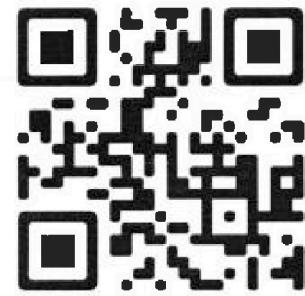




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 13

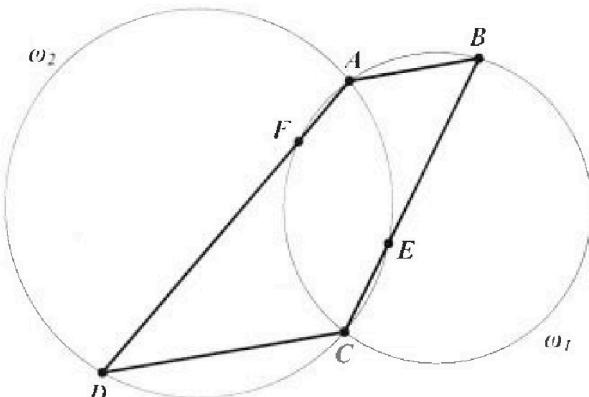
- [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x - 2|$ и $|x^2 + 3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x + 1|$. Найдите x .
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$.
- [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.
- [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3 - 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2 - \sqrt{x^2 + x - 2}}}.$$

- [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 — его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OB_1A_1 равна 6.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

- [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE , если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.



I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Сумма катетов $= \text{гипотенуз}^2$

$$(12x - 2)^2 + (x^2 + 3x)^2 = (3x + 1)^2$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$$

$$1 + 6 + 4 - 14 + 3 = 0 \Rightarrow x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 : x - 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = (x - 1)(x^3 + 7x^2 + 11x - 3) =$$

$$= (x - 1)(x + 3)(x^2 + 4x - 1) = (x - 1)(x + 3)(x - (-2 + \sqrt{5}))$$

$$(x - (-2 - \sqrt{5})). \Rightarrow x \in \{1, -3, -2 + \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5}\}$$

$x = 1$: $|2x - 2| = 0$, сторона треугольника

не может быть 0.

$x = -3$: $|x^2 + 3x| = 0$, сторона треугольника $\neq 0$.

$$x \in \{-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\}$$

$$x = -2 - \sqrt{5}; |2x - 2| = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$|x^2 + 3x| = 3 + \sqrt{5}$$

$$|3x + 1| = 5 + 3\sqrt{5}$$

$$(6 + 2\sqrt{5})^2 + (3 + \sqrt{5})^2 = 56 + 24\sqrt{5} + 14 + 6\sqrt{5} = 70 + 30\sqrt{5} = (5 + 3\sqrt{5})^2$$

$$x = -2 + \sqrt{5}; |2x - 2| = 6 - 2\sqrt{5}; |x^2 + 3x| = 3 - \sqrt{5}$$

$$|3x + 1| = 5 - 3\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(6 - 2\sqrt{5})^2 + (3 + 7\sqrt{5})^2 = 56 - 24\sqrt{5} + \cancel{14} - 6\sqrt{5} = \\ = 70 - 30\sqrt{5} = (5 - 3\sqrt{5})^2$$

Ответ: $x \in \{-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$$

$$\sqrt{32} = 2\sqrt{8}; \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

Доказано, что $a\sqrt{8} + b\sqrt{18} + c\sqrt{29} \neq 0$, при

(хотя $x=1$) чётных $a, b, c \neq 0$. т.к. 8, 18 и 29 чётные

числа между которыми рациональное число,

то построив сокращение иррационального

числа получим (т.к. $x\sqrt{8} \neq \sqrt{18}, \sqrt{29}$ при чётном x ,
значит останется какое-то чётное $\sqrt{8}$).

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{29}$$

$$(x-2)\sqrt{8} + y\sqrt{18} + (z-2)\sqrt{29} = 0$$

↓

Значит, $x-2=0, z-2=0, y=0 \Rightarrow x=2, z=2, y=0$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 4 - 0 + 4 = 8.$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

$$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024} \quad (a > b)$$

$$a^2 + a - b^2 - b = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$1) a-b \neq 2$$

Числа $a-b$ и $a+b+1$ - разные четности

$$(a+b+1 - (a-b)) = 2b+1 \text{ - нечет.}$$

$$1) a-b \neq 2 \Rightarrow a-b = 2^{2024} \cdot l, a+b+1 = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l}$$

$$\begin{cases} a-b = 2^{2024} \cdot l \\ a+b+1 = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2^{2024} \cdot l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1}{2}$$

$$b = \frac{\frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1 - 2^{2024} \cdot l}{2}$$

$$2) a-b \neq 2. \text{ Аналогично: } a-b = \frac{2^{2024} \cdot l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1}{2}$$

$$a+b+1 = 2^{2024} \cdot l$$

$$a = \frac{2^{2024} \cdot l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1}{2}; b = \frac{2^{2024} \cdot l - 1 - \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l}}{2}$$

П.к. $b > 0$, то $a+b+1 > a-b$.

Значит, gilt какого $l \leq l$ пары (a, b)

Пары не бывает, если они равны:

$$2^{2024} \cdot l = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l}, \text{ но слева - чётное, справа - нечёт.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Знаю, как -60 таких пар - как -60 делителей

$$\text{числа } 81 \cdot 5^{2024} = 3^4 \cdot 5^{2024} : 5 \cdot 2025 =$$

~~-60~~ 10125

Ответ: ~~60~~ 10125.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



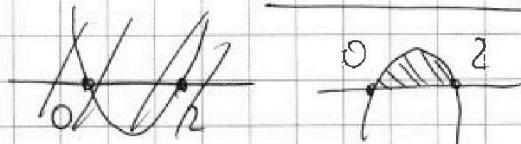
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

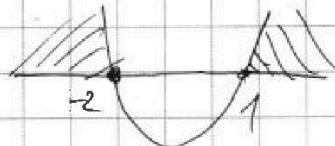
$\sqrt{4}$

$$1. 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 2]$$

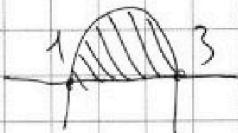


$$x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, 1] \cup (-\infty, -2) \cup$$

$$4x - x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in \cup (1; +\infty)$$



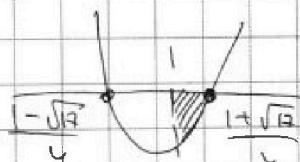
$$4x - x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x \in [1; 3]$$



$$x \in [1; 2]$$

I. $x \in [1; \frac{1+\sqrt{17}}{4})$; $2x - x^2 \geq x + x - 2$

$$0 \geq 2x^2 - x + 2.$$



T.к. $\sqrt{4x - x^2 - 3} < 3$ ($4x - x^2 - 3, x_0 = \frac{-b}{2a} = 2$
 $4 \cdot 2 - 4 - 3 = 1 < 3$)

то правая граница > 0 , левая < 0 .

II. $x \in (\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = \sqrt{4x-x^2-3} - 3.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x-x^2-3}} (4-2x) \geq 0 \text{ при } x \leq 2.$$

$$g(x) = \sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} (2-2x) - \frac{1}{2\sqrt{x^2+x-2}} (2x+1) < 0$$

при $x > 1$

Значит, $f(x) \leq g(x)$ (т.к. $f'(x) \geq 0$ и $g'(x) < 0$). $f(2) = \sqrt{1} - 3 = -2$.

$g(2) = \sqrt{0} - \sqrt{4} = -2$. Т.к. пересечение в последней точке отрезка, то $f(x) \leq g(x)$, при $x \in (\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2]$.

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)}, \text{ т.к. } f(x) < 0; g(x) < 0, \text{ то}$$

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \Rightarrow \text{только при}$$

$$x=2.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2 \right] \cup \{2\}.$$



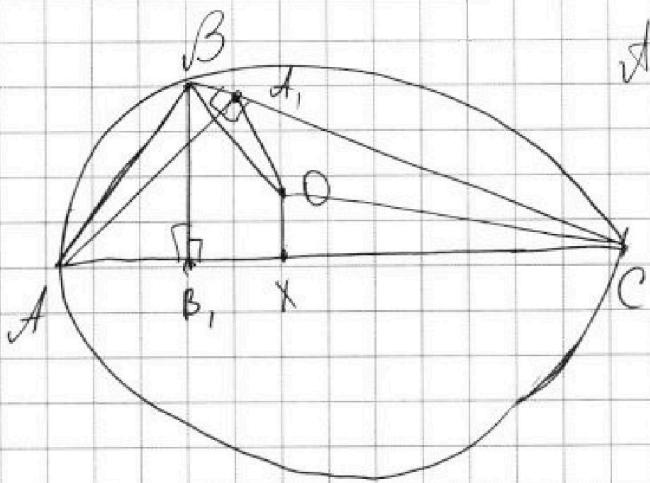
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5



$$\sqrt{B_1} = 6,$$

$$S_{\Delta BAO} = 6$$

r - радиус (ABC)

$$\angle ABC = \beta, \quad \angle BAC = \alpha.$$

$$\triangle ABB_1: AB = \sqrt{B_1} = \frac{6}{\cos \alpha}$$

$$\triangle ABD_1: BA_1 = AB \cdot \cos \beta = \frac{6 \cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$S_{\Delta BAO} = \frac{1}{2} \sin \angle OBA_1 \cdot BO \cdot BA_1$$

$$\sin \angle OBA_1 = \sin \angle OBC. \text{ Правило}$$

$$OB = OC \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB, \quad \angle BOC = 2\alpha \text{ (уемя ольбю)}$$

$$\angle OBC = 90 - \alpha.$$

$$\sin \angle OBC = \cos \alpha, \quad BO = r$$

$$S_{\Delta BAO} = \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot r \cdot \frac{6 \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} r \cdot 6 \cos \beta$$

$$6 = \frac{1}{2} r \cdot 6 \cos \beta \Rightarrow r = \frac{2}{\cos \beta}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(т. синусов $\triangle ABC$)
 $\frac{AC}{\sin \beta} = 2r \Rightarrow AC = 2r \sin \beta$

расстояние от О до АС - $OK^2 = OC^2 - XC^2 =$
 $= r^2 - \frac{AC^2}{4} = r^2 - r^2 \sin^2 \beta = r^2(1 - \sin^2 \beta) = r^2 \cos^2 \beta =$
 $= \frac{r^2}{\cos^2 \beta} \cdot \cos^2 \beta = 4$

Ответ: 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{+} : x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$(x - y + 1)(x - 2y + 1) = 0$$

I. $x - y + 1 = 0 ; x = y - 1$

$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = y^2 - 2y + 1 - 2y(y-1) + y^3 -$$

$$-3y^2 - 1 = y^2 - 2y + 1 - 2y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 =$$

$$= y^3 - 4y^2 = 0 \Rightarrow y = 4, x = 3.$$

$$\textcircled{1} : 9 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 64 - 48 - 1 = 9 - 24 + 64 - 48 - 1 = 0$$

$$\textcircled{2} : 6 - 12 - 64 + 80 - 12 + 2 = 0$$

II. $x - 2y + 1 = 0 ; x = 2y - 1$

$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 4y^2 - 4y + 1 - 2y(2y-1) + y^3 -$$

$$-3y^2 - 1 = 4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 =$$

$$= y^3 - 3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0, y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 4y - 2 - 2y + y - y + 5y^2 - 3y + 2 =$$

$$= -y^3 + 3y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0, -y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 4, x = 3 \\ y = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}; x = 2 + \sqrt{17} \\ y = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}; x = 2 - \sqrt{17} \end{cases}$$

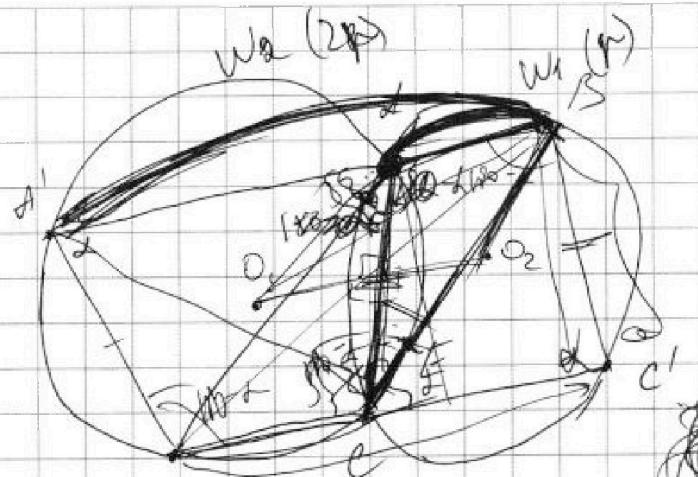
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BF \cdot BC = BA \cdot BA'$$

$$DF \cdot DA' = DC \cdot DC'$$

$$AD = \cancel{DC} \text{ и } \cancel{DA}$$

$$BE = \cancel{BC} \text{ и } \cancel{CE}$$

$\frac{3}{3}$

$$BC = BC - CE$$

$$BC^2 - CE \cdot BC = \cancel{BA} \cdot \cancel{BA}$$

$$CE = BC \cdot \frac{\cancel{BA}}{BC}$$

$$BA \cdot BA = BA(BA + \cancel{BA})$$

$$x^2 - x - 2 = \cancel{x^2} - x^2 + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} =$$

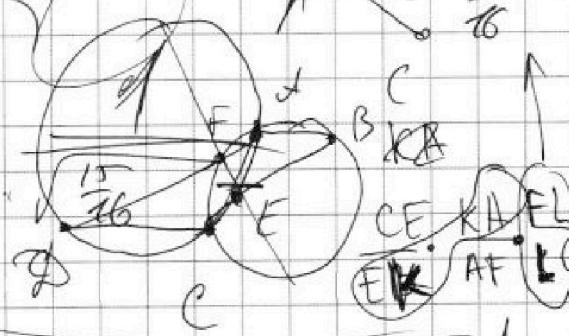
$$= \frac{25}{16} + \frac{5}{4} - 2 = \frac{5}{16} - 3$$

$$= \frac{25}{16} + \frac{80}{16} - \frac{32}{16} = \frac{7}{16} - 3$$

$$= \frac{13}{16}$$

$$x^2 - x - 2 = 2x - x^2 : \frac{5}{2} - \frac{25}{16} =$$

$$\frac{15}{16}$$



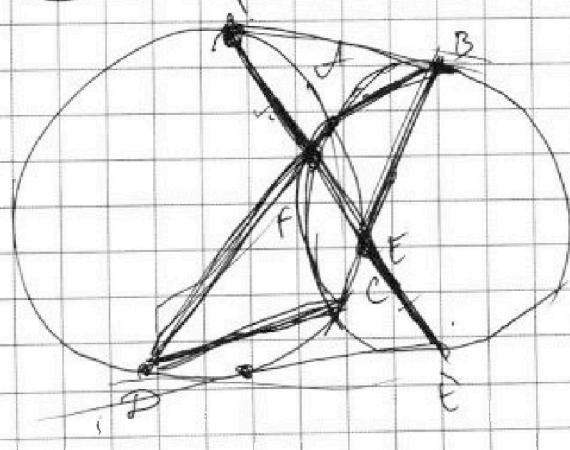
= 1

$$AF \cdot DF = FF' \cdot FE$$

$$CE \cdot EB = FE' \cdot FE$$

$$\frac{AF \cdot DF}{CE \cdot EB} = \frac{FF'}{EE'}$$

$$\frac{AF \cdot FF' \cdot EB}{CE \cdot EE' \cdot DF}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a(a+1) \quad a \in \mathbb{N}$$

$$K = a(a+1)$$

$$x - y = 81 \cdot 10$$

$$a^2 + a - (b^2 + b) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$a^2 - b^2 + a - b = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a - b)(a + b + 1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$a - b$ и $a + b + 1$ — разной четности.

$$1) a - b : 2 \rightarrow \begin{cases} a - b = 2^{2024} \cdot l \\ a + b + 1 = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{HOD}(a - b, a + b + 1) &= \\ &= \text{MHD}(2a + 1, a - b) \\ a = 2 & \quad b = 2 \end{aligned}$$

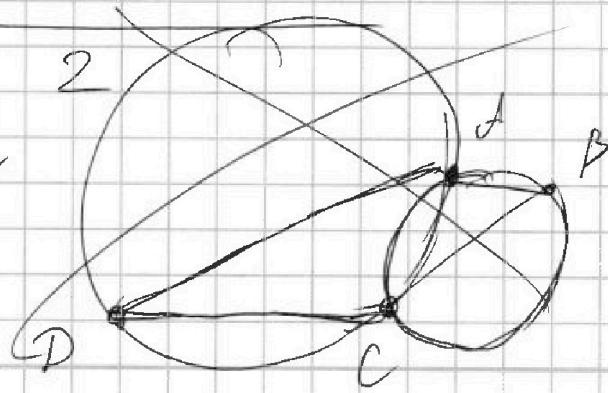
$$2a + 1 = 2^{2024}l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l}$$

$$a = \frac{2^{2024}l + \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1}{2}$$

$$b = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} - 1 - 2^{2024}l$$

$$\frac{81 \cdot 5^{2024}}{l} > 2^{2024}l$$

$$l^2 < 81 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2024}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4x-x^2-3} - 3 \leq$$

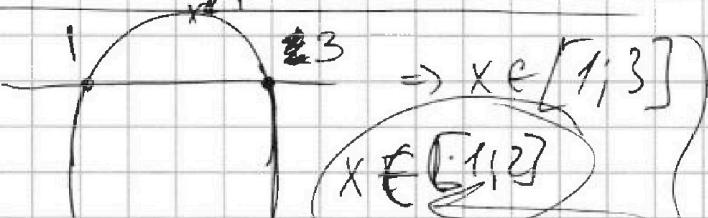
$$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} \geq 0$$

$$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} \leq \sqrt{4x-x^2-3} - 3$$

$$-x^2+4x-3$$

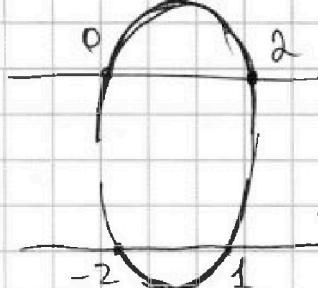
$$D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 3}}{-2}$$



$$\sqrt{2x-x^2} \geq 0$$

$$-x^2+2x \geq 0$$

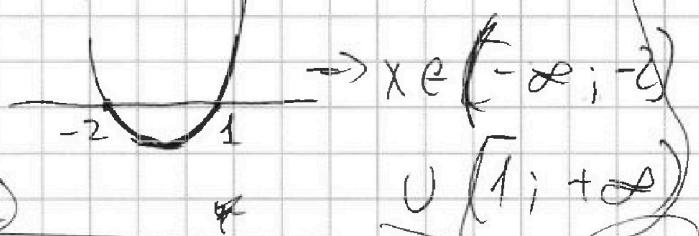


$$\Rightarrow x \in [0;2]$$

$$x^2+x-2 \geq 0$$

$$x_0 = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$-x^2+4x-3; \quad -4+8-3=1$$

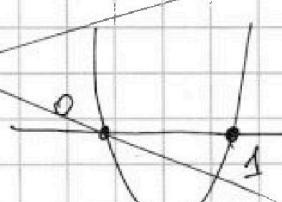


$$\sqrt{4x-x^2-3} \leq 1 \quad \sqrt{2x^2-2} - \sqrt{x^2+x-2} \leq 0$$

$$2x^2-2 \leq x^2+x-2$$

$$x^2-x \leq 0$$

$$x \leq 1: \quad \sqrt{4x-x^2-3} \leq 3$$



$$\Rightarrow x \in [0;1]$$

$$4x-x^2-3 < 9 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2-3} < 0$$

$$\sqrt{2x-x^2} \leq \sqrt{x^2+x-2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \mid x-1 \quad x^2+3x \\
 & \underline{-x^4 - x^3} \quad \underline{x^3 + 7x^2 + 11x - 3} = (-2+\sqrt{5})^2 = \\
 & \hline \quad 7x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \quad 4=0 \quad x^3 + 7x^2 + 11x - 3 = 0 \\
 & \cancel{7x^3 - 7x^2} \quad \cancel{11x^2 - 14x + 3} \quad -27 + 63 - 33 - 3 = 0 \\
 & \cancel{11x^2 - 14x + 3} \quad \cancel{0x^3 + 7x^2 + 11x - 3} \mid x+3 \\
 & \cancel{-32x^2 + 32} \quad \cancel{-x^3 + 3x^2} \quad \cancel{4x^2 + 11x - 3} \\
 & \cancel{-3x + 3} \quad \cancel{0} \quad \cancel{-4x^2 + 12x} \\
 & \cancel{2x - 2} = -6 - 2 = \cancel{\frac{4}{8}} \\
 & \cancel{x^2 + 3x} = 9 - \cancel{4} \quad \text{64} \quad \cancel{x-3} \\
 & \cancel{3x + 4} \quad \cancel{-64} \quad \cancel{x-3} \\
 & \cancel{x + 4x - 12} \quad \cancel{20} \quad \cancel{(2+\sqrt{5})^2 = 4+4\sqrt{5}} \\
 & D = 16 + 4 = 20 \quad \cancel{+5} = \\
 & \cancel{4x^2 + 4x - 12} \quad \cancel{20} \quad \cancel{= 9 + 4\sqrt{5}} \\
 & \cancel{25 + 4\sqrt{5} + 20\sqrt{5}} \quad \cancel{\frac{154 \pm \sqrt{20}}{2}} = -2 \pm \sqrt{5} \\
 & \cancel{-2 + -2 + \sqrt{5}} \quad \cancel{4} \quad \cancel{-2 + \sqrt{5}} \\
 & | -4 + 2\sqrt{5} - 2 | = | 6 + 2\sqrt{5} - 6 - 2\sqrt{5} | \quad | 56 + 24\sqrt{5} \\
 & | x^2 + 3x | = | 9 - 4\sqrt{5} - 6 + 3\sqrt{5} | = 3\sqrt{5} \quad | 14 + 6\sqrt{5} \\
 & | 3x + 1 | = | -6 + \sqrt{5} + 1 | = | -5 + \sqrt{5} | = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{80 + 30\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116} \quad \text{if } x \cdot y \cdot z$$

$$3x^2 + y^2 + z^2 - ? \text{ min}$$

$$(x_1, y_1, z) \text{ yeknee. } \sqrt{3d} = 2\sqrt{8}$$

$$\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$\cancel{x\sqrt{8}} + \cancel{y\sqrt{18}} + z\sqrt{29} = 2(\sqrt{8} + \sqrt{29})$$

$$\begin{array}{r} & 7 \\ & 2 \ 9 \\ \times & 8 \\ \hline 2 \ 3 \ 2 \end{array}$$

$$8(2-x)^2 + 29(2-z)^2 + 2\sqrt{232(2-x)(2-z)}$$

$$y^2 = \frac{18}{37 - 33x + P^2}, \quad 11P = 11G_2 + 11G_3^2$$

$$* y^2 = \frac{2K + 3\sqrt{8} - 3(x + \sqrt{x}) + 11x}{18} \quad (x \geq 2)$$

$$x\sqrt{8} + z\sqrt{29} + y\sqrt{18} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{29} + \sqrt{18} + \sqrt{29} = 0$$

$$4\sqrt{18} = a\sqrt{8} + b\sqrt{20}$$

$$y = \sqrt{\frac{8}{18}} + \sqrt{\frac{25}{18}}$$

$$\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{2g}{18}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{8}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) ~~$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$~~ $x = 1$. $x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. $4+2-2=4$

$\frac{1}{-3} \leq \frac{1}{?}$ $2 > \frac{1+\sqrt{17}}{4} ? > 1$

2) $x \in (1; 2]$. $\sqrt{2x-x^2} \geq \sqrt{x^2+x-2}$ \min

$2x-x^2 \leq x^2+x-2$ $-8-4-3=1$

$\frac{1}{-3} \leq \frac{1}{-2} \quad D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17 \quad D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) =$

$\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{-2} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \quad = 12 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$x \in [1; 2] \quad 1 \leq \frac{\frac{1}{-3}}{-5} \leq \frac{1}{-5}$

$1 \leq \frac{1}{-3} \leq \frac{1}{-5} \quad 5 \leq 3 \quad (-2) \quad (-1)$

$\sqrt{4x-x^2-3} - 3 \leq \sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2}$

$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} \leq \sqrt{4x-x^2-3} - 3$

$f(x) = \sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} \quad x \in [1; 2]$

$\sqrt{2x-x^2} + 3 \leq \sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{4x-x^2-3}$

$f(+)=\sqrt{4x-x^2-3}-3$

$f'(+) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot (4-2x) \geq 0$

$g(x) = \sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2}$

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2-2x) -$

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}} \cdot (2x+1) \leq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2 + a) - (b^2 + b) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) + a - b = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$1) a - b : 2 \Rightarrow a + b + 1 : 2 \quad A/C$$

$$\text{But } A \approx BC \Rightarrow a - b = 2 \cdot 10^{2024}$$

$$a + b + 1 = 81 \cdot \frac{5}{l} \quad t$$

$$l = \boxed{\text{---}} \quad a = \dots, \quad b = \dots$$

$$\text{LCM } l > 5^{1012}, \text{ so } l \geq 3 \cdot 5^{1012} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2024 \cdot l \geq 2^{2024} \cdot 3 \cdot 5^{1012}$$

$$\leq 3 \cdot 5^{1012}$$

$$l^2 \leq 81 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2024}$$

$$BAC_1 = ABC \cos \beta = 6 \cos \alpha \cos \beta$$

$$2) a + b + 1 : 2$$

$$a + b + 1 = 2^{2024} \cdot l$$

$$r = \frac{2}{\cos \alpha \cos \beta}$$

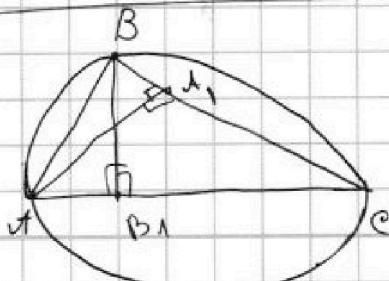
$$a - b = 81 \cdot \frac{5^{2024}}{l}$$

$$AC = 2r \sin \beta$$

$$BAC_1^2 = \frac{AC^2}{4} = r^2 \sin^2 \beta$$

$$r^2 (1 - \sin^2 \beta) = r^2 \cos^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \beta$$



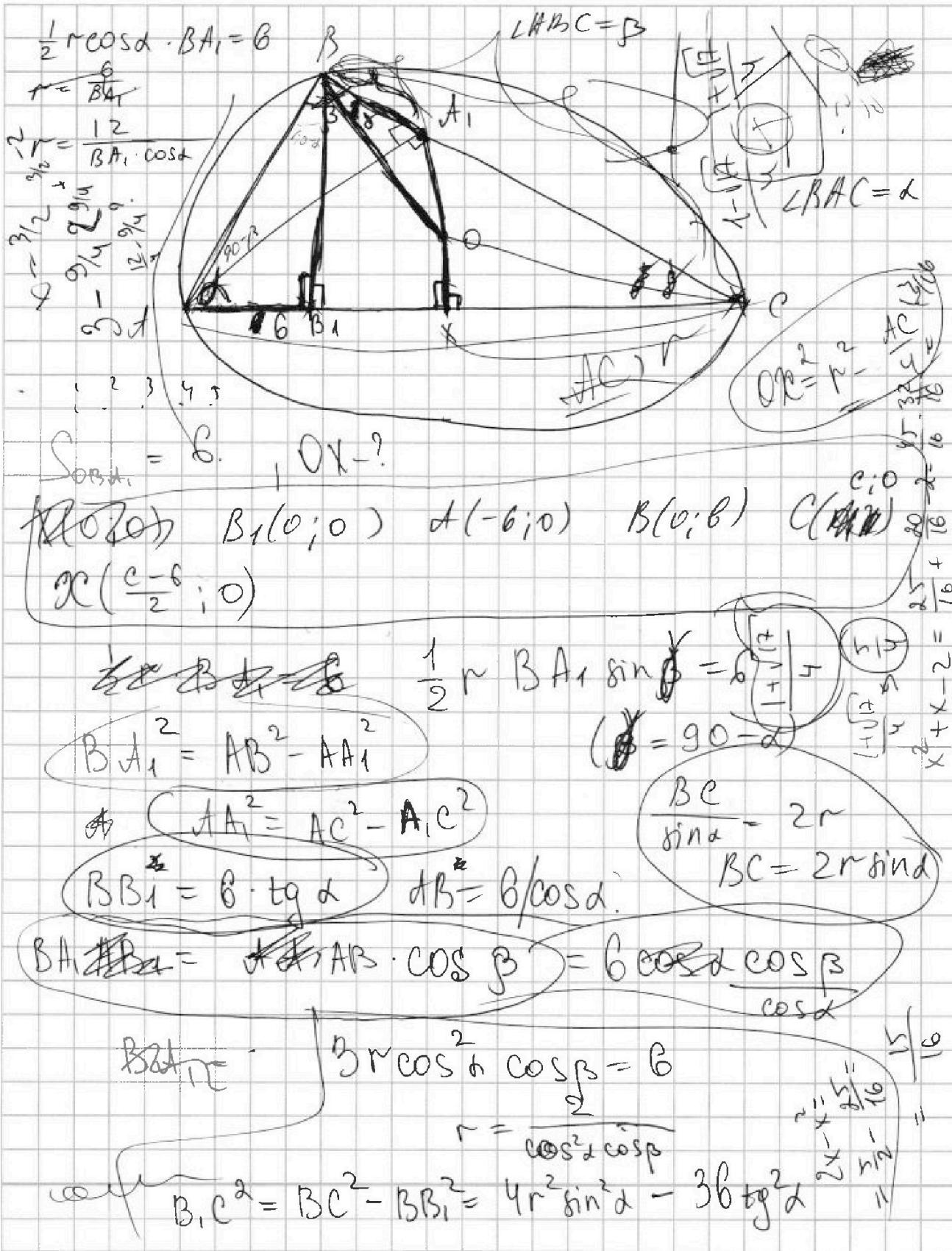


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

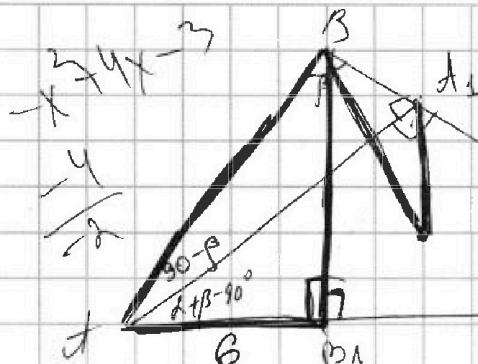


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

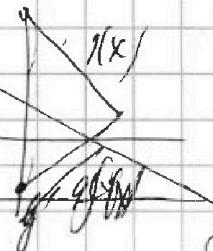
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$44 \quad 1+4+8=12+5+12-8=12-1 \quad R^2 \cos^2 \beta = 0$$



$$\begin{cases} y = 2; x = -1 \\ \text{check need} \\ y = -2; x = 3 \end{cases}$$

$$2) x = 1 - 2y$$

$$x - 4y - y + 2y^2 =$$

$$\begin{aligned} -y^3 + 5y^2 - 3y + 2 &= 0 \\ 1 - 4y + 4y^2 - 2y + 4y^2 &= 0 \\ y^3 - 3y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$BD_1 = b \cos \alpha \cos \beta;$$

$$r = \frac{2}{\cos^2 \alpha \cos \beta}$$

$$AB = b / \cos \alpha$$

$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3xy + dy^2 - 3y + 1 &= 0 \\ (x-y+1)^2 &= x^2 + y^2 + 1 + 2x - dy - 2xy. \end{aligned}$$

$$(x-y+1)^2 - xy + y^2 - y = 0 \quad D = 9 + 4(0) = 9$$

$$(x-y+1)^2 - y(x-y+1) = 0$$

$$(x-y+1)(x-2y+1) = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1 &= 0 \\ x^2 - 2y^2 - y + x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$1) \quad x+y=1. \quad x = 1-y$$

$$1 - 2y + y^2 - 2(1-y)y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$1 - 2y + y^2 - 2y + 2y^2 + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^3 = 4y$$

$$y_{1,2} =$$

$$x = 2$$

$$y = \pm 2$$

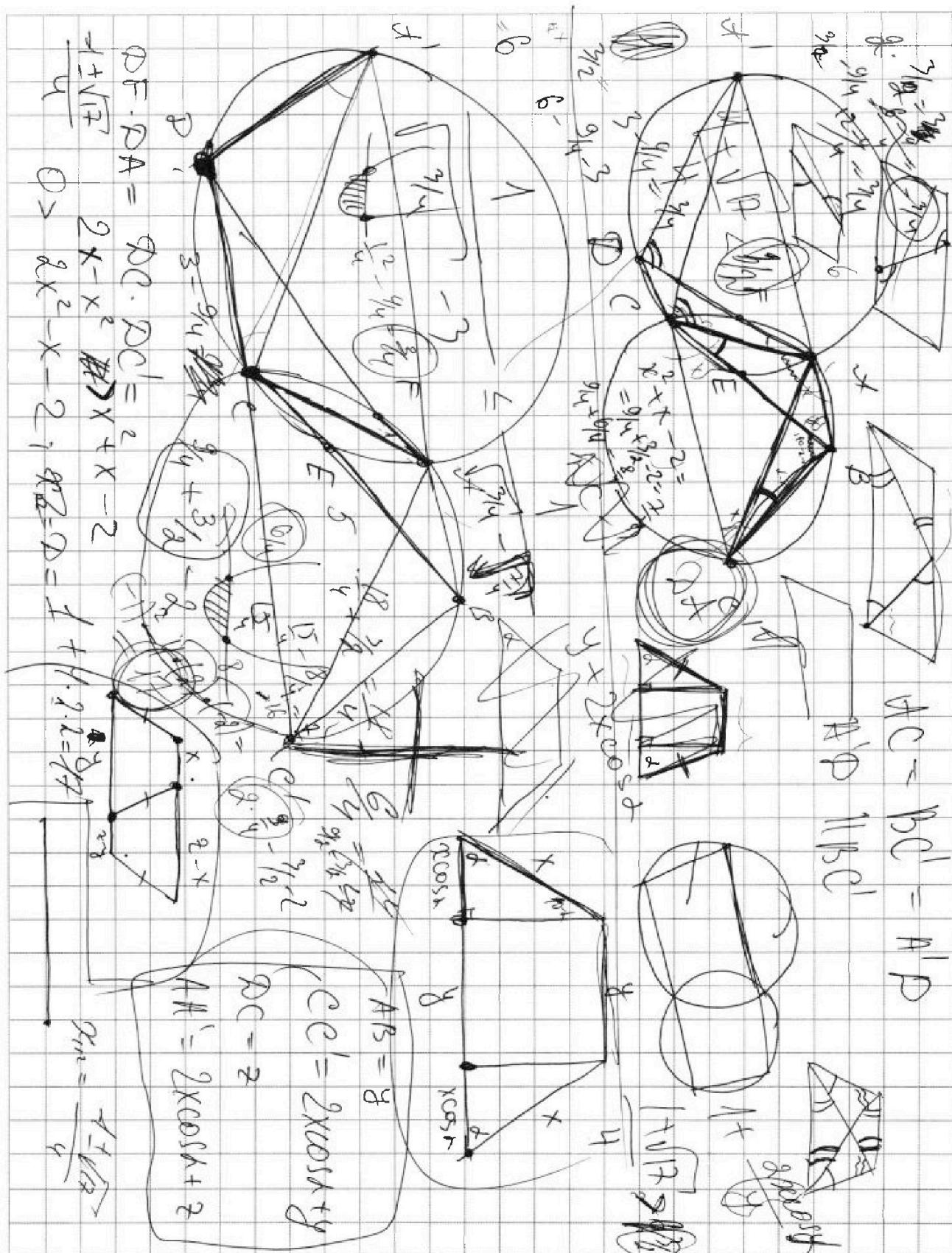


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



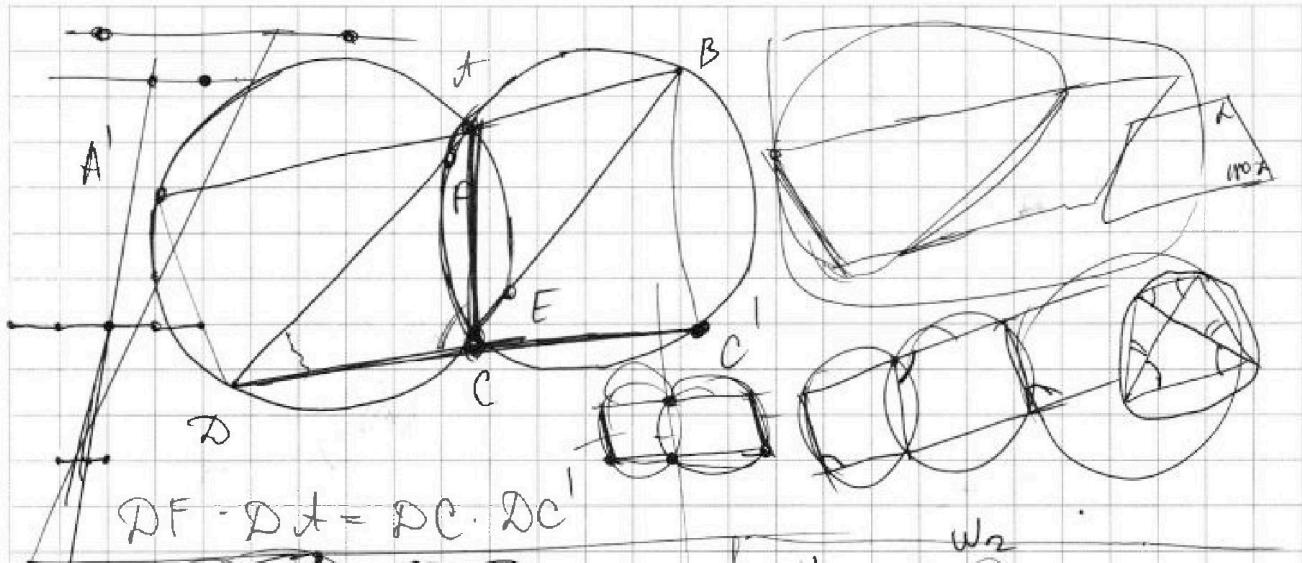


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

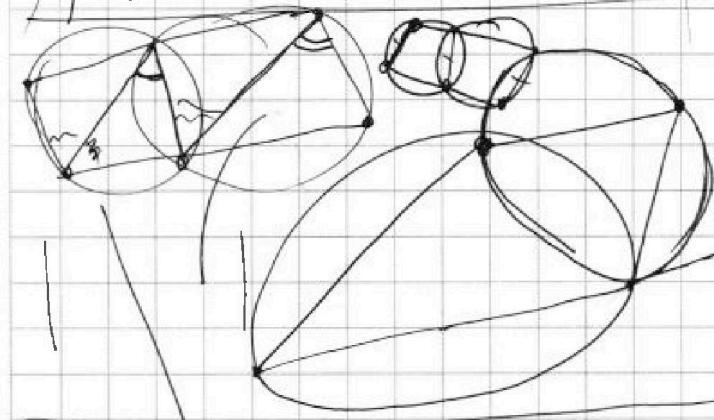
- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

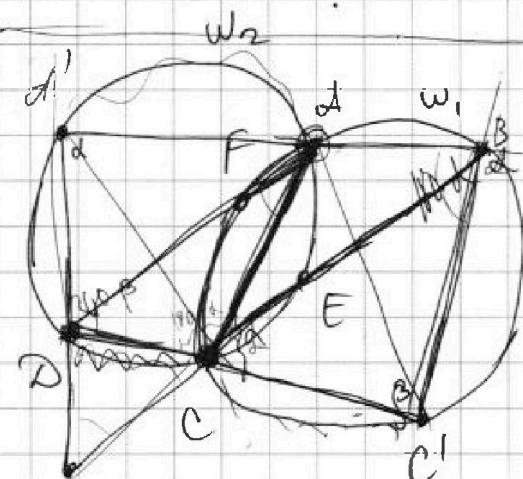


$$DF \cdot DA = DC \cdot DC'$$



$$DF \cdot DA = DC \cdot DC'$$

$$BA \cdot BA' = BE \cdot BC$$



w_2

$$w_2 : 2r$$

$$w_1 : r$$

$$DA = \cancel{DFA} \quad DF = \cancel{DA} - AF$$

$$BE = BC - CE$$

$$\cancel{DA} - AF = DC \cdot \cancel{DC'} - \cancel{PA^2}$$

$$CE = \cancel{BA} \cdot \cancel{BA'} - \cancel{BC^2}$$