



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть a - первый член прогрессии, d - разность арифметической прогрессии. 4-ый член - $a+3d$; 6-ой член - $a+5d$; 10-ый член - $a+9d$.

Получаем систему уравнений:

$$(1) \begin{cases} a+3d = (6-9x) \\ a+5d = (x^2-2x)^2 \end{cases} \quad \text{Из (2) вычтем (1): } (x^2-2x)^2 - (6-9x) = 2d \quad (4)$$

$$(2) \begin{cases} a+5d = (x^2-2x)^2 \\ a+9d = 9x^2 \end{cases} \quad \text{Из (3) вычтем (2): } 9x^2 - (x^2-2x)^2 = 4d \quad (5)$$

$$(3) \begin{cases} a+9d = 9x^2 \end{cases} \quad \text{Разделим (5) на (4): } \frac{9x^2 - (x^2-2x)^2}{(x^2-2x)^2 - (6-9x)} = 2$$

(при $d \neq 0$).

$$\frac{9x^2 - (x^2-2x)^2}{(x^2-2x)^2 - (6-9x)} = 2 \quad (6) \quad 9x^2 - (x^2-2x)^2 = 2((x^2-2x)^2 - (6-9x));$$

$$9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 12 + 18x;$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0; \quad x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0;$$

$$(x-1)(x^3-3x^2-2x+4) = 0; \quad (x-1)^2(x^2-2x-4) = 0.$$

Решим уравнение $x^2-2x-4=0$: $D=4+4\cdot 4=20=(2\sqrt{5})^2$.

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}; \quad x_2 = \frac{2-2\sqrt{5}}{2} = 1-\sqrt{5}.$$

Значит, корни

уравнения (6): $x_1=1$; $x_2=1+\sqrt{5}$; $x_3=1-\sqrt{5}$.

Проверим, что все они подходят:

$$1) x_1=1, \quad a+3d=-3; \quad a+5d=1; \quad a+9d=9 \Rightarrow d=2; \quad a=-9.$$

Подходит.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x_2 = 1 + \sqrt{5}: a + 3d = (6 - 9x_2) = (6 - 9(1 + \sqrt{5})) = -3 - 9\sqrt{5}$$

$$a + 5d = (x_2^2 - 2x_2)^2 = (1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$a + 9d = 9x_2^2 = 9(1 + \sqrt{5})^2 = 9(6 + 2\sqrt{5}) = 54 + 18\sqrt{5}$$

$$4d = (a + 9d) - (a + 5d) = 54 + 18\sqrt{5} - 4 = 50 + 18\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{50 + 18\sqrt{5}}{4}$$

$$2d = (a + 5d) - (a + 3d) = 4 + 3 + 9\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{7 + 9\sqrt{5}}{2} \text{ Не подходит.}$$

$$3) x_3 = 1 - \sqrt{5}: a + 3d = (6 - 9x_3) = (6 - 9(1 - \sqrt{5})) = -3 + 9\sqrt{5}$$

$$a + 5d = (x_3^2 - 2x_3)^2 = (6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5})^2 = 16$$

$$a + 9d = 9x_3^2 = 9(6 - 2\sqrt{5}) = 54 - 18\sqrt{5}$$

$$4d = (a + 9d) - (a + 5d) = 54 - 18\sqrt{5} - 16 = 38 - 18\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{38 - 18\sqrt{5}}{4}$$

$$2d = (a_3 + 5d) - (a_3 + 3d) = 16 + 3 - 9\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{19 - 9\sqrt{5}}{2} \text{ Не подходит.}$$

Если же $d = 0$, то $6 - 9x = (x^2 - 2x)^2 = 9x^2$

$$(2): 9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2; x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0; x^2(x^2 - 4x - 5) = 0; x^2(x - 5)(x + 1) = 0$$

При $x = 0$: $6 - 9x \neq 9x^2$. Не подходит.

При $x = 5$: $6 - 9x \neq 9x^2$. Не подходит.

При $x = -1$: $6 - 9x \neq 9x^2$. Не подходит. Значит, корней нет.

Итого 3 ответа.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$|x-2y| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 \\ x-2y \geq -2. \end{cases}$$

$$|2x-y| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y \leq 1 \\ 2x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 & (1) \\ x-2y \geq -2 & (2) \\ 2x-y \leq 1 & (3) \\ 2x-y \geq -1 & (4) \end{cases}$$

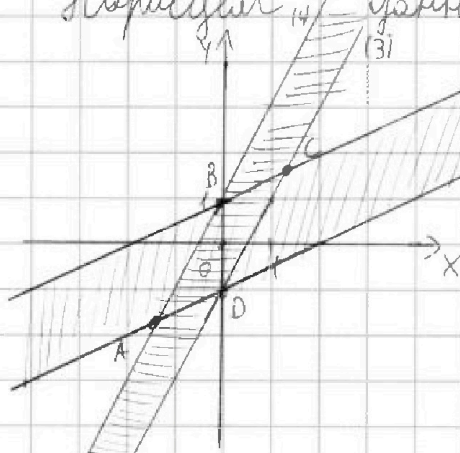
$$(1) \quad x-2y \leq 2 \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{2} - 1 \quad (\text{над прямой } y = \frac{x}{2} - 1)$$

$$(2) \quad x-2y \geq -2 \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} + 1 \quad (\text{под прямой } y = \frac{x}{2} + 1)$$

$$(3) \quad 2x-y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq 2x-1 \quad (\text{над прямой } y = 2x-1)$$

$$(4) \quad 2x-y \geq -1 \Leftrightarrow y \leq 2x+1 \quad (\text{под прямой } y = 2x+1)$$

Нарисуем данные прямые на графике:



Условия (1) и (2) ограничивают полосу между прямыми (1) и (2). Аналогично условия (3) и (4) так же ограничивают полосу между прямыми (3) и (4).

Видно, что область определения - параллелограмм

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ABCD. Очевидно, что в C имеет max координату по x и max координату по $y \Rightarrow$ максимум выражения $3y+6x$ будет достигаться в C .

Найдём координаты C . C - пересечение прямых

$$(2) \text{ и } (3) : \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1 ; \frac{3x}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}. \text{ Тогда } y = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Тогда } 3y + 6x = \frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 6 = 5 + 8 = 13.$$

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$A = n^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7).$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9). \text{ Рассмотрим случаи:}$$

1) $(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$. Есть несколько случаев

1.1) $m+2n = 1; m+2n-7 = 11p^2$ невозможны, т.к. m, n - натуральные

Или $\Rightarrow m+2n \geq 3$.

1.2) $m+2n = 11; m+2n-7 = p^2$. Тогда, $(m+2n-7) = 11-7=4 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow$

$p=2$. Тогда $B = 75q^2 = mn(m+2n+9) = 20mn; 75q^2 = 20mn$

$15q^2 = 4mn$. (т.к. $15q^2 : 4$ и $15 \neq 4$, но $q^2 : 4 \Rightarrow q=2$.)

Тогда, $15 \cdot 4 = 4mn \Rightarrow 15 = mn$. Тогда случаи: $m=1; n=15$ (не

подходит, т.к. $m+2n \neq 11$); $m=3, n=5$ (не подходит, т.к. $m+2n \neq 11$);

$m=5, n=3$ (подходит); $m=15, n=1$ (не подходит, т.к. $m+2n \neq 11$).

Значит, в этом случае подходит вариант $m=5; n=3$.

1.3) $m+2n = 11p; m+2n-7 = p$. Тогда, $(m+2n, m+2n-7) = p$.

Но, очевидно, что $7 \nmid (m+2n, m+2n-7) \Rightarrow p=7 \Rightarrow m+2n-7=p=7 \Rightarrow m+2n=14$.

Но $14 \nmid 11$. \therefore Не подходит.

1.4) $m+2n = p; m+2n-7 = 11p$. Очевидно, $m+2n > m+2n-7$, но

$p < 11p$. ~~Или~~ \therefore Случай не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.5) $m+2n=p^2$; $m+2n-7=11$. По модулю $m+2n=7+11=18$, но $18 \neq p^2$
для $p \in \mathbb{N}$. \therefore Не подходит.

1.6) $m+2n=11p^2$; $m+2n-7=1$. По модулю $m+2n=7+1=8$, но $8 \neq 11p^2$.
 \therefore Не подходит.

$$2) mn(m+2n+9) = 11p^2.$$

2.1) $m=1$. Тогда $n(2n+10) = 11p^2$. Заметим, что

$$2n+10 \equiv 2 \pmod{11}, \quad 11p^2 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow p=2. \text{ Тогда } n(2n+10) = 44.$$

$$n(n+5) = 22 \Leftrightarrow n^2 + 5n - 22 = 0. \quad D = 25 + 4 \cdot 22 = 25 + 88 = 113 - \text{ не полный}$$

квадрат \Rightarrow уравнение не имеет натуральных решений.

2.2) $n=1$. Тогда $m(m+1) = 11p^2$. По модулю $m \equiv m+1 \pmod{11}$,

$$\text{и или } m \equiv 11 \text{ или } m+1 \equiv 11 \Rightarrow \text{и } m \equiv 11 \text{ и } m+1 \equiv 11 \Rightarrow p=11.$$

Тогда $m(m+1) = 11^3$, но такое не можем найти, т.к.

m и $m+1$ разной чётности $\Rightarrow m(m+1) \equiv 2 \pmod{11}$. \therefore Не подходит.

2.3) $m \neq 1$; $n \neq 1$. В этом случае очевидно, что среди

чисел $m, n, m+2n+9$ одно равно 1, а другие равны p .

Если $m+2n+9=1 \Rightarrow m+2n=2$ \therefore т.к. $m+2n \geq 3$. Иначе, $m+2n+9=p$

и или $m=p$ или $n=p$. Но $\text{и } m+2n+9 > m \text{ и } m+2n+9 > n$. \therefore



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, эти случаи не подходят. Мы рассмотрели все случаи и нашли только одну подходящую пару $m=5; n=9$.

Ответ: $m=5, n=9$.



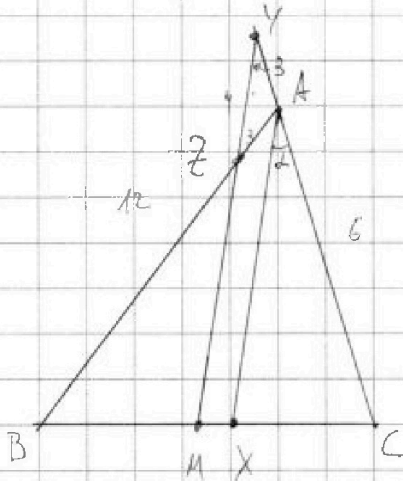
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



Пускай $\angle BAC = 2\alpha$. Пускай,

$\angle BAX = \angle XAC = \alpha$. $AX \parallel BC \Rightarrow$

$\angle ZYA = \angle XAC = \alpha$. Пускай,

$\angle YZA = \angle ZAX = \alpha$ по параллельности.

$\Rightarrow \angle ZYA = \angle YZA = \alpha \Rightarrow AY = AZ = 3$.

Пускай $BC = a$; $AB = c$; $AC = b$.

Пускай, $BX = \frac{a^2}{b+c}$; $CX = \frac{a^2}{b+c}$. $MZ \parallel XA \Rightarrow$ по т. Делеса

$$\frac{BM}{BX} = \frac{BZ}{BA} \Leftrightarrow \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{b+c}} = \frac{c-3}{c} \Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{2a^2} = \frac{c-3}{c} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2} = c-3$$

$\Rightarrow b+c = 2c-6 \Rightarrow c = b+6 = 12 = AB$. По т. косинусов для

$\triangle YAZ$: $b^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos(180-2\alpha) \cdot AY \cdot AZ \Rightarrow$

$$b^2 = 9+9 + 2 \cos(2\alpha) \cdot 9 \Rightarrow -2 = 2 \cos(2\alpha) \cdot 9 \Rightarrow \cos(2\alpha) = -\frac{1}{9}$$

по т. косинусов для $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos(2\alpha) \cdot AB \cdot AC$

$$\Rightarrow BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 12 \cdot 6 = 180 + \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{9} = 180 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 196 = 14^2$$

$\Rightarrow BC = 14$.

Ответ: $BC = 14$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{4+5x-y^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{4+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 + \sqrt{2x} + 3y \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

Из 2-ого уравнения понимаем, что $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Заметим, что функция $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$ монотонно возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. А значит, чтобы выполнялось равенство $f(x) = f(y)$ необходимо и достаточно, чтобы $x = y$. Тогда 1-ое уравнение принимает вид:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}. \quad \text{Тогда, } x \leq 7.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 9 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} + 2.$$

$$9 - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 2 + \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}.$$

$$(\sqrt{7-x} - \sqrt{x+2})^2 = 2 + (\sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}). \quad \text{Пусть } a = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}.$$

$$\text{Тогда, } a^2 = a + 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+1) = 0.$$

$$1) \ a = 2. \quad \text{Тогда } \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = 2 + \sqrt{x+2}.$$

~~Второй вариант~~ Заметим, что $\sqrt{7} < 2 + \sqrt{2}$, т.к. $x \geq 0$

$$7 < 6 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < 4\sqrt{2}, \text{ а это правда. Тогда, } \sqrt{7-x} < \sqrt{7} <$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} \leq 2+\sqrt{2+x} \Rightarrow \sqrt{7-x} < 2+\sqrt{2+x} \quad \leftarrow \text{Значит, этот}$$

случай не подходит.

невозможно!
(при $x+2 < 1$
 $x \geq -1$)

$$2) \theta = -1: \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = -1. \text{ Тогда } \sqrt{7-x} = \sqrt{x+2} - 1.$$

$$\text{Тогда, } 7-x = x+2+1 - 2\sqrt{x+2}. \quad 2\sqrt{x+2} = 2x-4 \quad (\text{тогда } x \geq 2).$$

$$\sqrt{x+2} = x-2, \text{ тогда } x+2 = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x+2=0. \quad D=25-4 \cdot 2=17.$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$\left| \frac{5-\sqrt{17}}{2} < 2 \Leftrightarrow 5-\sqrt{17} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{17} > 1, \text{ это правда} \Rightarrow \text{не-$$

терпимый корень. Очевидно, что $x_1 > 0$; $x_2 > 2$, докажем,

$$\text{что } x_1 < 7 \Leftrightarrow \frac{5+\sqrt{17}}{2} \leq 7 \Leftrightarrow 5+\sqrt{17} \leq 14 \Leftrightarrow \sqrt{17} \leq 9, \text{ это правда.}$$

$$\text{Значит, } x_1 \text{ подходит. Тогда, } y = x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$



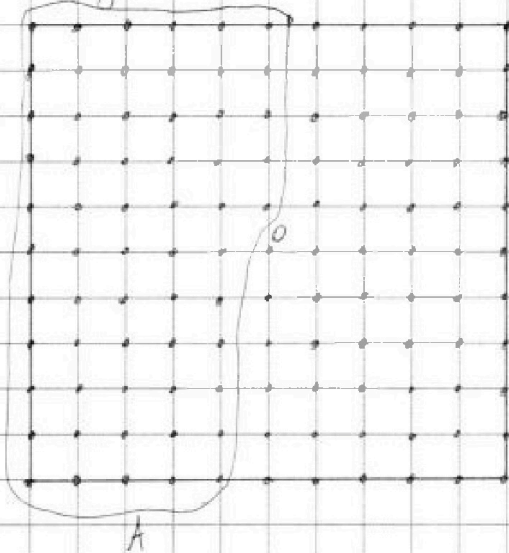
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



Всего узлов ~~выбрано~~ $10 \times 10 = 100$. Всего узлов отмечено $(10+1)(10+1) = 121$ узлов. Всего способов выбрать пару различных узлов $- C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60 = 7260$ способов. Отметим

центр квадрата O . Тогда, количество способов выбрать пару узлов, центрально симметричную относительно O - $\frac{121-1}{2} = 60$ узлов. (т.к. один из узлов точно содержится в месте A , а 2-ой узел восстанавливается однозначно.) Если поворачивать вокруг O пару узлов, центрально симметричную O 4 раза, то получаем 2 пары ~~разных~~ ~~одинаковых~~ способов. \Rightarrow Итого количество способов выбрать центрально симметричную пару - 30 способов. ($\frac{60}{2} = 30$) Если же брать 4 раза не симметричную центрально пару 4 раза, то получим 4 разные расстояния \Rightarrow



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нужное кол-во способов выбрать не симметричную
элементарно парти = $\frac{(7260-80)}{4} = \frac{7200}{4} = 1800$. Значит, общее

кол-во нужных нам способов = $1800 + 30 = 1830$.

Ответ: 1830 способов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

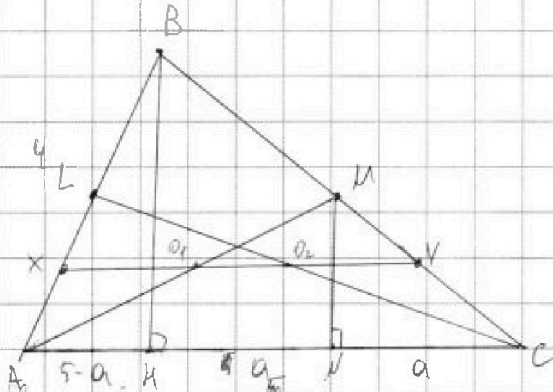


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Пусть O_1 - середина AM , O_2 - середина CL . Тогда O_1 - центр Ω , O_2 - центр ω . Очевидно, что $PQ \perp O_1O_2$. Так $PQ \parallel$

высоте $\triangle ABC$ из $m.B$, а высота из $m.B \perp AC$, то $PQ \perp AC$

$\Rightarrow AC \parallel O_1O_2$. Пусть $O_1O_2 \cap AB = X$, $O_1O_2 \cap BC = Y$.

Так как $LO_2 = O_2C$ и $XO_2 \parallel AC$, то XO_2 - средняя линия в $\triangle ALC$

$\Rightarrow AX = XL$. Аналогично, $MY = YC$. Так как $AC \parallel XY$ и $AX = XL$

и $CY = MY$, то по m . Деласа $ML \parallel AC$. Так как

M - середина AC и $ML \perp AC$, то L - середина AB

$\Rightarrow CL$ - биссектриса и высота в $\triangle ACB \Rightarrow \triangle ACB$

- равнобедренный, где $AC = BC$. Так как Ω построена

на AM , как на диаметре, то $\angle AMO = 90^\circ$. Пусть

$CM = a$. BH - высота. Тогда $MM \parallel BH$ и M - середина

$BC \Rightarrow CM = MH = a$. Тогда $AM = 5 - a$. Тогда, $BC = 5 + a$.

По m . Пифагора для $\triangle AMO$: $16 = (5 - a)^2 + BH^2 \Leftrightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = 25 - 10a + a^2 + BH^2 \Leftrightarrow BH^2 = 10a - a^2 - 9.$$

По т. Пифагора для $\triangle BHC$:

$$(a+5)^2 = BH^2 + 4a^2 \Leftrightarrow (a+5)^2 = 10a - a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 10a + 25 = 10a - a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 25 = -a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 25 = 3a^2 - 9$$

$$34 = 2a^2 \Rightarrow a = \sqrt{17}. \text{ Значит, } AC = BC = 5 + a$$

$$= 5 + \sqrt{17}.$$

$$\text{Ответ: } AC = 5 + \sqrt{17}, BC = 5 + \sqrt{17}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~6.1.1~~

$z = x + 2$ $a^2 + b^2 = 9$ $z = \sqrt{z-x} \cdot \sqrt{z+x}$ $AM = a$
 $5 \geq 2x$ $a - b + 7 = 2ab$ $CL = b$
 $z, 5 \geq x$ $(a+b)^2 = x(b+a-b)$ $0 < x < 5.7$

$7 - \sqrt{z-x} = \sqrt{z+x}(\sqrt{z-x}-1)$ $AM \perp O_1O_2$
 $\sqrt{z-x} < \sqrt{z+x}$ $\Rightarrow BH \perp O_1O_2$
 $\sqrt{z-x} \leq \sqrt{z}$ $z+x = 8-x+2\sqrt{z-x}$ $O_1O_2 \parallel AC$
 $2 + \sqrt{z}$ $z-6 = 2\sqrt{z-x}$ $AB=4; AN=5$
 $2x-3 = \sqrt{z-x}$ $x^2 - 6x + 2z = x$ $\frac{a+2x}{a+x} = \frac{b+2y}{b+y}$
 $\sqrt{z-x} - \sqrt{z+x} = 2$ $x^2 - 5x + z = 0$ $\frac{a+x}{a} = \frac{b+y}{b}$ $(b+y)(2x+y) = (b+x)(2y+y)$
 $\sqrt{z} - \sqrt{z} = 2$ $D = 25 - 4z$ $\frac{a+x}{a} = \frac{b+y}{b}$ $(b+x)(2y+y) = (b+y)(2x+y)$
 $\sqrt{z} \geq \sqrt{z}$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{D}}{2}$ $a^2 - a + 2 = 0$ $\frac{a+x}{a} = \frac{b+y}{b}$ $ab + x + b = ab + ay$
 $z < 6 + 4\sqrt{z}$ $a = 1$ $ab + x + b = ab + ay$
 $z < 6 + 4\sqrt{z}$ $0 < x < 5.7$ $a^2 - a + 2 = 0$ $a = 1$ $ab + x + b = ab + ay$
 $z < 6 + 4\sqrt{z}$ $0 < x < 5.7$ $a^2 - a + 2 = 0$ $a = 1$ $ab + x + b = ab + ay$
 $z < 6 + 4\sqrt{z}$ $0 < x < 5.7$ $a^2 - a + 2 = 0$ $a = 1$ $ab + x + b = ab + ay$

$\sqrt{z-x} - \sqrt{z+x} = -1$ $\sqrt{z+x} = 1 + \sqrt{z-x}$ $z - y \geq 0$ $y \leq 7$
 $x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$ $y \geq 0$ $x = y$ $x \geq 0$
 $| \sqrt{z-x} - \sqrt{z+x} |^2 = \sqrt{z-x} - \sqrt{z+x} \geq 0$ $-(x^2 + 5x - 14)$
 $\sqrt{z+x} - \sqrt{z-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$ $-(x-2)(x+2)$
 $\sqrt{z+x} - \sqrt{z-x} = 2\sqrt{14+5x-x^2}$ $(7-x)(x+2)$
 $9 - 2\sqrt{(z-x)(z+x)} = 2 + \sqrt{z-x} - \sqrt{z+x}$ $9a^2 + (100 - 9a^2) = a^2(100 + 25)$
 $3a^2 - 9 = a^2 + 25$
 $2a^2 = 34$ $a = \sqrt{17}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

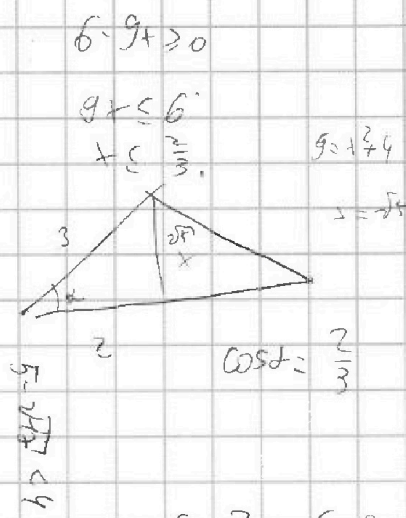
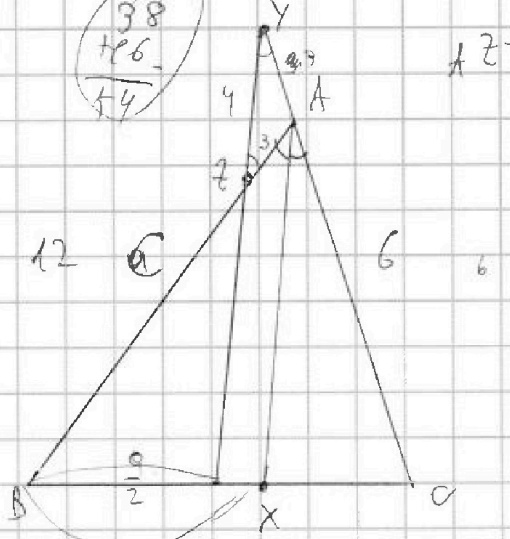
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода нелопустима!

$$\begin{array}{r} 108 \\ 48 \\ +16 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ +16 \\ \hline 54 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 14 \\ +16 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\frac{aC}{b+c} = 1$$

$$\frac{aC}{c+b}$$

$$\frac{aC}{c+b}$$

$$\frac{a(c+b)}{2aC} = \frac{c-3}{C}$$

$$\frac{(c+b)}{2C} = \frac{c-3}{C}$$

$$\frac{c+b}{2} = c-3$$

$$9x^2 + 9x - 6 = 0$$

$$3x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 24$$

$$C+b = 20-6$$

$$C=12$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{144 + 36 - \frac{4 \cdot 12 \cdot 6}{3}} = \sqrt{180 - 96} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$(3x)^2 = (x^2 - 2x)^2$$

$$9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^3 - y^3 = 3y - \sqrt{2x} + \sqrt{2y} - 3x$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3y - 3x - \sqrt{2x} + \sqrt{2y}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = \sqrt{2x} - \sqrt{2y}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ + 6 \\ \hline + 260 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$x^2(x-5)(x+1) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$16+3+9\sqrt{5}$
 $a+d = 19+9\sqrt{5} = 2f$
 $d = \frac{19+9\sqrt{5}}{2}$
 $6-9(1+\sqrt{5})$
 $-3-9\sqrt{5}$ (4)
 16 (6)
 $54+18\sqrt{5}$ (10)
 $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 4$
 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$
 $3x^2(x^2 - 2x)^2$
 $\frac{x^2(x^2 - 2x)^2}{(x^2 - 2x)^2 - (6-9x)} = 2$
 $\frac{(3x - x^2 + 2x)(3x + x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x)^2 - (6-9x)} = 2$
 $\frac{(1+\sqrt{5})}{2} \Big/ \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$
 4
 $9x^2 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2) = 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6)$
 $-x^4 + 4x^3 + 5x^2 = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12$
 $3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$
 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$
 $(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$
 $(x-1)(x-1)(x^2 - 2x + 4) = 0$
 $(1+\sqrt{5})^2 = (6+2\sqrt{5})$
 $(6+2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5})^2$

$a+3d = (6-9x) = 3(2-x)$
 $a+5d = (x^2-2x)^2 = x^2(x-2)^2$
 $a+9d = 9x^2$
 $6d = 9x^2 - (6-9x) = 9x^2 + 9x - 6$
 $3(3x^2 + 3x - 2)$
 $3(1-2)(x^3 - 2x^2 + 3) = 9x^2 + 9x - 6$
 $9+3 \cdot 4 \cdot 2 = 9+24=33$
 $(x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$
 $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$
 $\frac{(-x^2 + 5x)(x^2 + x)}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6} = 2$
 $1+4+4-9-6$
 $6 \cdot 25 - 4 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 45 - 6$
 $4+4-4=30 = (2\sqrt{5})^2$
 $\frac{2+2\sqrt{5}}{2}$

