2 = 0 \Rightarrow y = 4, \quad x = 3. \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} : 9 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 64 - 48 - 1 = 9 - 24 + 64 - 48 - 1 = 0$$

$$\textcircled{2} : 6 - 12 - 64 + 80 - 12 + 2 = 0$$

$$\text{II. } x - 2y + 1 = 0; \quad x = 2y - 1$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 &= 4y^2 - 4y + 1 - 2y(2y - 1) + y^3 - \\ - 3y^2 - 1 &= 4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 = \\ &= y^3 - 3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad y^2 - 3y - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 &= 4y - 2 - 2y^2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = \\ &= -y^3 + 3y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad -y^2 + 3y + 2 = 0 \\ y_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y=4, x=3); (y=0, x=-1);$$
$$(y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}; x = 2+\sqrt{17}); (y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}; x = 2-\sqrt{17})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$w_2 (2\pi)$ $w_1 (r)$

$BE \cdot BC = BA \cdot BA'$
 $DF \cdot DA = DC \cdot DC'$
 $AD = \sin \alpha$
 $BE = 2r \sin \alpha$

$BE = BC - CE$
 $BC^2 - CE \cdot BC = BA \cdot BA'$
 $CE = BC \cdot \frac{BA \cdot BA'}{BC}$

$2x - x^2 = \frac{5}{2} - \frac{25}{16} = \frac{15}{16}$

$x^2 + x - 2 = 1$
 $= \frac{25}{16} + \frac{5}{4} - 2 = 5 - \frac{25}{16} = \frac{57}{16}$
 $= \frac{25}{16} + \frac{20}{16} - \frac{32}{16} = \frac{13}{16}$

$\frac{CE \cdot CA \cdot EL}{EK \cdot AF \cdot LC} = 1$

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

$AF \cdot DF = FF' \cdot FE$
 $CE \cdot EB = EE' \cdot FE$
 $\frac{AF \cdot DF}{CE \cdot EB} = \frac{FF' \cdot FE}{EE' \cdot FE}$
 $\frac{AF \cdot DF}{CE \cdot EB} = \frac{FF' \cdot EB}{EE' \cdot DF}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a(a+1) \quad a \in \mathbb{N}$$

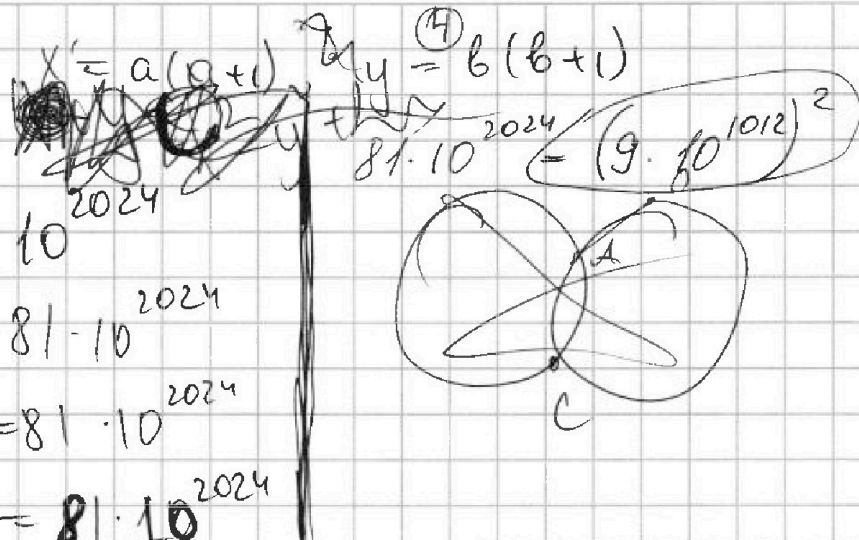
$$x = a(a+1)$$

$$x - y = 81 \cdot 10$$

$$a^2 + a - (b^2 + b) = 81 \cdot 10$$

$$a^2 - b^2 + a - b = 81 \cdot 10$$

$$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10$$



$a-b$ и $a+b+1$ — разной четности.

$$1) a-b: 2 \Rightarrow \begin{cases} a-b = 2 \cdot l \\ a+b+1 = \frac{81 \cdot 5}{l} \end{cases}$$

$$\text{НОД}(a-b, a+b+1) = \text{НОД}(2a+1, a-b)$$

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{4} \\ b \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

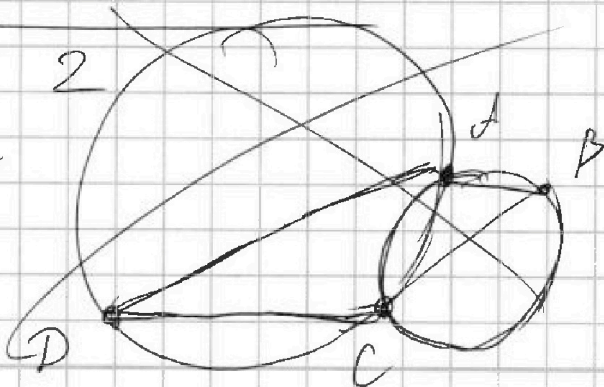
$$2a+1 = 2 \cdot l + \frac{81 \cdot 5}{l}$$

$$a = \frac{2 \cdot 2^{2024} \cdot l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1}{2}$$

$$b = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1 - 2 \cdot l$$

$$\frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} > 2 \cdot 2^{2024} \cdot l$$

$$l^2 < 81 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2024}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

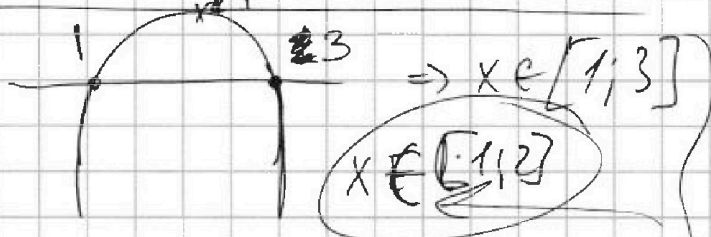
$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} \leq \sqrt{4x-x^2-3}-3$$

$$-x^2+4x-3$$

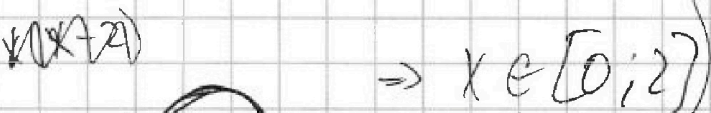
$$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$



$$2x-x^2 \geq 0$$

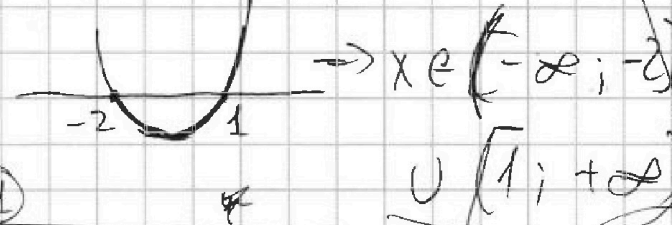
$$-x^2+2x \geq 0$$



$$x^2+x-2 \geq 0$$

$$x_0 = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$-x^2+4x-3; \quad -4+8-3=1$$

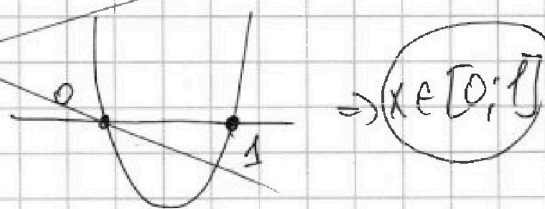


$$\sqrt{4x-x^2-3} \leq 1$$

$$\sqrt{2x^2-2}-\sqrt{x^2+x-2} \leq 0$$

$$2x^2-2 \geq x^2+x-2$$

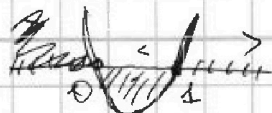
$$x^2-x \geq 0$$



$$x \leq 1: \sqrt{4x-x^2-3}-3$$

$$4x-x^2-3 < 9 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2-3}-3 < 0$$

$$\sqrt{2x-x^2} > \sqrt{x^2+x-2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \mid x-1$
 $-x^4 - x^3$
 $7x^3 + 4x^2 - 14x + 3$
 $7x^3 - 7x^2$
 $11x^2 - 14x + 3$
 $11x^2 - 11x$
 $-3x + 3$
 $-3x + 3$
 0

$x^2 + 3x \mid x-1$
 $-x^2 + x$
 $4x - 3$
 $4x^2 + 11x - 3$
 $4x^2 + 12x$
 $x - 3$

$x^2 + 3x = 9 - 4$
 $3x + 4 = 5$
 $x^2 + 4x - 1$
 $D = 16 + 4 = 20$
 $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$
 $-2 + \sqrt{5}$
 $-2 - \sqrt{5}$

$|-4 + 2\sqrt{5} - 2| = |-6 + 2\sqrt{5}| = 6 - 2\sqrt{5}$
 $|x^2 + 3x| = |9 - 4\sqrt{5} - 6 + 3\sqrt{5}| = |3 - \sqrt{5}| = 3 + \sqrt{5}$
 $|3x + 1| = |-6 + 3\sqrt{5} + 1| = |-5 + 3\sqrt{5}| = 5 - 3\sqrt{5}$

$(5 + \sqrt{5})^2 = 30 + 10\sqrt{5}$
 $80 + 30\sqrt{5}$

$(-2 + \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$
 $x^3 + 7x^2 + 11x - 3 = 0$
 $-27 + 63 - 33 - 3 = 0$
 $x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \mid x+3$
 $-x^3 + 3x^2$
 $4x^2 + 11x - 3$
 $4x^2 + 12x$
 $x - 3$

$(-2 + \sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$
 $25 + 9 - 5 = 29$
 $4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$KA \cdot KF = KB \cdot KC$
 $KA \cdot KB = KB \cdot KE$
 $EC = \frac{KA \cdot DF}{KB}$
 $KA \cdot DF = KB \cdot EC$

$2x - 2 = -6 - 2 = -8$
 64

$KA \cdot KF = KB \cdot KC$
 $KA \cdot KB = KB \cdot KE$
 $KA \cdot DF = KB \cdot EC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116} \quad \sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$$

$$3x^2 - y^2 + z^2 - ? \quad \min$$

(x, y, z) — вершины. $\sqrt{32} = 2\sqrt{8}$

$$\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 2(\sqrt{8} + \sqrt{29})$$

$$y = \sqrt{8}(2-x) + \sqrt{29}(2-z)$$

$$8(2-x)^2 + 29(2-z)^2 + 2\sqrt{232}(2-x)(2-z)$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 8 \\ \hline 232 \end{array}$$

$$y^2 = \frac{2K + 32 - 32x + 8x^2 + 116 - 116z + 116z^2}{18} \quad (x \geq z)$$

$$x^2 + z^2 - y^2 = \frac{z(\sqrt{8} + \sqrt{29})}{8} \quad x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29}$$

$$x\sqrt{8} + z\sqrt{29} + y\sqrt{18} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{29} \quad a'\sqrt{8} + b'\sqrt{18} + c'\sqrt{29} = 0$$

$$y\sqrt{18} = a'\sqrt{8} + b'\sqrt{29}$$

$$y = a'\sqrt{\frac{8}{18}} + b'\sqrt{\frac{29}{18}}$$

$$\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{29}{18}} \cdot \sqrt{\frac{8}{29}} \quad \sqrt{\frac{29}{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} \cdot \sqrt{\frac{29}{8}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

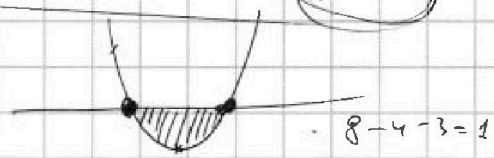
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) ~~$x \in [1; 2]$~~ $x = 1$. $x^2 + x - 2 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. $4 + 2 - 2 = 4$
 $\frac{1}{-3} < 1 < \frac{1}{4}$ $2 > \frac{1 + \sqrt{17}}{4} > 1$

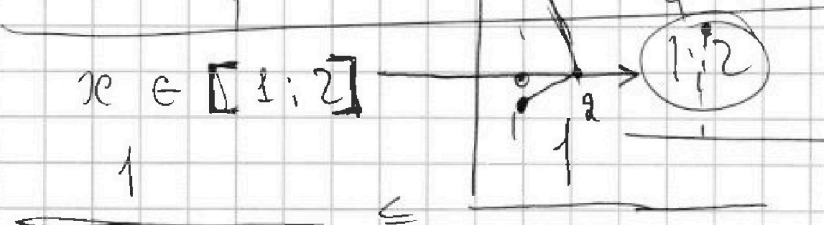
2) $x \in [1; 2]$. $\sqrt{2x - x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + x - 2}$
 $4 + 2 - 2 = 4$ **min**

$2x - x^2 \leq x^2 + x - 2$
 $\frac{1}{-3} \leq \frac{1}{10} \leq 2x^2 - x - 2$



$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17$
 $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{-2}$
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 17$
 $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$



$\sqrt{4x - x^2 - 3} - 3 \leq \sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}$
 $\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2} \leq \sqrt{4x - x^2 - 3} - 3$

$g(x) = \sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}$

$\frac{1}{-3} \leq \frac{1}{-5}$
 $5 \leq 3$
 $\frac{2}{-1} \leq \frac{2}{-2}$
 $-4 \leq -3$

$x \in [1; 2]$

$\sqrt{2x - x^2} + 3 \leq \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{4x - x^2 - 3}$

$f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3} - 3$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot (4 - 2x) \geq 0$

$g(x) = \sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}$

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot (2 - 2x) -$

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot (2x + 1) < 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2 + a) - (b^2 + b) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b) + a - b = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$1) a-b : 2 \Rightarrow a+b+1 : 2$$

$$a-b = 2 \cdot l$$

$$a+b+1 = 81 \cdot \frac{5^{2024}}{l}$$

$$l = \dots, a = \dots, b = \dots$$

$$l \leq 5^{1012}, \text{ то } l \leq 3 \cdot 5^{1012} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot l \geq 2 \cdot 3 \cdot 5^{1012}$$

$$\leq 3 \cdot 5^{1012}$$

$$l^2 \leq 81 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2024}$$

$$BA_1 = AB \cos \beta = 6 \cos \alpha \cos \beta$$

$$r = \frac{2}{\cos \beta}$$

$$2) a+b+1 : 2$$

$$a+b+1 = 2 \cdot l$$

$$a-b = 81 \cdot \frac{5^{2024}}{l}$$

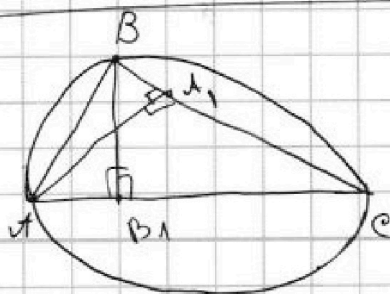
$$AC = 2r \sin \beta$$

$$\frac{AC^2}{4} = r^2 \sin^2 \beta$$

$$B_1C^2 =$$

$$r^2 (1 - \sin^2 \beta) = r^2 \cos^2 \beta =$$

$$= \frac{4}{\cos^2 \beta}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА _____
ИЗ _____

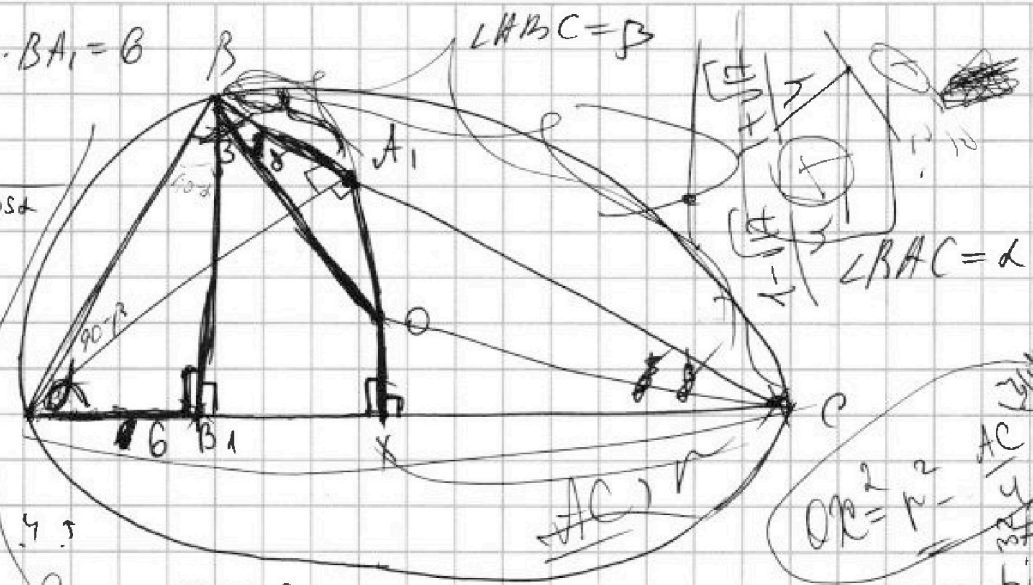
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{2} r \cos \alpha \cdot BA_1 = b$$

$$r = \frac{b}{BA_1 \cos \alpha}$$

$$\frac{1}{2} r \sin \alpha = \frac{12}{BA_1 \cos \alpha}$$



$S_{\text{общ}} = 6$, $OX = ?$

Решение $B_1(0;0)$ $A(-6;0)$ $B(0;6)$ $C(\frac{c}{2}; 0)$

$x(\frac{c-6}{2}; 0)$

~~$\frac{1}{2} r BA_1 \sin \phi$~~

$\frac{1}{2} r BA_1 \sin \phi = b$
($\phi = 90 - \alpha$)

$BA_1^2 = AB^2 - AA_1^2$

$AA_1^2 = AC^2 - A_1C^2$

$BB_1 = b \cdot \text{tg} \alpha$ $AB = b / \cos \alpha$

$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2r$
 $BC = 2r \sin \alpha$

$BA_1 \sin \alpha = AB \cdot \cos \beta = \frac{b \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha}$

$3r \cos^2 \alpha \cos \beta = b$

$r = \frac{b}{\cos^2 \alpha \cos \beta}$

$B_1C^2 = BC^2 - BB_1^2 = 4r^2 \sin^2 \alpha - 36 \text{tg}^2 \alpha$

$2x = \frac{5}{10}$
 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

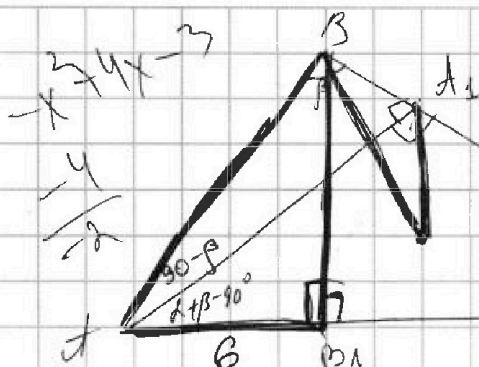


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 1 + 4 + 8 - 12 + 1 \\ 9 + 12 - 8 - 12 - 1 \end{aligned}$$

$$r^2 \cos^2 \beta$$

$$\begin{cases} y = 2; x = -1 \\ \text{check need} \\ y = -2; x = 3 \end{cases}$$

$$2) x = 1 - 2y$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4y - y + 2y^2 - \\ -y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \\ 1 - 4y + 4y^2 - 2y + 4y^2 \\ + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ = 1 \end{aligned}$$

$$BA_1 = AB \cos \alpha \cos \beta;$$

$$AB = 6 / \cos \alpha$$

$$r = \frac{2}{\cos^2 \alpha \cos \beta}$$

$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$(x - y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2x - 2y - 2xy$$

$$(x - y + 1)^2 - xy + y^2 - y = 0$$

$$(x - y + 1)^2 - y(x - y + 1) = 0$$

$$(x - y + 1)(x - 2y + 1) = 0$$

$$y^3 - 5y^2 - 6y = 0$$

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

$$y = 1; x = -1$$

$$y = 6; x = 11$$

$$\frac{2}{-1} \leq \frac{12}{-2}$$

$$-4 \leq -3$$

$$D = 9 + 4 \cdot 12 = 63$$

$$x^2 - 2yx + x - yx + 2y^2 - y + x - 2y + 1 = 0$$

$$y_{1,2}$$

$$x = 2$$

$$y = \pm 2$$

$$1) x + y = 1, x = 1 - y$$

$$1 - 2y + y^2 - 2(1 - y)y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$1 - 2y + y^2 - 2y + 2y^2 + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^3 = 2y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

The image shows a handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a cube. The solution includes several diagrams and equations:

- Diagrams:**
 - A 3D diagram of a cube with vertices labeled A, B, C, D, A', B', C', D'. A point E is marked on the edge A'B'. A line segment connects D and E. A plane is shown passing through D, E, and another point on the edge A'D'. The intersection of this plane with the cube's surface is shown as a line segment.
 - A 2D diagram showing a right-angled triangle with legs of length 1 and 1, and a hypotenuse of length $\sqrt{2}$. This is used to find the distance from a vertex to a plane.
 - Another 2D diagram showing a right-angled triangle with legs of length $\sqrt{2}$ and $\sqrt{2}$, and a hypotenuse of length 2. This is used to find the distance from a vertex to a plane.
 - A diagram showing a cube with a plane passing through it, and the intersection of the plane with the cube's surface is shown as a line segment.
- Equations and Calculations:**
 - $DF \cdot DA = DC \cdot DC' = 2$
 - $DF \cdot DA = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$
 - $2x - x^2 = x + x - 2$
 - $2x^2 - x - 2 = 0$
 - $AC = BC' = A'D$
 - $A'D \parallel BC'$
 - $AB = y$
 - $CC' = 2x \cos \alpha + y$
 - $DC = 2$
 - $AD = 2x \cos \alpha + 2$
 - $DM = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$

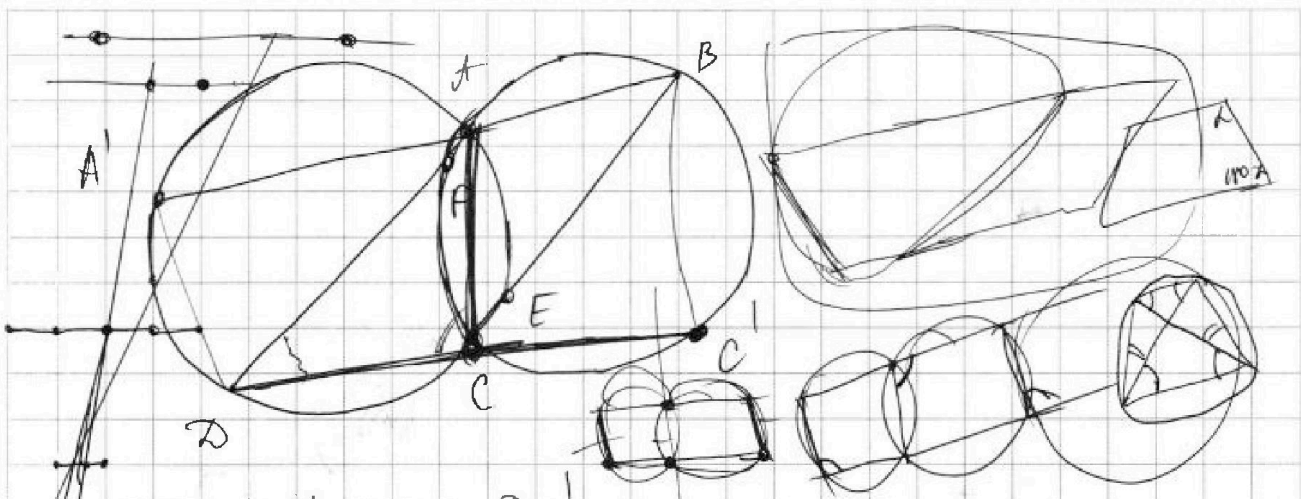


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

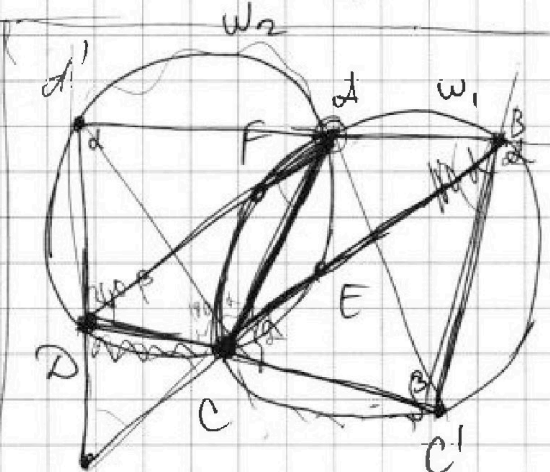
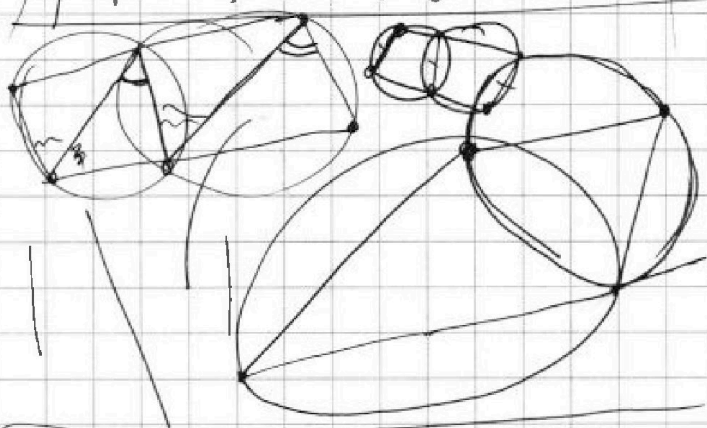
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$DF \cdot DA = DC \cdot DC'$$



$$w_2 : 2r$$

$$w_1 : r$$

$$DF \cdot DA = DC \cdot DC'$$

$$BA \cdot BA' = BE \cdot BC$$

$$DA = \dots \quad DF = DA - AF$$

$$DA - AF = \frac{DC \cdot DC'}{DA} - DA^2$$

$$CE = \frac{BA \cdot BA'}{BC} - BE^2$$

$$BE = BC - CE$$