



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 15



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$  имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?
- [5 баллов] Дан треугольник  $ABC$  такой, что  $AB = 30$ ,  $BC = 24$ ,  $AC = 18$ . На стороне  $BC$  отмечено последовательно 23 точки:  $B_1, B_2, \dots, B_{23}$  так, что эти точки разбивают  $BC$  на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне  $AC$  отмечено последовательно 17 точек:  $A_1, A_2, \dots, A_{17}$  так, что эти точки разбивают  $AC$  на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек  $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$ ?
- [4 балла]  $AH$  – высота равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Точка  $M$  – середина стороны  $AB$ . Из точки  $M$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AH = MK$ , и  $AK = 5$ .
- [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 240$ .
- [5 баллов] Остроугольный треугольник  $ABC$  площади 80 вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – его высоты. Найдите площадь треугольника  $BOA_1$ , если площади треугольников  $COB_1$  и  $AOC_1$  равны 12 и 20 соответственно.
- [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) приборов в месяц потребует на первом заводе  $2q^2$  тыс.руб., на втором заводе  $2q^2 + 2q$  тыс.руб., и на третьем  $2q^2 - q$  тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 - (4a+8)x + a^2 + 4a = 0$$

Пусть первый корень:  $x_1 = t \Rightarrow$  второй корень  $x_2 = 5t$

~~4t^2 - (4a+8)t + a^2 + 4a = 0~~

$$x_2 = 5t \Rightarrow 100t^2 - (4a+8) \cdot 5t + a^2 + 4a = 0 \quad \ominus$$

$$4t^2 - (4a+8)t - 100t^2 + 5t(4a+8) = 0$$

$$\cancel{4t^2} - \cancel{8t} - 96t^2 + 4t(4a+8) = 0$$

1)  $t = 0 \Rightarrow$  ур. не имеет корни  $x_1 = 0$   
 $x_2 = 0 \Rightarrow$  только один корень

$\Rightarrow$  не подходит

$$2) t \neq 0 \Rightarrow -96t^2 + 4t(4a+8) = 0 \quad | : t \neq 0$$

$$-96t + 4(4a+8) = 0$$

$$-24t + 4a + 8 = 0$$

$$-6t + a + 2 = 0$$

$$a = 6t - 2$$

$$\Rightarrow 4t^2 - (4(6t-2)+8)t + (6t-2)^2 + 4(6t-2) = 0$$

$$\underline{4t^2} - \underline{24t^2} + \underline{8t^2} - \underline{8t} + \underline{36t^2} - \underline{24t} + \underline{4} + \underline{24t} - \underline{8} = 0$$

$$\cancel{4t^2} \quad \cancel{8t^2} \quad \cancel{24t} \quad \cancel{24t} \quad \cancel{4} \quad \cancel{8} \Rightarrow 16t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{2} : a = 3 - 2 = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = -\frac{1}{2} : a = -3 - 2 = -5$$

Ответ:  $a = -5$  или  $a = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB^2 = 30^2 = 900$$

$$BC^2 = 24^2 = 576$$

$$AC^2 = 18^2 = 324$$

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 30^2 = 900 \\ BC^2 = 24^2 = 576 \\ AC^2 = 18^2 = 324 \end{array} \right\} \Rightarrow AB^2 = 900 = 576 + 324 = BC^2 + AC^2$$

$\Rightarrow$  по теореме, обратной теореме Пифагора:  $\triangle ABC$  - прямоугольный с  $\angle C = 90^\circ$

~~Пусть вершины прямоугольника так, что  $A_i$  лежит между~~  
Рассмотрим треугольник образованный вершинами  $A_i, B_j$  и  $C$ ,

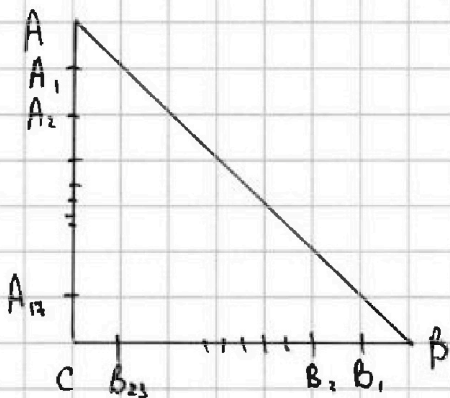
Если  $A_i$  это  $A$ , то  $i = 0$ , если  $B_j$  это  $B$ , то  $j = 0$

$\triangle A_i B_j C$  - прямоугольный с  $\angle C = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle A_i B_j C} = \frac{A_i \cdot B_j \cdot C}{2}$

~~Пусть~~ Пусть вершины прямоугольника так что  $A_1$  лежит между

$A$  и  $A_2$ ,  $A_2$  лежит между  $A_1$  и  $A_3$  и т.д.,  $B_1$  лежит между

$B$  и  $B_2$ ,  $B_2$  лежит между  $B_1$  и  $B_3$  и т.д.



$$\Rightarrow A_i C = 18 - i$$

$$B_j C = 24 - j$$

$$\Rightarrow \frac{(18-i)(24-j)}{2} = S_{\triangle A_i B_j C}$$

Рассмотрим при каком паре  $(i; j)$

$$S_{\triangle A_i B_j C} = 11: \frac{(18-i)(24-j)}{2} = 11$$

$$(18-i)(24-j) = 22$$

$$22 = 1 \cdot 22 = 2 \cdot 11 = 11 \cdot 2 = 22 \cdot 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к.  $j, i \in \mathbb{Z}$  и  $j, i \geq 0$ , то возможны 4 случая:

$$1) \begin{cases} 18 \cdot i = 1 \Rightarrow i = 17 \\ 24 - j = 122 \Rightarrow j = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta A_{17} B_2 C$$

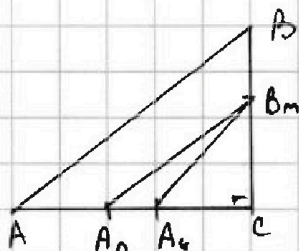
$$2) \begin{cases} 18 \cdot i = 2 \Rightarrow i = 16 \\ 24 - j = 11 \Rightarrow j = 13 \end{cases} \Rightarrow \Delta A_{16} B_{13} C$$

$$3) \begin{cases} 18 \cdot i = 11 \Rightarrow i = 7 \\ 24 - j = 2 \Rightarrow j = 22 \end{cases} \Rightarrow \Delta A_7 B_{22} C$$

$$4) \begin{cases} 18 \cdot i = 21 \Rightarrow i = 7 - 6 \Rightarrow i < 0 \Rightarrow \text{не может быть} \\ 24 - j = 21 \Rightarrow j = 23 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Возможны 3 треугольника:  $\Delta A_{17} B_2 C$ ;  $\Delta A_{16} B_{13} C$ ;  $\Delta A_7 B_{22} C$

Соединив <sup>вершины</sup> ~~вершины~~ 2 точки  $A_n$  и  $A_k$  треугольника можно получить, соединив их еще и с  $B_m$  ( $C - A_n - A_k \Rightarrow \Delta A_n A_k C$  нет)



$$\Rightarrow S_{\Delta A_n A_k B_m} = \frac{B_m C \cdot A_n A_k}{2}$$

$$B_m C = 24 - m$$

$$A_n A_k = k - n$$

$$\Rightarrow \frac{(24 - m)(k - n)}{2} = 11 \Rightarrow (24 - m)(k - n) = 22$$

Возможны 4 случая:

$$1) \begin{cases} 24 - m = 1 \Rightarrow m = 23 \\ k - n = 22 \Rightarrow k = 22 + n \Rightarrow k > 22 \Rightarrow A_k \text{ не существует} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 24 - m = 2 \Rightarrow m = 22 \\ k - n = 11 \Rightarrow k = 11 + n \Rightarrow k \in [11; 17], n \in [0; 6] \end{cases} \Rightarrow \text{возможно 7 треугольников}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 24 - m = 11 \Rightarrow m = 13 \\ k - n = 2 \Rightarrow k = n + 2 \Rightarrow k \in [2; 15], n \in [0; 13], \text{ где каждого } k - \text{одно значение} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

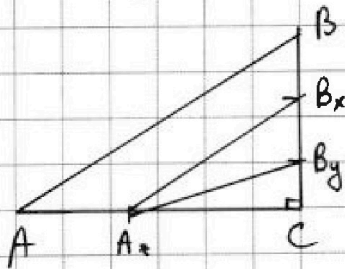
$\Rightarrow$  возможно 16 треугольников

$$4) \left\{ \begin{array}{l} 24 - m = 2 \Rightarrow m = 2 \\ k - n = 1 \Rightarrow k = n + 1 \Rightarrow k \in [1; 17], n \in [0; 16], \text{ где каждого } k - \text{одно значение} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$  возможно 17 треугольников

$\Rightarrow$  возможно 40 треугольников в виде  $A_1 A_2 B_m$

Соединив 2 точки  $B_x$  и  $B_y$  треугольник не получится в том случае, если соединит их с  $A_2$  ( $C - B_x - B_y \Rightarrow \Delta B_x B_y C$  - нет)



$$\Rightarrow S_{\Delta A_2 B_x B_y} = \frac{A_2 C \cdot B_x B_y}{2} = 11$$

$$B_x B_y = y - x$$

$$A_2 C = 18 - z$$

$$\Rightarrow \frac{(18-z)(y-x)}{2} = 11 \Rightarrow (18-z)(y-x) = 22$$

Возможна 4 случая:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 1 \Rightarrow z = 17 \\ y - x = 22 \Rightarrow y = 22 + x \Rightarrow y \in [22; 23], x \in [0; 1], \text{ где каждого } x - \end{array} \right\} \Rightarrow$$

одно значение  $y$

$\Rightarrow$  возможно 2 треугольника

$$2) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 2 \Rightarrow z = 16 \\ y - x = 11 \Rightarrow y = 11 + x \Rightarrow y \in [11; 23], x \in [0; 12], \text{ где каждого } x - \end{array} \right\} \Rightarrow$$

два значения  $y$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
9 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  Возможно 13 треугольников

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 11 \Rightarrow z = 7 \\ \text{так } y - x = z \Rightarrow y = x + z \rightarrow y \in [0; 23], x \in [0; 7], \text{ для каждого } y - \text{одно} \\ \text{значения } x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Возможно 22 треугольника

$$4) \left\{ \begin{array}{l} 18 - z = 22 \Rightarrow z = -4 < 0 \Rightarrow \text{не может быть} \\ y - x = 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  Возможно 37 треугольников вида  $A_2 B_x C_y$

$\Rightarrow$  Всего  $3 + 37 + 40 = 80$  треугольников. может быть с площадью  $11$

Ответ: 80 треугольников

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



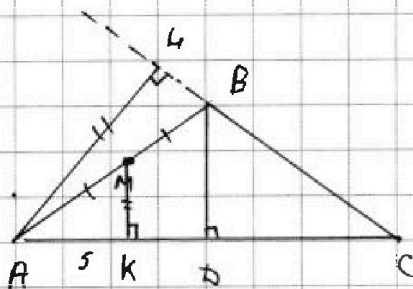
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возможны 3 случая:  $\triangle ABC$  - тупоугольный  
 $\triangle ABC$  - прямоугольный  
 $\triangle ABC$  - остроугольный

1)  $\triangle ABC$  - тупоугольный



Пусть  $MK = AH = x \Rightarrow \triangle AMK$  - прямоугольный  $\Rightarrow$  по т. Пифагора:

$$AM^2 = AK^2 + MK^2 = 25 + x^2 \Rightarrow AM = \sqrt{25 + x^2}$$

$$M - \text{середица} \Rightarrow AM = MB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = 2AM = 2\sqrt{25 + x^2} = BC$$

$$\triangle AHB - \text{прямоугольный} \Rightarrow \text{по т. Пифагора: } AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$x^2 + BH^2 = 100 + 4x^2$$

$$BH^2 = 100 + 3x^2$$

$$BH = \sqrt{100 + 3x^2}$$

$$HC = BC + BH = \sqrt{100 + 3x^2} + 2\sqrt{25 + x^2}$$

Проведем высоту  $BD$  в  $\triangle ABC \Rightarrow BD$ , медиана,  $BD \perp AC$

$$BD - \text{медиана} \Rightarrow AD = DC$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ MK \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel MK \left. \vphantom{\begin{array}{l} BD \perp AC \\ MK \perp AC \end{array}} \right\} \Rightarrow MK - \text{средняя линия } \triangle ABD \Rightarrow AK = KD = 5$   
 $MP - \text{средняя } AB$

$$\Rightarrow AD = 10 \Rightarrow AC = AD + CD = 2AD = 20$$

$\triangle AKC$  - прямоугольный  $\Rightarrow$  по т. Пифагора:  $AC^2 = KC^2 + AK^2$

$$400 = x^2 + (\sqrt{100 + 3x^2} + \sqrt{25 + x^2})^2$$

$$400 = x^2 + 100 + 3x^2 + 100 + 4x^2 + 4\sqrt{2500 + 75x^2 + 100x^2 + 3x^4}$$

$$400 = 8x^2 + 200 + 4\sqrt{2500 + 75x^2 + 3x^4}$$

$$200 - 8x^2 = 4\sqrt{2500 + 175x^2 + 3x^4}$$

$$50 - 2x^2 = \sqrt{2500 + 175x^2 + 3x^4}$$

$$2500 + 4x^4 - 100x^2 = 2500 + 175x^2 + 3x^4$$

$$x^4 - 275x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 275) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 - 275 = 0 \Rightarrow x^2 = 275$$

$$AB = \sqrt{25 + 275} = \sqrt{300} = 20\sqrt{3} = BC$$

$$AP = AB + BC + AC = 20\sqrt{3} + 20\sqrt{3} + 20 = 20 + 40\sqrt{3}$$

2)  $\triangle ABC$  - прямоугольный  $\Rightarrow$  т.Ковалева с т.В

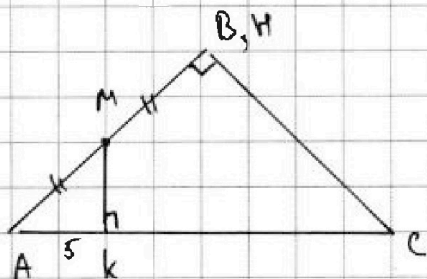


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

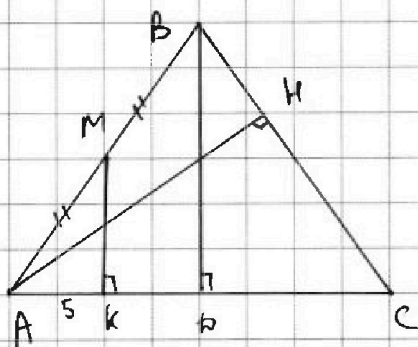


$$AM > MK \Rightarrow BM + AM > MK \Rightarrow AB > MK \Rightarrow AK > MK$$

$$\Rightarrow AK > MK \Rightarrow \text{не является} \Rightarrow$$

$\triangle ABC$  - не прямоугольный

3)  $\triangle ABC$  - остроугольный



$$\text{Пусть } MK = AH = y$$

$\triangle AKM$  - прямоугольный  $\Rightarrow$  по т. Пифагора:

$$AM^2 = AK^2 + MK^2 = 25 + y^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{25 + y^2}$$

$$M - \text{середина} \Rightarrow AM : BM = \frac{1}{2} AB$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{25 + y^2} = BC$$

По т. Пифагора для  $\triangle ABH$ :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$4 \cdot (25 + y^2) = BH^2 + y^2 \Rightarrow BH^2 = 100 + 3y^2 \Rightarrow BH = \sqrt{100 + 3y^2}$$

$$HC = BC - BH = 2\sqrt{25 + y^2} - \sqrt{100 + 3y^2}$$

Проведем высоту  $BD$  ~~в~~  $\triangle ABC$   $\Rightarrow BD$  - медиана,  $BD \perp AC$

$$\Rightarrow AD = DC$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ MK \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel MK \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow MK - \text{средняя линия } \triangle ABD$$

ТМ - середина AB

$$\Rightarrow AK = KD = 5$$

$$\Rightarrow AD = AK + KD = 10 \Rightarrow AC = AD + CD = 2AD = 20$$

$\triangle AKC$  - прямоугольный  $\Rightarrow$  по т. Пифагора:  $AC^2 = AK^2 + KC^2$

$$400 = y^2 + (2\sqrt{25+y^2} + \sqrt{100+3y^2})^2$$

$$400 = y^2 + 100 + 4y^2 + 100 + 3y^2 - 4\sqrt{(25+y^2)(100+3y^2)}$$

$$200 - 8y^2 = -4\sqrt{2500 + 100y^2 + 75y^2 + 3y^4} \quad | : (-4) \neq 0$$

$$2y^2 - 50 = \sqrt{2500 + 175y^2 + 3y^4}$$

$$2500 + 4y^4 - 200y^2 = 2500 + 175y^2 + 3y^4$$

$$y^4 - 375y^2 = 0$$

$$y^2(y^2 - 375) = 0$$

$$y \neq 0 \Rightarrow y^2 - 375 = 0 \Rightarrow y^2 = 375$$

$$AB = 2\sqrt{25+375} = 2\sqrt{400} = 40 = BC$$

$$P = AB + BC + AC = 40 + 40 + 20 = 100$$

Периметр равен

Ответ:  $\sqrt{100}$  или  $20 + 40\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $M = \{a+2; a+1; a; a-1; a-2\}$

Возможны 45 вариантов сумм:

$$1) S_1 = a+2+a+1+a+a-1 = 4a+2$$

~~$$S_1 = a+2 \geq 1 \Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow 4a+2 \neq 2 \Rightarrow 4a+2 \geq 12, 4a+2 \geq 2$$~~

$\Rightarrow 4a+2$  - не простое  $\Rightarrow$  не подходит

$$2) S_2 = (a+2)+(a+1)+(a)+(a-2) = 4a+1$$

$$3) S_3 = (a+2)+(a+1)+(a-1)+(a-2) = 4a$$

$a \neq 0 \Rightarrow 4a : 4 \Rightarrow S_3$  - не простое  $\rightarrow$  не подходит

$$4) S_4 = (a+2)+(a)+(a-1)+(a-2) = 4a-1$$

$$5) S_5 = (a+1)+(a)+(a-1)+(a-2) = 4a-2$$

$$a \geq 3 \Rightarrow 4a-2 \geq 10 \Rightarrow 4a-2 \neq 2 \text{ так как } \left. \begin{array}{l} 4a-2 \geq 10 \\ 4a-2 \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a-2 \text{ - не простое}$$

$\Rightarrow S_5$  - не простое  $\Rightarrow$  не подходит

$\Rightarrow$  Пусть  $p$  и  $q$  подходят только 2 суммы  $S_2 = 4a+1$  и  $S_4 = 4a-1$

$$\left. \begin{array}{l} p^2 - q^2 = 240 \Rightarrow p^2 - q^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 > q^2 \\ p, q > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p > q$$

$$\begin{array}{l} 4a+1 > 4a-1 \Rightarrow \\ p = 4a+1 \Rightarrow p^2 = 16a^2 + 8a + 1 \\ q = 4a-1 \Rightarrow q^2 = 16a^2 - 8a + 1 \end{array}$$

$$p^2 - q^2 = 16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 + 8a - 1 = 16a = 240 \Rightarrow a = 15$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$

$$\text{Ответ: } M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a$  приборов - выпустил I завод,  $b$  - II завод,  $c$  - III завод  
 $\Rightarrow$  ~~250 - a - b~~  $c = 250 - a - b$

$\Rightarrow$  Затраты:  $2a^2 + 2b^2 + 2c +$   ~~$2(250 - a - b)^2$~~

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c + 2c^2 - c$$

$$a + b + c = 250$$

~~$2a^2 + 2b^2 + 2c + 2(250 - a - b)^2$~~        ~~$2a^2 + 2b^2 + 2c + 2c^2 - c$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 \end{cases}$$

ОДЗ:  $a, b \neq 0$

Пусть  $\frac{a^2}{b^2} = x$ ,  $ab = y \Rightarrow x, y \neq 0$

$$\frac{a^3}{b} = \frac{a^2}{b^2} \cdot ab = xy$$

$$\frac{b^3}{a} = \frac{b^2}{a^2} \cdot ab = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy - 2y = 4 = y(x-2) & (1) \\ \frac{y}{x} - 3y = 8 = y(\frac{1}{x}-3) & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)}, \quad \frac{y(x-2)}{y(\frac{1}{x}-3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{x-2}{\frac{1}{x}-3}$$

$$\Rightarrow 2x - 4 = \frac{1}{x} - 3$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 2x - 4 = \frac{1}{x} - 3 \quad | \cdot x$$

$$2x^2 - 4x = 1 - 3x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$2 - 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow (1-2)y = -y = 4 \Rightarrow y = -4$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}-2)y = -\frac{5}{2}y = 4 \Rightarrow y = -\frac{8}{5}$$

$$1) x = 1, y = -4: \frac{a^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) a = b \Rightarrow y = ab = b^2 = -4 \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$b) a = -b \Rightarrow y = -b^2 = -4 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$b = 2: a = -2 \Rightarrow (-2; 2) - \text{решение}$$

$$b = -2: a = 2 \Rightarrow (2; -2) - \text{решение}$$

$$2) x = -\frac{1}{2}, y = -10$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{не может быть}$$

Ответ:  $(-2; 2)$  и  $(2; -2)$



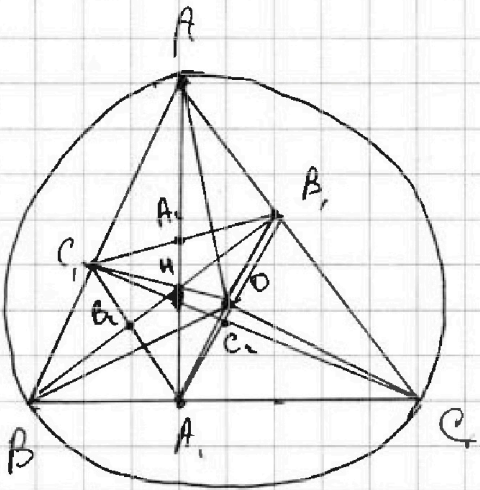


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сведем  $\triangle A_1 B_1 C_1$

Опишем окружность около  $\triangle A_1 B_1 C_1$

$\triangle A_1 B_1 C_1$  - ортоцентрический  $\rightarrow \omega$  - окружность девяти точек

пусть  $BB_1 \cap A_1 C_1 = T_{B_2}$   
 $AA_1 \cap B_1 C_1 = T_{A_2}$   
 $CC_1 \cap A_1 B_1 = T_{C_2}$

$AA_1 \cap BB_1 \cap AA_1 = T_H$

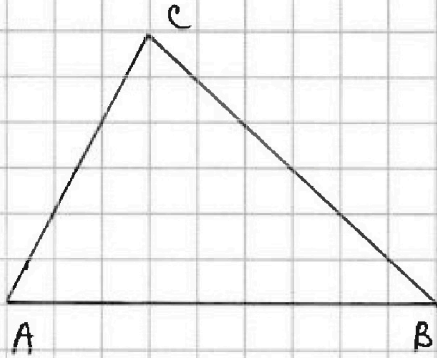


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 \end{cases} \begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c}{d}; ab = d \quad \begin{array}{l} c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot ab = \frac{a^3}{b} = cd$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot ab = \frac{b^3}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\begin{cases} cd - 2cd = 4 \\ \frac{d}{c} - 3d = 8 \end{cases}$$

$$(c-2)d = 4 \quad | c \neq 2$$

$$d = \frac{4}{c-2}$$

$$\frac{4}{c^2-2c} - 3 \frac{4}{c-2} = 8$$

$$\frac{4 - 12 - 4c^2 + 16c}{c(c-2)} = 0$$

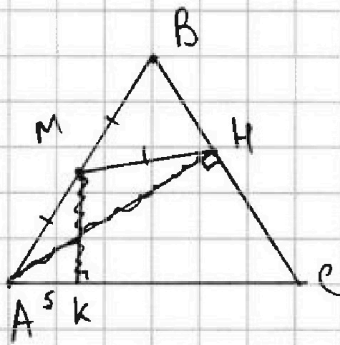
$$\frac{4c^2 + 16c - 8}{c(c-2)} = 0$$

$$\frac{4(c^2 + 2c - 1)}{c(c-2)} = 0$$

$$c \neq 0 \Rightarrow c^2 + 2c - 1 = 0$$

$$c \neq 2$$

$$\Rightarrow c = -1 \pm \sqrt{2}$$



$$c = -1 - \sqrt{2}; d = \frac{4}{-3 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{+4(\sqrt{2} - 3)}{-(2-9)} = \frac{4(\sqrt{2} - 3)}{7}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{-3 - \sqrt{2}}$$

$$ab = \frac{4(\sqrt{2} - 3)}{7}$$

$$a^2 b^2 = \frac{16}{49} (\sqrt{2} - 3)^2$$

$$a^4 = (-1 - \sqrt{2}) (\sqrt{2} - 3)^2 \frac{16}{49}$$

$$= (-1 - \sqrt{2}) (9 - 6\sqrt{2}) \frac{16}{49} = (-1 - 5\sqrt{2}) \quad 3\sqrt{2} = 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$$

$$x_1 = t$$

$$x_2 = 5t$$

$$\begin{cases} 4t^2 - 4ta - 8t + a^2 + 4a = 0 \\ 100t^2 - 20at - 340t + a^2 + 4a = 0 \end{cases} \ominus$$

$$96t^2 - 4at - 8t - 100t^2 + 20at + 40t = 0$$

$$-4t^2 + 16at + 32t = 0$$

$$t^2 - 4at + 8t = 0$$

$$t(t - 4a + 8) = 0$$

$$1) t = 0 \rightarrow \text{корень один}$$

$$2) t = 8 + 4a \Rightarrow 4(64 + 64a + 16a^2) - 4(8 + 4a)a - 8 = (8 + 4a) + a^2 + 4a = 0$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ -48 \\ \hline 148 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ -16 \\ \hline 48 \end{array} \quad + \begin{array}{r} 148 \\ -48 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 + 256a + 64a^2 - 32a - 16a^2 - 64 - 32a + a^2 + 4a = 0 \\ \hline 49a^2 + 196a + 192 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ -64 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\frac{D}{4} = 98^2 - 49 \cdot 192 = 49 \cdot 49 \cdot 4 - 49 \cdot 192 =$$

$$49a^2 + 49 \cdot 4a + 192 = 0 = 49(196 - 192) = 49 \cdot 4 = 196$$

$$\begin{array}{r} 196 \quad | \quad 49 \\ 196 \quad | \quad 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 98 \\ \times 9 \end{array}$$

$$a_1 = \frac{-98 + 14}{49} = -2 + \frac{2}{7} = -1\frac{5}{7}$$

$$a_2 = \frac{-98 - 14}{49} = -2 - \frac{2}{7} = -2\frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{l} 29 \\ 29^2 + 29^2 + 29 + 29^2 + 29 + 29^2 - 9 - 9 - 9 \\ 29^2 + 29 + 29^2 - 9 - 49^2 + 9 \\ 69^2 + 9 \end{array}$$

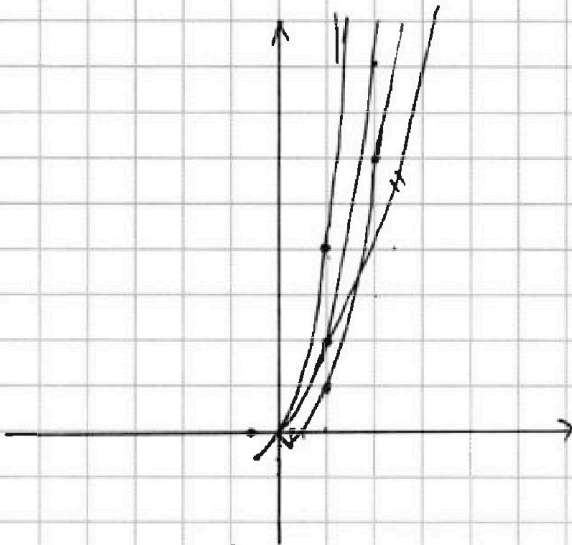


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

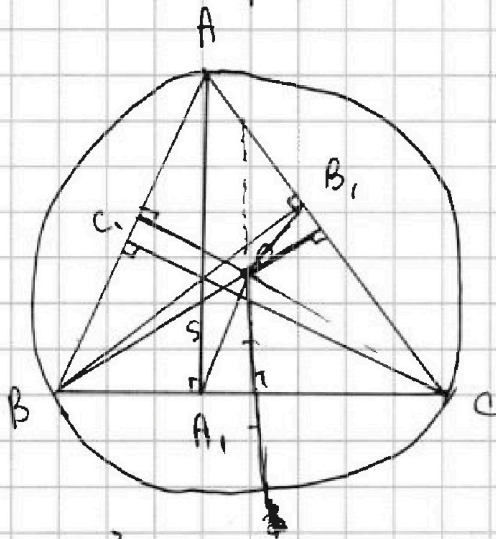


$$\frac{2}{\sqrt{4}} - 1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f^{-2}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 576 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

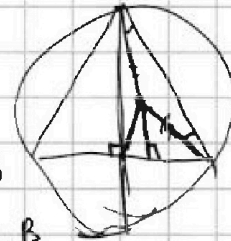


$$S_{\triangle O_1 A_1} = \frac{S_{\triangle O_1 B C}}{2} \cdot BA_1$$

$$BA_1 = \frac{2S_{\triangle A A_1 B}}{AA_1}$$

$$S_{\triangle A A_1 B} = \frac{S_{\triangle A B C}}{2} \cdot AB$$

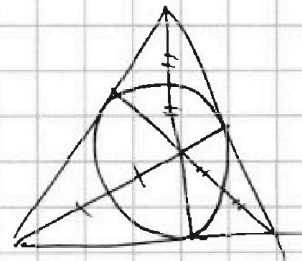
$$S_{\triangle O_1 A_1 B} = \frac{2S_{\triangle A B C} \cdot A_1 B}{AA_1^2}$$



$$AA_1^2 = 160 \rightarrow AA_1 = 4\sqrt{10}$$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AB \cdot BB_1}{AC}$$

$$\frac{S_{\triangle O_1 B A_1}}{S_{\triangle O_1 A_1 B}} = \frac{A_1 B}{A_1 C}$$



$$29^2 + 89$$

$$29^2 - 9$$

$$29^2$$

$$\sqrt{\frac{R + OA_1 + BA_1}{2}}$$



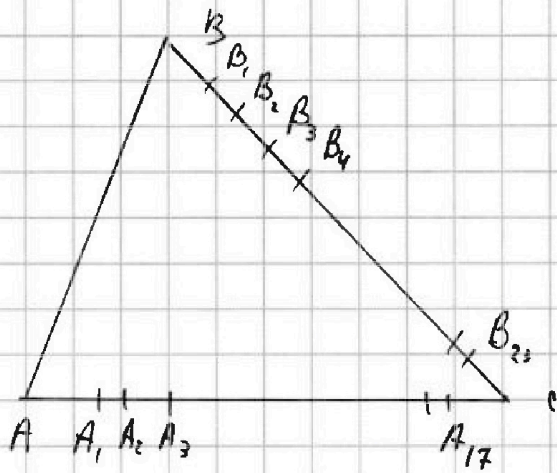
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6-3



A; B; C

$$\frac{(24-j)(18-i)}{2} = 11$$

$$(24-j)(18-i) = 22$$

$$24-j = 1 : 18-i = 22$$

$$j = 23 \quad i = 4$$

$$24-j = 2 : 18-i = 11$$

$$j = 22 \quad i = 7$$

$$24-j = 11 : 18-i = 2$$

$$j = 13 \quad i = 16$$

$$24-j = 22 : 18-i = 1$$

$$j = 2 \quad i = 17$$

$$I - 2q^2$$

$$II - 2q^2 + 2q$$

$$III - 2q^2 - 9$$

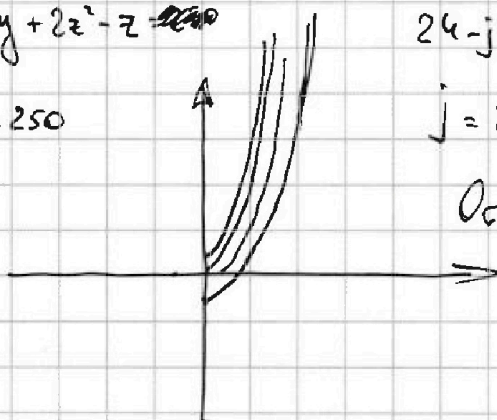
$$-\frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - z = 200$$

$$x + y + z = 250$$

$$III \quad 200$$



Ответ: 4

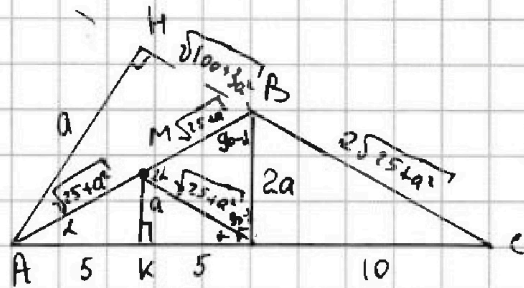
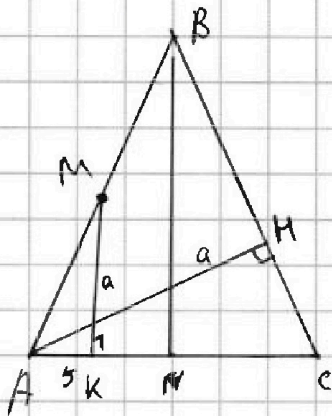


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$P = 4\sqrt{25+a^2} + 20 =$$

$$= 4\sqrt{400} + 20 = 100$$

$$100 + 4a^2 - a^2$$

$$2a = \frac{1}{2}\sqrt{\quad}$$

$$25+a^2 + 25+a^2 - 2\cos\alpha \cdot (25+a^2) = 4a^2$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{2a}{2\sqrt{25+a^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{2\sqrt{25+a^2}}$$

$$2\cos\alpha \cdot (25+a^2) = 50 - 2a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{25+a^2}{25+a^2}$$

$$a^2 + 100 + 3a^2 + 100 + 4a^2 + 4\sqrt{(100+3a^2)(25+a^2)}$$

$$= 400$$

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{(25+a^2)^2}{(25+a^2)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{(25+a^2)^2 - (25+a^2)^2}{(25+a^2)^2}} =$$

$$2a^2 + 200 + 4\sqrt{2500 + 175a^2 + 3a^4} = 400$$

$$\sqrt{2500 + 175a^2 + 3a^4} = 50 - 2a^2$$

$$= \sqrt{\frac{+2a^2(50)}{(25+a^2)^2}} = \frac{10a}{25+a^2}$$

$$2500 + 175a^2 + 3a^4 = 2500 + 4a^2 - 200a^2$$

$$375a^2 - a^4 = 0 \Rightarrow a^2(a^2 - 375) = 0 \Rightarrow a = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$$

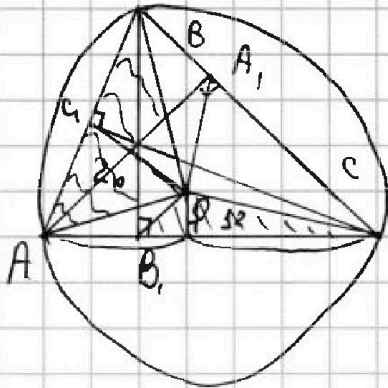


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$OB = OA = OC = \frac{abc}{4S}$$

$$M = \{a-2; a-1; a; a+1; a+2\}$$

$$(p-q)(p+q) \cdot 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$p-q \geq 2$$

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤
- ⑥
- ⑦

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 4a+2 \\
 S_2 &= 4a+1 \\
 S_3 &= 4a \\
 S_4 &= 4a-1 \\
 S_5 &= 4a-2
 \end{aligned}$$

$p-q \div 2, p+q \div 2$

	1	2	3	4	5
1	-	1	2	3	4
2		-	1	2	3
3			-	1	2
4				-	3
5					-

$$1) p = S_1; q =$$

$$(4a+2 - 4a-1) \cdot (4a+2 + 4a+1)$$

$$\begin{aligned}
 f_{a+3} \\
 f_{a+1} \\
 f_{a-1} \\
 f_{a-3}
 \end{aligned}$$

$$1 (f_{a+3}) = 240$$

$$f_{a+4} = 30$$

$$\begin{aligned}
 f_{a+2} \\
 f_a \Rightarrow S_2 + S_4 \Rightarrow a = 15 \\
 f_{a-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{a+2} \\
 f_{a-1}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17}$$