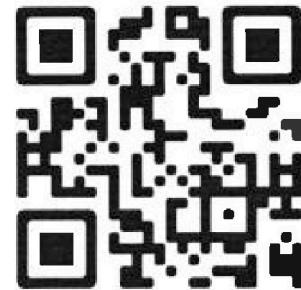


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 15

- [3 балла] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?
- [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB = 30$, $BC = 24$, $AC = 18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: B_1, B_2, \dots, B_{23} так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: A_1, A_2, \dots, A_{17} так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек $A, A_1, A_2, \dots, A_{17}, B, B_1, B_2, \dots, B_{23}, C$?
- [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB . Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $AH = MK$, и $AK = 5$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 240$.
- [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O , а AA_1 , BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1 , если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.
- [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

- [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in N$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 - (4a + \delta)x + a^2 + 4a = 0$$

Пусть первый корень: $x_1 = t \Rightarrow$ второй корень $x_2 = 5t$

~~$x_1 = t : 4t^2 - (4a + \delta)t + a^2 + 4a = 0$~~

$$x_2 = 5t \Rightarrow 100t^2 - (4a + \delta) \cdot 5t + a^2 + 4a = 0$$

$$4t^2 - (4a + \delta)t - 100t^2 + 5t(4a + \delta) = 0$$

~~$4t^2 - 96t^2 + 4t(4a + \delta) = 0$~~

1) $t = 0 \Rightarrow$ ур-ие имеет корни $\frac{x_1=0}{x_2=0} \Rightarrow$ только один корень

\Rightarrow не подходит

2) $t \neq 0 \Rightarrow -96t^2 + 4t(4a + \delta) = 0 / : t \neq 0$

$$-96t + 4(4a + \delta) = 0$$

$$-24t + 4a + \delta = 0$$

$$-6t + a + 2 = 0$$

$$a = 6t - 2$$

$$\Rightarrow 4t^2 - (4(6t - 2) + \delta)t + (6t - 2)^2 + 4(6t - 2) = 0$$

$$\underline{4t^2} - \underline{24t^2} + \underline{\delta t^2} - \underline{\delta t} + \underline{36t^2} - \underline{24t} + 4 + \underline{24t} - \underline{\delta} = 0$$

~~$16t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}$~~

$$t = \frac{1}{2} : a = 3 - 2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = -\frac{1}{2} : a = -3 - 2 = -5$$

Ответ: $a = -5$ или $a = 5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} AB^2 &= 30^2 = 900 \\ BC^2 &= 24^2 = 576 \quad \left. \right\} \Rightarrow AB^2 = 900 = 576 + 324 = BC^2 + AC^2 \\ AC^2 &= 38^2 = 324 \end{aligned}$$

\Rightarrow по теореме, обратной теореме Пифагора: $\triangle ABC$ -прямогульный
 $\angle C = 90^\circ$

Пусть вершина прямого угла это A , неизвестна.
Рассмотрим треугольники образованные вершинами A_i, B_j, C ,

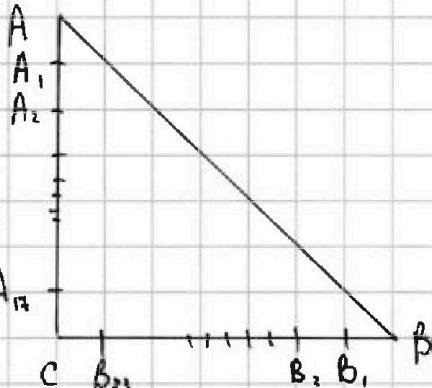
если A_i это A , то $i = 0$, если B_j это B , то $j = 0$

$\triangle A_i B_j C$ - прямоугольный с $\angle C = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle A_i B_j C} = \frac{A_i \cdot C \cdot B_j}{2}$

Пусть вершина прямого угла это C . А лежит между

A и A_2 , A_2 лежит между A_1 и A_3 и т.д., B_1 лежит между

B и B_2 , B_2 лежит между B_1 и B_3 и т.д.



$$\begin{aligned} \Rightarrow A_i C &= 38 - i \\ B_j C &= 24 - j \\ \Rightarrow \frac{(38-i)(24-j)}{2} &= S_{\triangle A_i B_j C} \end{aligned}$$

Рассмотрим при каких парах $(i; j)$

$$S_{\triangle A_i B_j C} = 13: \frac{(38-i)(24-j)}{2} = 13$$

$$(38-i)(24-j) = 22$$

$$22 = 1 \cdot 22 = 2 \cdot 11 = 38 \cdot 2 = 22 \cdot 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $j, i \in \mathbb{Z}$ и $j, i \geq 0$, то возможные случаи:

$$1) \begin{cases} 18 - i = 1 \\ 24 - j = 22 \end{cases} \Rightarrow i = 17, j = 2 \Rightarrow \Delta A_{17}B_2C$$

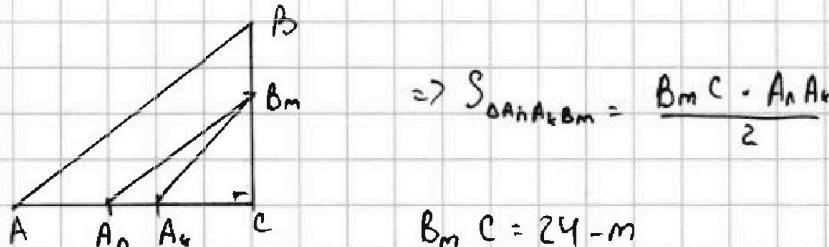
$$2) \begin{cases} 18 - i = 2 \\ 24 - j = 22 \end{cases} \Rightarrow i = 16, j = 2 \Rightarrow \Delta A_{16}B_{13}C$$

$$3) \begin{cases} 18 - i = 11 \\ 24 - j = 2 \end{cases} \Rightarrow i = 7, j = 22 \Rightarrow \Delta A_7B_{22}C$$

$$4) \begin{cases} 18 - i = 12 \\ 24 - j = 23 \end{cases} \Rightarrow i = 6 \Rightarrow i < 0 \Rightarrow \text{не может быть}$$

\Rightarrow Возможные 3 треугольника: ΔA_7B_2C ; $\Delta A_{16}B_{13}C$; $\Delta A_7B_{22}C$

Соседний
Ребро AC с точки A_n и A_k треугольник можно получить,
соседний с C с вершиной B_m ($C - A_n - A_k \Rightarrow \Delta A_nA_kC$ нет)



$$B_m C = 24 - m$$

$$A_n A_k = k - n$$

$$\Rightarrow \frac{(24 - m)(k - n)}{2} = 11 \Rightarrow (24 - m)(k - n) = 22$$

Возможные 4 случая:

$$1) \begin{cases} 24 - m = 1 \\ k - n = 22 \end{cases} \Rightarrow m = 23, k - n = 22 \Rightarrow A_k \text{ не существует}$$

$$2) \begin{cases} 24 - m = 2 \\ k - n = 11 \end{cases} \Rightarrow m = 22, k - n = 11 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \text{ есть,} \\ k - n \text{ есть} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} k \in [11; 22], \\ n \in [0; 6] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Возможны 7 треугольников}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} 24-m=11 \Rightarrow m=13 \\ k-n=2 \Rightarrow k=n+2 \Rightarrow k \in [2; 17], n \in [0; 15] \end{cases}$$

, где каждого k -одно значение

\Rightarrow возможно 16 треугольников

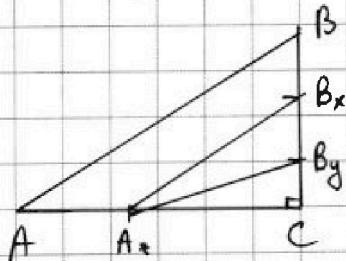
$$4) \begin{cases} 24-m=2 \Rightarrow m=2 \\ k-n=1 \Rightarrow k=n+1 \Rightarrow k \in [1; 17], n \in [0; 16] \end{cases}$$

, где каждого k -одно значение

\Rightarrow возможно 17 треугольников

\Rightarrow возможно 40 треугольников

Соединив 2 точки B_x и B_y треугольник мы получим 6 таких случаев,
если соединить их с A_2 ($C-B_x-B_y \Rightarrow \triangle B_xB_yC$ -вер)



$$\Rightarrow S_{\triangle A_2B_xB_y} = \frac{A_2C \cdot B_xB_y}{2} = 13$$

$$B_xB_y = y-x$$

$$A_2C = 18-2$$

$$\Rightarrow \frac{(18-2)(y-x)}{2} = 11 \Rightarrow (18-2)(y-x) = 22$$

Возможны 4 случая:

$$1) \begin{cases} 18-2=1 \Rightarrow z=17 \\ y-x=22 \Rightarrow y=22+x \Rightarrow y \in [22; 23], x \in [0; 1] \end{cases}$$

одно значение y

\Rightarrow возможно 2 треугольника

$$2) \begin{cases} 18-2=2 \Rightarrow z=16 \\ y-x=11 \Rightarrow y=11+x \Rightarrow y \in [11; 12], x \in [0; 1] \end{cases}$$

одно значение y

\Rightarrow возможно 3 треугольника



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ Возможн 13 треугольников

3) $\begin{cases} 18 - z = 11 \Rightarrow z = 7 \\ y - x = 2 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow y \in [0; 23], x \in [0; 11], \text{ где } \text{найдено } y - \text{одно} \\ \text{значение } x \end{cases}$

⇒ Возможн 22 треугольника

4) $\begin{cases} 18 - z = 22 \Rightarrow z = -4 < 0 \Rightarrow \text{не может быть} \\ y - x = 1 \end{cases}$

⇒ Возможн 37 треугольников видс $A_x B_x B_y$

⇒ Всего $3 + 37 + 40 = 70$ треугольников. может быть с повторяющимися

Отвр: 70 треугольников



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

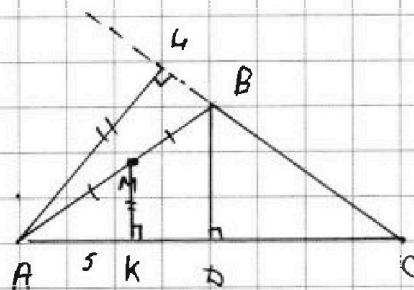
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возможна 3 случая: $\triangle ABC$ - тупоугольный
 $\triangle ABC$ - прямоугольный
 $\triangle ABC$ - остроугольный

1) $\triangle ABC$ - тупоугольный



Пусть $MK = AH = x \Rightarrow \triangle AMK$ - прямоугольный $\Rightarrow AK = \sqrt{25+x^2}$. Пифагора:

$$AM^2 = AK^2 + MK^2 = 25 + x^2 \Rightarrow AM = \sqrt{25+x^2}$$

$$TM\text{-середина} \Rightarrow AM = MB = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2AM = 2\sqrt{25+x^2} = BC$$

$\triangle AHB$ - прямоугольный \Rightarrow пт. Пифагора: $AH^2 + BH^2 = AB^2$

$$x^2 + BH^2 = 100 + 4x^2$$

$$BH^2 = 100 + 3x^2$$

$$BH = \sqrt{100 + 3x^2}$$

$$HC = BC + HB = \sqrt{100 + 3x^2} + ? \sqrt{25+x^2}$$

Проведен биссектриса BD в $\triangle ABC \Rightarrow BD$, медиана, бисс-са

BD - медиана $\Rightarrow AD = DC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} BD + AC &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow BD \parallel MK \\ MK + AC &\quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow MK - \text{средняя линия } \triangle ABD \Rightarrow AK = KD = 5 \\ \text{TP - середина } AB & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AD = 10 \Rightarrow AC = AD + CD = 2AD = 20$$

$\triangle AHC$ - прямоугольник \Rightarrow по т. Пифагора: $AC^2 = HC^2 + AH^2$

$$400 = x^2 + (\sqrt{100+3x^2} + \sqrt{25+x^2})^2$$

$$400 = x^2 + \{ 100+3x^2 + 100+4x^2 + 4\sqrt{2500+175x^2+100x^2+3x^4} \}$$

$$400 = 8x^2 + 200 + 4\sqrt{2500+175x^2+3x^4}$$

$$200 - 8x^2 = 4\sqrt{2500+175x^2+3x^4}$$

$$50 - 2x^2 = \sqrt{2500+175x^2+3x^4}$$

$$2500 + 4x^4 - 100x^2 = 2500 + 175x^2 + 3x^4$$

$$x^4 - 275x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 275) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 - 275 = 0 \Rightarrow x^2 = 275$$

$$AB = \sqrt{25+275} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} = BC$$

$$P = AB + BC + AC = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 20 = 20 + 20\sqrt{3}$$

2) $\triangle ABC$ - прямоугольник \Rightarrow т.к. соблюден CTB

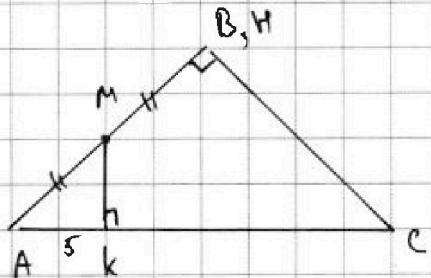


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

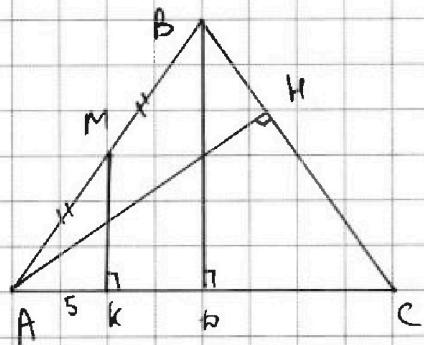


$$AM > MK \Rightarrow BM + AM > MK \Rightarrow AB > MK \Rightarrow AH > MK$$

$\Rightarrow AH > MK \Rightarrow$ не подходит \Rightarrow

$\triangle ABC$ - не прямоугольник

3) $\triangle ABC$ - прямоугольник?



Пусть $MK = AH = y$

$\triangle AKM$ - прямоугольник \Rightarrow по т. Пифагора:

$$AM^2 = AK^2 + MK^2 = 25 + y^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{25 + y^2}$$

$$TM\text{-середина} \Rightarrow AM = BM = \frac{1}{2} AB$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{25 + y^2} = BC$$

по т. Пифагора доказ $\triangle ABK$:

$$AB^2 = BK^2 + AK^2$$

$$90 \cdot 100 + 4y^2 = BK^2 + y^2 \Rightarrow BK^2 = 100 + 3y^2 \Rightarrow BK = \sqrt{100 + 3y^2}$$

$$HC = BC - BK = \sqrt{25 + y^2} - \sqrt{100 + 3y^2}$$

Проведем высоту BD ~~в~~ $\triangle ABC \Rightarrow BD$ - медиана, высота

$$\Rightarrow AD = DC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} BA + AC &\Rightarrow BA \parallel MK \\ MK \perp AC & \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow MK - \text{средняя линия } \triangle ABD \\ \text{TM - середина AB} & \quad \Rightarrow AK = KD = 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AD = AK + KD = 10 \Rightarrow AC = AD + CD = 2AD = 20$$

$\triangle ABC$ - прямоугольник \Rightarrow по т. Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$400 = y^2 + (\sqrt{25+y^2} + \sqrt{100+3y^2})^2$$

$$400 = y^2 + 100 + 4y^2 + 100 + 3y^2 - 2\sqrt{(25+y^2)(100+3y^2)}$$

$$200 - 8y^2 = -4\sqrt{2500 + 100y^2 + 75y^2 + 3y^4} \quad | : 4 \Rightarrow y \neq 0$$

$$2y^2 - 50 = \sqrt{2500 + 175y^2 + 3y^4}$$

$$2500 + 4y^4 - 200y^2 = 2500 + 175y^2 + 3y^4$$

$$y^4 - 375y^2 = 0$$

$$y^2(y^2 - 375) = 0$$

$$y \neq 0 \Rightarrow y^2 - 375 = 0 \Rightarrow y^2 = 375$$

$$AB = \sqrt{25 + 375} = \sqrt{400} = 40 = BC$$

$$P = AB + BC + AC = 40 + 40 + 20 = 100$$

Периметр равен

$$\text{Ответ: } \sqrt{100} \text{ или } 20 + 40\sqrt{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Пусть } M = \{a+2; a+1; a; a-1; a-2\}$$

Возможна 45 вариантов сумм:

$$1) S_1 = a+2+a+1+a+a-1 = 4a+2$$

$$\cancel{2) S_2 = a+2+a+1+a+a-1 = 4a+2} \Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow 4a+2 \neq 2 \Rightarrow 4a+2 \neq 12, 4a+2 \neq 2$$

$\Rightarrow 4a+2$ - не простое \Rightarrow не подходит

$$2) S_2 = (a+2)+(a+1)+(a)+(a-1) = 4a+1$$

$$3) S_3 = (a+2)+(a+1)+(a-1)+(a-2) = 4a$$

$a \neq 0 \Rightarrow 4a : 4 \Rightarrow S_3$ - не простое \Rightarrow не подходит

$$4) S_4 = (a+2)+(a)+(a-1)+(a-2) = 4a-1$$

$$5) S_5 = (a+1)+(a)+(a-1)+(a-2) = 4a-2$$

$$a \geq 3 \Rightarrow 4a-2 \geq 30 \Rightarrow 4a+2 \neq 2 \quad \left. \begin{array}{l} 4a \\ 4a+2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a+2 \text{ - не простое}$$

$\Rightarrow S_5$ - не простое \Rightarrow не подходит

\Rightarrow Две пары подходит только 2 суммы $S_2 = 4a+1$ и $S_4 = 4a-1$

$$p^2 - q^2 = 240 \Rightarrow p^2 - q^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 > q^2 \quad \left. \begin{array}{l} p^2 - q^2 \\ p^2 > q^2 \end{array} \right\} \Rightarrow p > q$$

$$4a+1 > 4a-1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = 4a+1 \Rightarrow p^2 = 16a^2 + 8a + 1 \\ q = 4a-1 \Rightarrow q^2 = 16a^2 - 8a + 1 \end{array} \right.$$

$$p^2 - q^2 = 16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 + 8a - 1 = 16a = 240 \Rightarrow a = 15$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$

$$\text{Ответ: } M = \{13; 14; 15; 16; 17\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пуск с прибором - Пуск на 5 забог, б - 4 забог, в - 2 забог
забог \rightarrow забог \rightarrow забог

$$\Rightarrow \text{Zapoved}: 2a^2 + 7b^2 + 7b + 8 \geq 2(2a^2 - 2ab - 2b^2) \geq 20 - 16.$$

$$= \cancel{aa^2} + \cancel{ab^2} + \cancel{bc^2} \approx + 2c^2 - c$$

$$a+b+c = 250$$

2022.12.26



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b^2} - 2ab &= 4 \\ \left(\frac{b}{a} \right)^3 - 3ab &= 4 \end{aligned}$$

ОДЗ: $a, b \neq 0$

Пусть $\frac{a^2}{b^2} = x$, $ab = y \Rightarrow x, y \neq 0$

$$\frac{a^3}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot ab = xy$$

$$\frac{b^3}{a} = \frac{b^2}{a^2} \cdot ab = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy - 2y = 4 = y(x-2) & (1) \\ \frac{y}{x} - 3y = 4 = y\left(\frac{1}{x}-3\right) & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)}, \quad \frac{y(x-2)}{y\left(\frac{1}{x}-3\right)} = \frac{y}{x} = \frac{1}{x} - 3$$

$$\Rightarrow 2x - 4 = \frac{1}{x} - 3$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 2x - 4 = \frac{1}{x} - 3 \mid \cdot x$$

$$2x^2 - 4x = 1 - 3x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} 2 - 1 - 1 &= 0 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow (1-2)y = -y = 4 \Rightarrow y = -4 \\ x_2 = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}-2\right)y = -\frac{5}{2}y = 4 \Rightarrow y = -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$1) x = 1, y = -4 : \frac{a^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} ab = b \\ a = -b \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) a = b \Rightarrow y = ab = b^2 = -4 \Rightarrow \text{не может быть}$$

$$\delta) a = -b \Rightarrow y = -b^2 = -4 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$b = 2 : a = -2 \Rightarrow (-2; 2) - \text{решение}$$

$$b = -2 : a = 2 \Rightarrow (2; -2) - \text{решение}$$

$$2) x = -\frac{1}{2}, y = -10$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{не может быть}$$

Ответ: $(-2; 2) \cup (2; -2)$

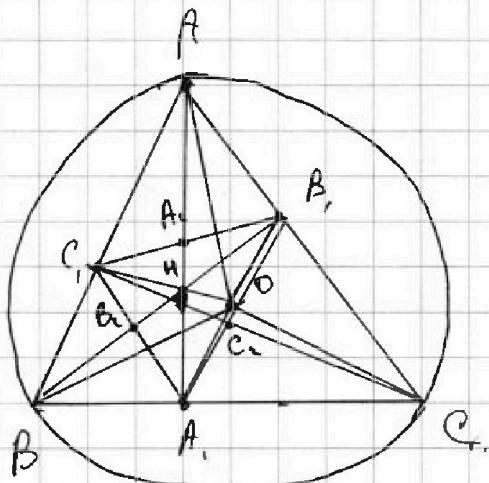


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сведеніш $\triangle A_1, \tau B_1, \tau C_1$

Описані окружності вколо $\triangle A_1, B_1, C_1$

$\triangle A_1, B_1, C_1$ - ортотреугольник \rightarrow її - окружність діється тоді як

$$\begin{aligned} \text{Луска } BB_1, \angle A_1 C_1 = \tau B_1 \\ AA_1, \angle B_1 C_1 = \tau A_1 \\ CC_1, \angle A_1 B_1 = \tau C_1 \end{aligned}$$

$$AA_1, \angle BB_1, \angle AA_1 = \tau h$$

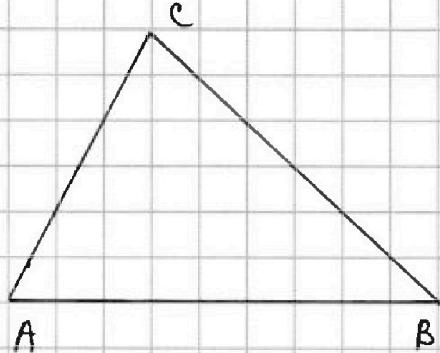
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

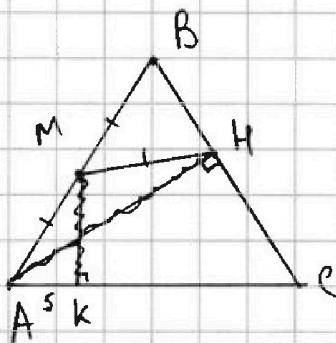
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4 \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8 \end{cases} \quad | \begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot ab = \frac{a^3}{b} = cd \quad | \begin{array}{l} c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot ab = \frac{b^3}{a} = \frac{d}{c}$$



$$\begin{cases} cd - 2d = 4 \\ \frac{d}{2} - 3d = 8 \end{cases}$$

$$(c-2)d = 4 \quad | c \neq 2$$

$$d = \frac{4}{c-2}$$

$$\frac{4}{c^2-2c} - \frac{8}{c-2} = 8$$

$$\frac{4-32-8c^2+16c}{c(c-2)} = 0$$

$$\frac{8c^2+16c-4}{c(c-2)} = 0$$

$$\frac{8(c^2+2c-1)}{c(c-2)} = 0$$

$$c \neq 0 \Rightarrow c^2 + 2c - 1 = 0$$

$$c \neq -2 \Rightarrow c = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{-1-\sqrt{2}} = \frac{4}{-1-\sqrt{2}}$$

$$ab = \frac{4(\sqrt{2}-3)}{7}$$

$$a^2b^2 = \frac{16}{49}(\sqrt{2}-3)^2$$

$$a^4 = (-1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-3)^2 \frac{16}{49}$$

$$= (-1-\sqrt{2})(9-11\sqrt{2}) \frac{16}{49} = (-1-5\sqrt{2})$$

$$3-\sqrt{2}=1$$

$$\rightarrow c = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$$

$$x_1 = t$$

$$V_2 = St$$

$$\begin{cases} 4E^2 - 4ta - 8t + a^2 + 4a = 0 \\ 100E^2 - 20at - 340t + a^2 + 4a = 0 \end{cases}$$

$$96t^2 - 4at - 8t - 100t^2 + 20at + 40t = 0$$

$$-4E^2 + 16at + 32t = 0$$

$$t^2 - 4at + \delta t = 0$$

$$t(t - 4a + \delta) = 0$$

$$\begin{aligned} & 3) t = 0 \Rightarrow \text{корень один} \\ & 2) t = 8+4a \Rightarrow 4(64 + 64a + 16a^2) - 4(8+4a)a - 8 = (8+4a) \cdot \\ & \quad + a^2 + 4a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 64 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\frac{D}{4} = 98^2 - 49 \cdot 192 = 49 \cdot 49 \cdot 4 - 49 \cdot 192 =$$

$$196 \mid 49 \quad , \quad 98$$

$$49a^2 + 49 \cdot 4a + 192 = 0 \quad \Rightarrow \quad 49(196 - 192) = 49 \cdot 4 = 14^2$$

196 14 x 9

$$a_1 = -\frac{9g+14}{49} = -2 + \frac{2}{7} = -1\frac{5}{7}$$

$$a_2 = \frac{-9d-14}{49} = -2 - \frac{2}{7} = -2\frac{2}{7}$$

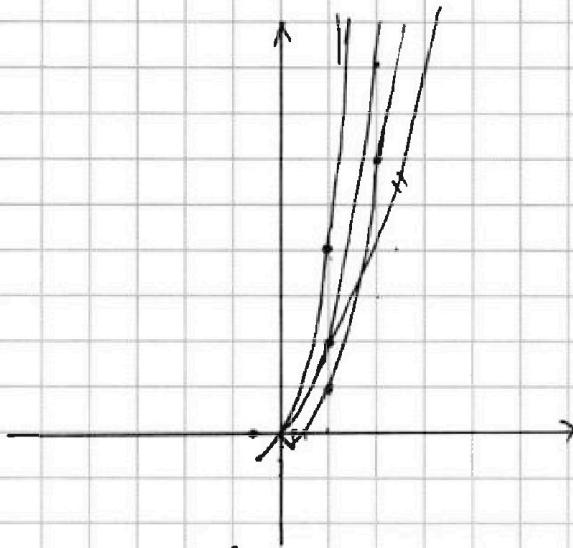
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

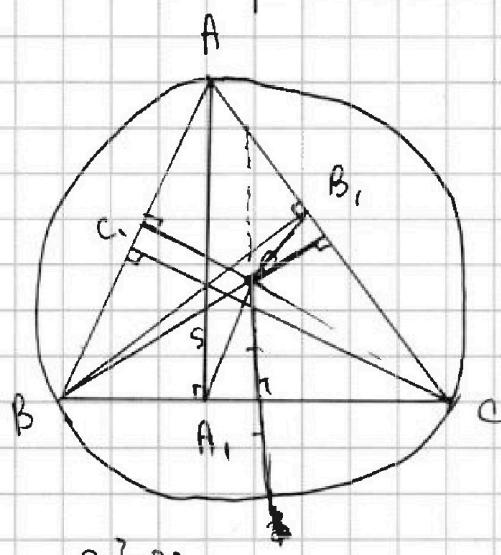


$$\frac{2}{4} - 1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$8^{-2}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 576 \end{array}$$

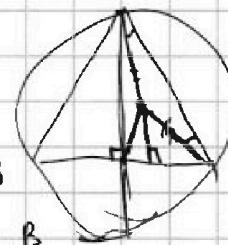


$$S_{BA1} = \frac{S_{ABC}}{2AC} \cdot BA_1$$

$$BA_1 = \frac{S_{BA1}}{S_{AA_1}}$$

$$S_{BA1} = \frac{S_{ABC}}{2BC} \cdot A_1B$$

$$S_{BA1} = \frac{2S_{ABC} \cdot A_1B}{AA_1}$$

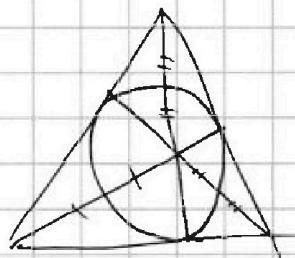


$$AA_1^2 = 160 \rightarrow AA_1 = 4\sqrt{10}$$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AB \cdot BB_1}{AC}$$

$$\frac{S_{\Delta BAA_1}}{S_{\Delta A_1C}} = \frac{A_1B}{A_1C}$$

$$\sqrt{\frac{R + OA_1 + BA_1}{2}}$$



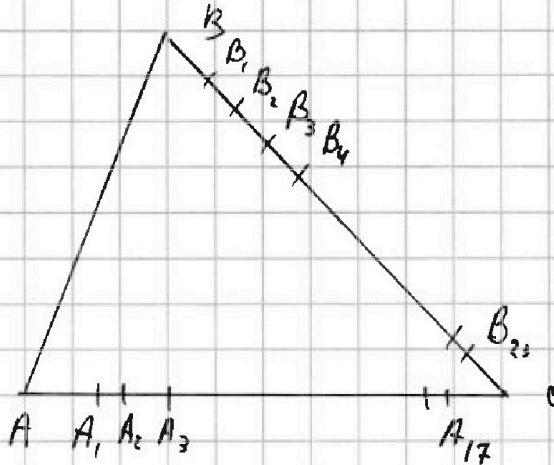
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



6-3

A; B_j; C

$$\frac{(24-j)(18-i)}{2} = 11$$

$$(24-j)(18-i) = 22$$

$$24-j=1 : 18-i=22 \\ j=23 \quad i=4$$

$$24-j=2 : 18-i=11 \\ j=22 \quad i=7$$

$$24-j=31 : 18-i=2 \\ j=13 \quad i=16$$

$$\begin{aligned} I &- 2q \\ II &- 2q^2 + 2q \\ III &- 2q^2 - q \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} -2 \\ \hline u \\ \downarrow \\ 4 \end{matrix}$$

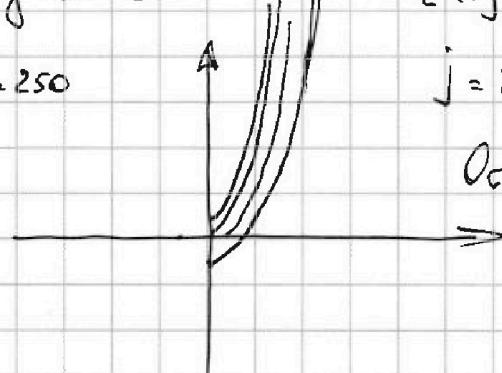
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2 = 250$$

$$x+y+z=250$$

$$III \quad 200$$

$$24-j=22 : 18-i=1 \\ j=2 \quad i=17$$

Остается



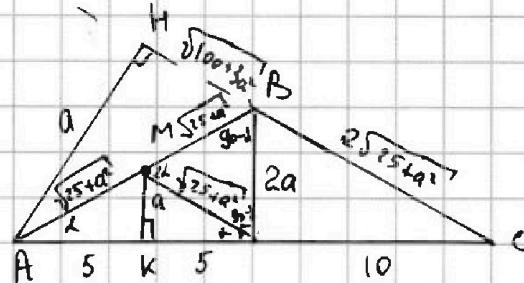
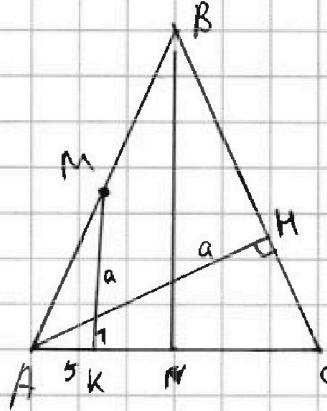
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$P = 4\sqrt{25+a^2} + 2a = \\ = 4\sqrt{400} + 2a = 100$$

$$100+4a^2-a^2 \\ 2a = \frac{1}{2}\sqrt{ }$$

$$25+a^2+25+a^2-2\cos\alpha.(25+a^2) = 4a^2$$

$$2\cos\alpha.(25+a^2) = 50-2a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{25+a^2}{25+a^2}$$

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{(25+a^2)^2}{(50-a^2)^2}} = \\ \sqrt{\frac{(25+a^2)^2 - (25-a^2)^2}{(25+a^2)^2}} =$$

$$a^2 + 100 + 3a^2 + 100 + 4a^2 + 4\sqrt{(100-3a^2)/(25+a^2)} \\ = 400$$

$$\sqrt{\frac{25+a^2}{(25+a^2)^2}} = \frac{10a}{25+a^2}$$

$$2\alpha^2 + 200 + 4\sqrt{2500 + 175a^2 + 3a^4} = 400 \\ \sqrt{2500 + 175a^2 + 3a^4} = 50 - 2a^2$$

$$2500 + 175a^2 + 3a^4 = 2500 + 4a^2 - 200a^2$$

$$375a^2 - a^4 = 0 \Rightarrow a^2(a^2 - 375) = 0 \Rightarrow a = \sqrt{375} \Rightarrow a = 5\sqrt{15}$$

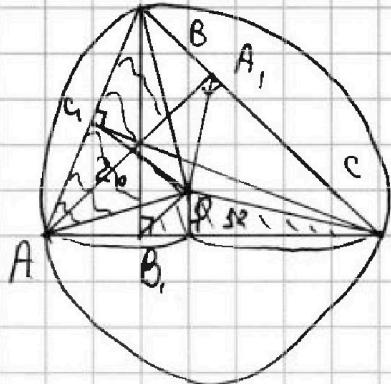
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$OB = OA = OC = \frac{ab}{4s}$$

$$M = \{a-2; a-1; a; a+1; a+2\}$$

$$(p-q)(p+q) \cdot 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$p-q \geq 2$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)

$$p-q \geq 2, p+q \geq 2$$

$$S_1 = 4a+2$$

$$S_2 = 4a+1$$

$$S_3 = 4a$$

$$S_4 = 4a-1$$

$$S_5 = 4a-2$$

1 2 3 4 5

1 - 1 [2] [3] 4

2 - 1 [2] [3]

3 - 1 [2]

4 - 3

5 -

$$3) p = S_1 : q =$$

$$(4a+2 - 4a-1) \cdot (4a+2 + 4a+1)$$

$$\begin{aligned} & 8a+2 \\ & 8a \rightarrow S_2 + S_4 \rightarrow a=15 \\ & 8a-2 \end{aligned}$$

$$8a+3$$

$$8a+1$$

$$8a-1$$

$$8a-3$$

$$1 (8a+3) = 240$$

$$8a+2$$

$$8a-1$$

$$8a-4 = 30$$

$$\boxed{13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17}$$