



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 16



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x^2 - (4a - 12)x + a^2 - 6a = 0$  имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 3 раза?
2. [5 баллов] Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 35$ ,  $BC = 28$ ,  $AC = 21$ . На стороне  $BC$  отмечено последовательно 27 точек:  $B_1, B_2, \dots, B_{27}$  так, что эти точки разбивают  $BC$  на 28 единичных отрезка. Аналогично, на стороне  $AC$  отмечено последовательно 20 точек:  $A_1, A_2, \dots, A_{20}$  так, что эти точки разбивают  $AC$  на 21 единичный отрезок. Сколько существует треугольников с площадью 13 и вершинами, которые выбираются из точек  $A, A_1, A_2, \dots, A_{20}, B, B_1, B_2, \dots, B_{27}, C$ ?
3. [4 балла]  $AH$  – высота равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AH = MK$ , и  $AK = 7$ .
4. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 288$ .
5. [5 баллов] Остроугольный треугольник  $ABC$  площади 120 вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  – его высоты. Найдите площадь треугольника  $BOA_1$ , если площади треугольников  $COB_1$  и  $AOC_1$  равны 12 и 36 соответственно.
6. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab = 8, \\ \frac{b^3}{a} + 3ab = 16. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) приборов в месяц потребует на первом заводе  $3q^2 + 2q$  тыс.руб., на втором заводе  $3q^2 - q$  тыс.руб., и на третьем  $3q^2$  тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 80 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 200 приборов?

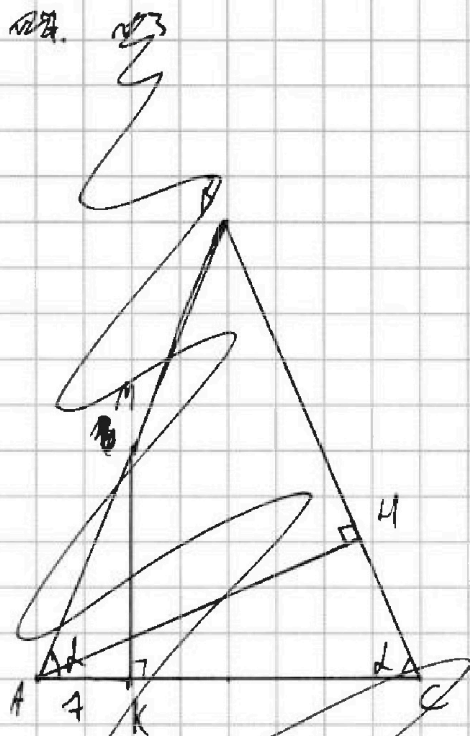


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AM \cdot \cos \alpha = MK$$

$$AC \cdot \cos \alpha = AC \cdot \sin \alpha = AH = MK$$

$$\frac{49}{4} + 28^2 \cdot \sin^2 \alpha = AM^2$$

$$AM^2 \cdot \cos^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~ААА~~  $AC + AB + BC = 28 + 56 + 56 = 140$

Ответ: 140



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{\triangle ACO} + S_{\triangle BOA} + S_{\triangle OCB} = S_{\triangle BOA} + 48 = \frac{120}{2}$$

$$S_{\triangle BOA} = 12$$

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

аналогично ~~до~~

$\triangle ACC_1 \sim \triangle HB_1C$

~~$AC_1 \cdot HC = AB_1 \cdot BH$~~   
 ~~$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{BH}{HC}$~~

$$\frac{AC_1}{B_1H} = \frac{CC_1}{B_1C} = \frac{AC}{HC} \quad (3)$$

$\triangle AC_1B_1 \sim \triangle ABC$

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{C_1B_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} \quad (4) \Rightarrow \frac{BC_1}{AB} = \frac{B_1C}{AC} \Rightarrow AB \cdot B_1C = AC \cdot BC_1$$

$AC_1HB_1$  - вписанный

$$\frac{C_1H}{B_1C} = \frac{AB_1}{HC} \quad (5) \quad \frac{HB_1}{BC_1} = \frac{AC_1}{BH} \quad (6)$$

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{CC_1}{AB_1} = \frac{AC \cdot B_1C}{HC} \cdot \frac{HB_1}{C_1B_1 \cdot AB} = \frac{HB_1}{HC}$$

$\Downarrow$

$$AC_1 \cdot HC = AB_1 \cdot HB_1$$

аналогично

$$BA_1 \cdot HA = BC_1 \cdot HC$$

$$CA_1 \cdot HA = CB_1 \cdot HB$$

$\Downarrow$

$$AH \cdot A_1B_1 + BH \cdot B_1C + CH \cdot C_1A = AH \cdot A_1C + BH \cdot B_1A + CH \cdot C_1B$$

имеет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓

$$q_1 + q_2 + q_3 = 200$$

$$q_1 + q_2 = k = 200 - q_3 \quad q_3 - \text{применяем}$$

$$3q_1^2 + 2q_1 + 3(k - q_1)^2 - (k - q_1) - \text{калькулятор}$$

$$6q_1^2 + 3q_1 - 6q_1k + 3k^2 - k - \text{находим корни в брете}$$

$$q_1 = \frac{2k-1}{4} \quad q_2 = \frac{2k+1}{4}$$

$$q_1 = \frac{400 - 2q_3 - 1}{4} \quad ; \quad q_2 = \frac{400 - 2q_3 + 1}{4}$$

~~400 - 2q\_3~~

$$3 \left( \frac{399 - 2q_3}{4} \right)^2 + 2 \left( \frac{399 - 2q_3}{4} \right) + 3 \left( \frac{401 - 2q_3}{4} \right)^2 - \left( \frac{401 - 2q_3}{4} \right)$$

$$+ 3q_3^2 = aq_3^2 + bq_3 + c$$

$$a = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot 3 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot 3 + 3 = 4.5$$

$$b = - \frac{399}{4} \cdot 3 + -1 - \frac{401}{4} \cdot 3 + \frac{1}{2} = ~~600.5~~ - 600.5$$

$$q_3 = \frac{-b}{2a} = \frac{600.5}{9} \approx 66.7$$

$$q_3 = 67$$

$$q_1 = 66$$

$$q_2 = 67$$

Ответ: 66 на 1 ; 67 на 2 ; 67 на 3.

$$\begin{array}{r} 600.5 \mid 9 \\ 54 \phantom{00} \\ \hline 60 \phantom{00} \\ 54 \phantom{00} \\ \hline 65 \phantom{00} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

$A - \text{середина } C'B'$   
 $B - \text{середина } A'C'$   
 $C - \text{середина } A'B'$   
 $A'C' \parallel AC$   
 $B'C' \parallel BC$   
 $A'B' \parallel AB$

$S_{\Delta A'B'C'} = 4 S_{\Delta}$   
 $AH \cdot BA_1 = CH \cdot AC_1 + BH \cdot BC_1 =$   
 $= AH \cdot CA_1 = CH \cdot BC_1 + BH \cdot$





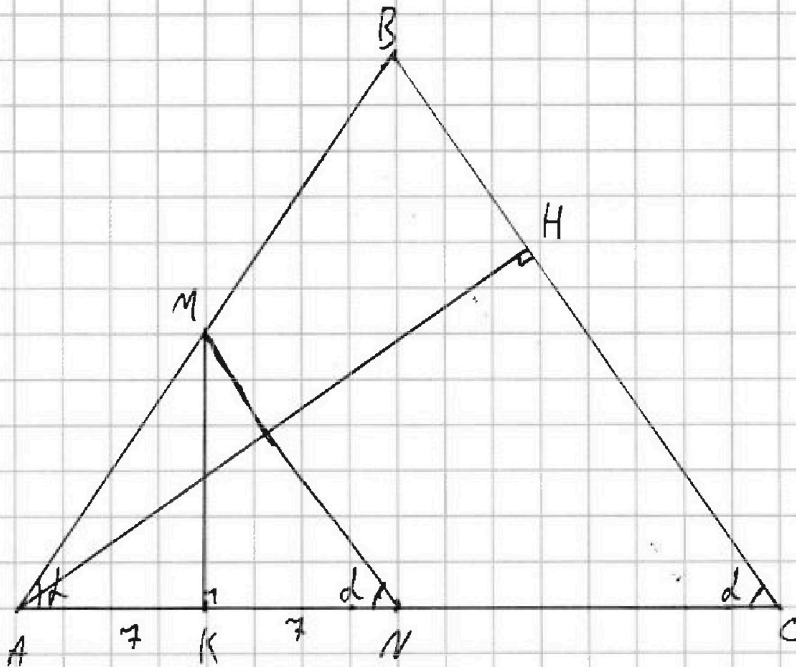
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



$N$  - середина  $AC$

$\Downarrow$

$$AM = MN$$

$K$  - середина  $AN$

$$AN = 14 \Rightarrow AC = 28$$



$$AM \cdot \cos \alpha = 7$$

$$AC \cdot \sin \alpha = AH = MK$$

$$AM^2 = AM^2 \cdot \cos^2 \alpha + AC^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$AM^2 (1 - \cos^2 \alpha) = AC^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$AM^2 = AC^2$$

$$AM = AC = 28$$

$$AB = 2AM = 56$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч

$$M = \{k; k+1; k+2; k+3; k+4\}$$

$$S = 5k + 10$$

$$p = 4k + 10 - a \quad 0 \leq a \leq 4$$

$$q = 4k + 10 - b \quad 0 \leq b \leq 4$$

$$a \neq b$$

$$p > 2$$

$$q > 2 \quad (\text{н.к. } a \leq 4; b \leq 4)$$

$\Downarrow$

$$4k + 10 - a \geq 2$$

$$a \leq 2$$

$$4k + 10 - b \geq 2$$

$$b \leq 2$$

$\Downarrow$

$$a, b \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$a = 1 \quad b = 3$$

$$p = 4k + 9$$

$$q = 4k + 7$$

$$p^2 - q^2 = 16k^2 + 72k + 81 - (16k^2 + 56k + 49) = 288$$

$$16k + 32 = 288$$

$$k = 20$$

$$\text{Ответ: } M = \{20; 21; 22; 23; 24\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{6} \quad \frac{a}{b} &= p \\ ab &= q \end{aligned}$$

$$a^2 = pq$$

$$b^2 = \frac{q}{p}$$

$$\begin{cases} q \cdot p^2 + q = 8 \\ \frac{q}{p^2} + 3q = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q \cdot p^2 + q = 8 \\ q + 3qp^2 = 16p^2 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{16p^2}{1+3p^2}$$

$$\frac{16p^4}{1+3p^2} + \frac{16p^2}{1+3p^2} = 8$$

$$16p^4 + 16p^2 = 8 + 24p^2$$

$$16p^4 - 8p^2 - 8 = 0$$

$$2p^4 - p^2 - 1 = 0$$

$$(p^4 - 1) + (p^4 - p^2) = 0$$

$$(p^2 - 1)(p^2 + 1) + p^2(p^2 - 1) = 0$$

$$(p^2 - 1)(2p^2 + 1) = 0$$

$$2p^2 + 1 > 0$$

⇓

$$p^2 - 1 = 0 \quad \del{p^2 = 1} \quad p^2 = 1 \quad p = \pm 1$$

$$q = \frac{16}{4} = 4$$

$$a^2 = pq = \del{4} \pm 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 \neq -4$$

$$a^2 = 4$$

$$a^2 = 2$$

$$b^2 = \pm 4$$

$$b^2 \neq -4$$

$$b = 2$$

Ответ:  $a = 2$ ;  $b = 2$

проверка:

$$\frac{8}{2} + 4 = 8$$

$$\frac{8}{2} + 12 = 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

$$AB^2 = 7^2 \cdot 5^2$$

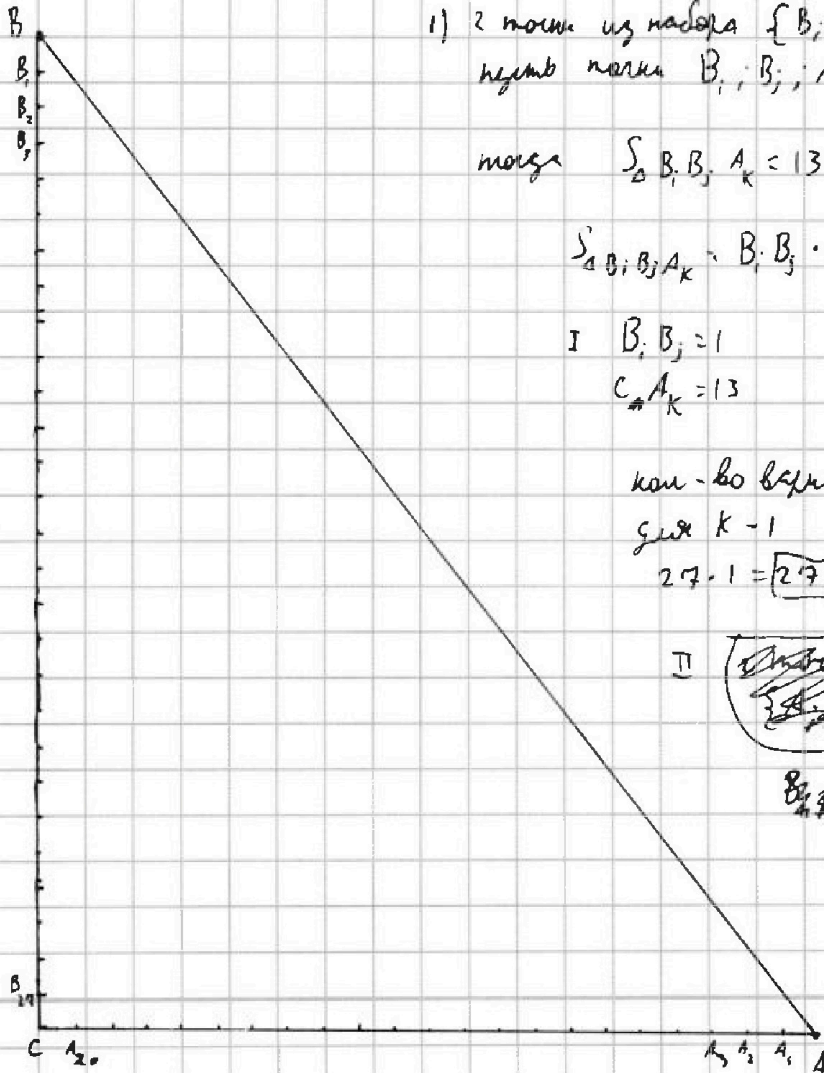
$$BC^2 = 7^2 \cdot 4^2$$

$$AC^2 = 7^2 \cdot 3^2$$

$$AC^2 + BC^2 = 7^2(3^2 + 4^2) = 7^2 \cdot 5^2 = AB^2$$

↓

$$\angle ACB = 90^\circ$$



1) 2 точки из набора  $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{27}\}$   
и одна точка  $B_i, B_j, A_k$  (если есть точка B  
то индекс = 0)

$$\text{тогда } \sum_{\Delta B_i B_j A_k} = 13$$

$$\sum_{\Delta B_i B_j A_k} B_i B_j \cdot CA_k = 13 \quad (B_i, B_j \text{ и } CA_k - \text{цел.})$$

$$I \quad B_i B_j = 1$$

$$CA_k = 13$$

кол-во вариантов для  $i, j = 27$

для  $k = 1$

$$27 \cdot 1 = \boxed{27} \quad (\text{черновик}) \quad \text{для этого случая}$$

II

~~Анализ на наличие~~  
~~...~~

$$B_i B_j = 13$$

$$CA_k = 1$$

аналогично: находим

$$1 \cdot 15 = \boxed{15} \quad (\text{черновик}) \quad \text{для этого случая}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) две точки из набора  $\{A_1, A_2, \dots, A_{20}\}$

аналогично с 1 случаем

I  $A_i, A_j = 1$

кол-во способов =  $\boxed{20}$

II  $A_i, A_j = 13$

кол-во способов =  $\boxed{8}$

3) две точки C

можно две точки  $B_i$  и  $A_j$

5.  $C B_i, A_j = C B_i \cdot C A_j = 13$

I  $C B_i = 13$

$C A_j = 1$

$\boxed{1}$  способ

II  $C B_i = 1$

$C A_j = 13$

$\boxed{1}$  способ

Всего ~~способ~~ способов  $20 + 15 + 20 + 8 + 1 + 1 = 72$

Ответ: 72



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 9$$

$$4x^2 - 24x + 27 = 0 \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{9}{2}\right) \cdot 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{9}{2}$$

~~$x_2 = 3x_1$~~   $x_2 = 3x_1$  (+)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 - (4a - 12)x + a^2 - 6a = 0$$

$$D = (4a - 12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (a^2 - 6a) = 16a^2 - 96a + 144 - 16a^2 + 96a = 144 > 0$$

$$x_1 = \frac{4a - 12 - \sqrt{144}}{4 \cdot 2} = \frac{4a - 24}{4 \cdot 2} = \frac{a - 6}{2}$$

$$x_2 = \frac{4a - 12 + \sqrt{144}}{4 \cdot 2} = \frac{a}{2}$$

$$1) x_1 = 3x_2$$

$$\frac{a - 6}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$a = -3$$

$$2) x_2 = 3x_1$$

$$\frac{a}{2} = \frac{3(a - 6)}{2}$$

$$a = 9$$

Ответ:  $a = -3$ ;  $a = 9$

проверка:

~~$$4x^2 - (4a - 12)x + a^2 - 6a = 0$$~~

~~$$4x^2 - 20x + 6 = 0$$~~

$$a = -3$$

$$4x^2 + 24x + 27 = (x + \frac{9}{2})(x + \frac{3}{2}) \cdot 4 = 0$$

$$x_1 = -\frac{9}{2}$$

$$x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$x_1 = 3x_2 \oplus$$

~~$$4x^2 + 24x + 27 = 0$$~~
~~$$(x + \frac{9}{2})(x + \frac{3}{2})$$~~







На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3q^2 + 2q + 3(k-q)^2 - (k-q)$$

$$6q^2 + 3q + 6qk + 3k^2 - k$$

$$q = \frac{6k-1}{12} = \frac{3k-1}{4} \quad k-q = \frac{2k+1}{4}$$

$$3 \left( \frac{2k-1}{4} \right)^2 + \frac{2k-1}{4} \cdot 2 + 3 \left( \frac{2k+1}{4} \right)^2 - \frac{2k+1}{4}$$

$$3 \cdot \frac{4k^2 - 4k + 1}{4}$$

2

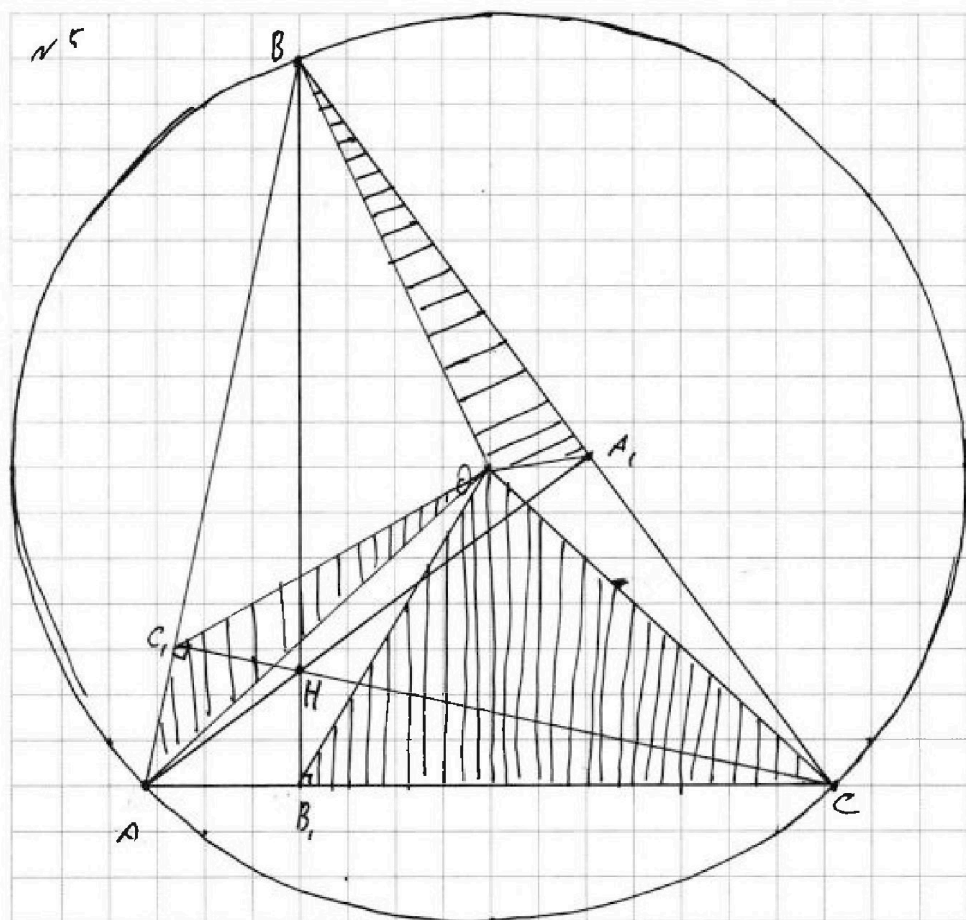


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{учб: } S_{\triangle B O A_1} + S_{\triangle C O B_1} + S_{\triangle A O C_1} = S_{\triangle B O C_1} + S_{\triangle C O A_1} + S_{\triangle A O B}$$

$$S_{\triangle B O A_1} = \frac{1}{2} B A_1 \cdot h = A H \cdot B A_1 \cdot \frac{1}{4}$$

аналогично остальные треугольники

$$A H \cdot B A_1 + B H \cdot B_1 C + C H \cdot C_1 A = A H \cdot C A_1 + B H \cdot A B_1 + C H \cdot C_1 B$$

$$\triangle A B_1 B \sim \triangle A C_1 C \quad (\angle A \text{ общий} \quad \angle B_1 = \angle C_1 = \angle A)$$

$$\boxed{\frac{A C_1}{A B_1} = \frac{C C_1}{B B_1} = \frac{A C}{A B}} \quad (1)$$

$$\triangle B H C_1 \sim \triangle A B B_1 \Rightarrow \boxed{\frac{A B_1}{C_1 H} = \frac{B B_1}{C_1 B} = \frac{A B}{B H}} \quad (2)$$