



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дд.

Ответ: -1; 5

Пусть коэффициент прогрессии будет равен  $q$ .

Тогда  $x_{12} = \sqrt{(5x_0)(x-3)} = x_4 \cdot q^8 = \sqrt{\frac{5x_0}{(x-3)^3}} \cdot q^8$

$x \neq 3$ .

$q^8 = \frac{x_{12}}{x_4} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$

1)  $x > 3$ :

$q^4 = x-3$

$q^2 = \sqrt{x-3}$

$x_{12} = q^2 \cdot x_0 = (x+1) \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{15x+6} \cdot \sqrt{x-3}$

$\sqrt{x-3} (x+1 - \sqrt{15x+6}) = 0$

П.к.  $x \neq 3$ , то  $\sqrt{x-3} \neq 0$ .

Тогда

$x+1 = \sqrt{15x+6}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$

П.к.  $x > 3$ , то  $x \geq 5$ .

2)  $x < 3$ :

$q^4 = 3-x$

$q^2 = \sqrt{3-x}$

$x_{12} = q^2 \cdot x_0 = (x+1) \sqrt{3-x} = \sqrt{(5x+6)(x-3)}$

П.к.  $x < 3$ , то  $x-3 < 0$ , а  $(5x+6)(x-3) \geq 0$ . Тогда  $5x+6 \leq 0$

$(x+1)^2 (3-x) = (5x+6)(x-3)$ . П.к.  $\sqrt{3-x} > 0$ ,  $\sqrt{(5x+6)/(x-3)} > 0$ , то  $x+1 \geq 0$ ,  $x \geq -4$ .

$(x^2 + 8x + 16 + 15x + 6)(3-x) \geq 0$ ;  $3-x \neq 0$ .

$x^2 + 23x + 22 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$

П.к.  $x \geq -4$ , то  $x = -1$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-b^2+z}, \quad x \geq -z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}; \\ \sqrt{225-z^2} \leq 15, \text{ т.к. } 225-z^2 \leq 225. \end{array} \right.$$

$$\text{Тогда } |y-20| + 2|y-35| \leq 15.$$

$$\text{Тогда } |y-20| + 2|y-35| \leq 15.$$

Докажем, что  $|y-20| + 2|y-35| \geq 15$ :

$$1) y \geq 35: y-20 + 2y-70 = 3y-90 \geq 105-90 = 15$$

$$2) 20 < y < 35: y-20 - 2y+70 = 50-y \geq 50-35 = 15$$

$$3) y < 20: \cancel{y-20} + 20-y + 70-2y = 90-3y \geq 90-60 = 30 \geq 15$$

$$\text{т.е. } 15 \leq |y-20| + 2|y-35| \leq 15. \text{ Тогда } |y-20| + 2|y-35| = 15.$$

Также докажем, что  $|y-20| + |y-35| \geq 15$ :

$$1) y \geq 35: y-20 + y-35 = 2y-55 \geq 70-55 = 15$$

$$2) 20 < y < 35: y-20 + 35-y = 15 \geq 15$$

$$3) y < 20: 20-y + 35-y = 55-2y \geq 55-40 = 15$$

$$|y-20| + |y-35| = |y-20| + 2|y-35| - |y-35|. \text{ Т.к. } |y-35| \geq 0, \text{ то}$$

$$15 \leq |y-20| + |y-35| \leq |y-20| + 2|y-35| = 15$$

$$\text{Тогда } |y-20| + |y-35| = 15. \text{ Тогда } |y-35| = 0. y = 35.$$

$$\text{Тогда, т.к. } |y-20| + 2|y-35| = 15 = \sqrt{225-z^2}, \text{ то}$$

$$225-z^2 = 225. z = 0.$$

Тогда,

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-b^2}$$

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - 6$$

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - (5-x+7+x)$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 = 2 - (\sqrt{7+x} - \sqrt{5-x})^2$$

Пусть  $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$ .

Тогда:  $t - 6 = -t^2$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2) = 0$$

$$-7 \leq x \leq 5$$

$$\begin{cases} t=3, \\ t=2; \end{cases}$$

1)  $t=2$ ;

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$x+7 = 4 + 5-x + 4\sqrt{5-x}$$

$$2x-2 = 4\sqrt{5-x}$$

$$x-1 = 2\sqrt{5-x} \quad x \geq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4(5-x)$$

$$x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$D = 4 + 76 = 80$$

$$x_2 = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{5}$$

П.к.  $-1 - 2\sqrt{5} < 1$ , то  $x_2 = -1 + 2\sqrt{5}$ .

2)  $t=3$ ;

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3$$

$$x+7 = 9 + 5-x + 6\sqrt{5-x}$$

$$2x-2 = 6\sqrt{5-x}$$

$$\begin{cases} 2x-2 \leq 0 \\ x \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$4x^2 - 20x + 4 = 36 - 36x$$

$$4x^2 + 8x - 18 = 0$$

$$D = 64 + 16 \cdot 18 = 16 \cdot 135$$

$$x_2 = \frac{-8 \pm 12\sqrt{5}}{8} = -1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

П.к.  $-1 + \frac{3\sqrt{5}}{2} > \frac{7}{2}$ , то  $x_2 = -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Ответ:  $x_2 = -1 + 2\sqrt{5}, y = 35, z = 0$ ;  
 $x_2 = -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}, y = 35, z = 0.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Пусть  $\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + P \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + P$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = P.$$

Пусть  $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$ .

Рассмотрим функцию  $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

P-н её производную:  $f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$ .

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 12t + 3 = 3(2t-1)^2.$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t-1)^2 = 0 \quad t = \frac{1}{2}$$

$f'(t) = 3(2t-1)^2$ . — значит функция монотонно возрастает

(при  $t = \frac{1}{2}$   $f'(t) = 0$ , при  $t \neq \frac{1}{2}$ ,  $f'(t) > 0$ )

Поэтому мин. знач.  $f(t)$  на промежутке  $[-1; 1]$  будет в точке  $t = -1$ .

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10,$$

Макс. знач. будет в точке  $t = 1$ ,  $f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$ .

Уравнение  $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = P$  будет иметь ровно 1 корень при

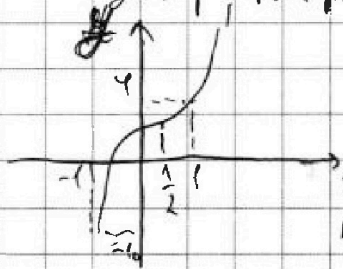
каждом P, т.к. P-но горизонт. прямая, а  $f(t)$  всегда возраст.

Поэтому, если пересечь график функции  $f(t)$

прямой  $y = P$  при  $P \in [-10; 4]$ , то

решение (т. пересек.) будет лежать в

промежутке  $[-1; 1]$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При этом, если  $p \in [-\omega; \omega]$ , то угр. пересечёт  $y = f(t)$   
в точке, соответствующей промежутку  $[-1; 1]$ .

Тогда  $p \in [-\omega; \omega]$ .

Пусть  $t_1$  — единственный корень уравнения

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p \geq 0$$

Тогда, г.к.  $\cos x \in [-1; 1]$ ,

$$\begin{cases} x = \arccos t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arccos t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

*Решение*

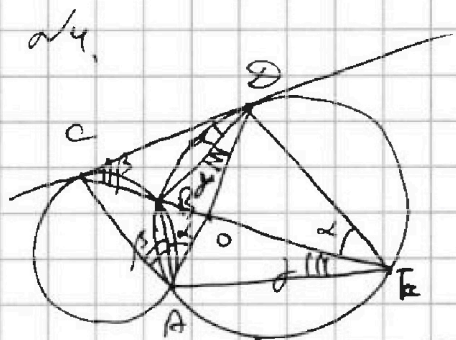
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим  $\angle DBO$  и  $\alpha$

Рассмотрим  $\angle BAO$  и  $\alpha$ , г.к.

$\angle DBO = \angle BAO$ , г.к. они опп.

на одну дугу.

$\angle CDB$  и  $\alpha$ , г.к. это углы между кас. и хордой и равен повороте дуги  $\widehat{BC}$ .

Многие мысли.

Рассмотрим  $\angle BAC = \beta$ , тогда  $\angle BCD = \beta = \angle BAC$ , г.к. это

углы между кас. и хордой и они равен повороте дуги,

г.к. многие мысли.

$\angle DBE = \alpha$ , г.к. это впис. угол  $\triangle CBD$  и он равен углу

$\alpha$  не совсем. С другой стороны  $\angle DBE = \angle DBK = \alpha$ , г.к. они впис. и

опп. на одну дугу.

Рассмотрим  $\angle BDO = \gamma$ , тогда  $\angle BEO = \gamma$  (г.к. они впис. и

опп. на одну дугу)

Рассмотрим  $\triangle CDA$  и  $\triangle DBA$  по 2 углам ( $\angle CDA = \alpha = \angle DBA$ ;

$$\angle CDA = \alpha = \angle DBA) \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{DA}{AB}$$

г.к.  $\angle CAD = \alpha = \angle BAE$ , то  $AO$  - биссектр.  $\angle CAE$  ( $\angle CAE = \alpha$ )  $\frac{CO}{OE} = \frac{CA}{AE} = \frac{9}{25}$ .

$$AC = 9x, AE = 25x, \frac{CA}{AD} = \frac{9x}{AD} = \frac{DA}{AE} = \frac{DA}{25x}$$

$$AD = \sqrt{225x^2} = 15x.$$

$$\frac{EO}{CO} = \frac{AO}{AC} = \frac{15x}{9x} = \frac{5}{3}.$$

Ответ:  $\frac{5}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

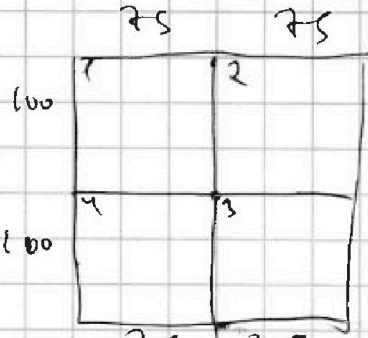
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

д.с.

Р-м. Закрытие с симметр. относ углам.



Всего для каждого набора ~~2~~ закрыт  
клеток в 1 четверти все соответств. ему  
набор закрыт клеток в 3-й.

То же самое год 2-й и 4-й четверти,  
Тогда кол-во в 1-й и 2-й четверти совпад  
суммарно 4, т.к. в 3-й и в 4-й, а в 4-й и в 2-й.

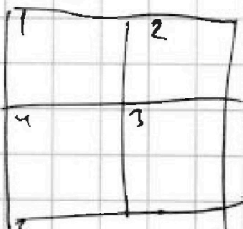
1	2
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

- 1) 4-0;  $C_{750}^4$
- 2) 3-1;  $C_{750}^3 + C_{750}^1$
- 3) 2-2;  $C_{750}^2 + C_{750}^2$
- 4) 1-3;  $C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$
- 5) 0-4;  $C_{750}^4$

$$2 \cdot C_{750}^7 + 2 \cdot C_{750}^3 \cdot 750 + C_{750}^2 \cdot C_{750}^2 =$$

$$\frac{2 \cdot 750!}{2496!4!} + \frac{2 \cdot 750! \cdot 750}{2497!3!} + \frac{750!^2}{7498!2!^2}$$

Р-м. Закрытие отн. средней линии (2 сред. линии угла, т.к.  
отлич. только поворотом на 90°):



Раскрытие в 1-й равно раскрытие во 2-й,  
раскр. в 4-й равно раскр. в 3-й;

Тогда сумма зак. клеток в 1-й и 4-й равно  
4, т.к. в 1-й и 4-й сумма 4, сколько 1

2-й и в 3-й. При раскр. 1-й отсюда закрётся  
раскр. 2-й, при раскр.  
4-й отсюда закрётся  
раскр. 3-й;

1	3
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

- 1) 4-0;  $C_{750}^4$
- 2) 3-1;  $C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$
- 3) 2-2;  $C_{750}^2 \cdot C_{750}^2$
- 4) 1-3;  $C_{750}^1 \cdot C_{750}^3$
- 5) 0-4;  $C_{750}^4$

Всего:

$$C_{750}^4 \cdot \frac{2 \cdot 750!}{2496!4!} + \frac{2 \cdot 750! \cdot 750}{2497!3!} +$$

$$+ \frac{750!^2}{7498!2!^2}$$

Для формулы

кон-во при каждой раскр. отн. верг. работле  
перлтер. на 90° по часовой стрелке раскрытия, ко верг.





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

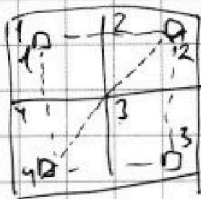
Будет симметрична относительно. Гориз. сред линии и вертикал,  
где раскрыва, симметр. отн. гориз. линии все раскрыва, поверн.  
на 90° против часовой стрелки и она будет симметрична отн.

верт. линии (пока будем считать, что так)

Чтобы где раскр., симметр. отн. ср. линии способов:

$$2 \cdot \left( \frac{2 \cdot 750!}{7496!4!} + \frac{2 \cdot 7500 \cdot 7500!}{7492!3!} + \frac{7500!^2}{7498!2!} \right)$$

Остаток посчитать кол-во раскрывок, которые симметр.  
отн. сразу 2-м линиям, как линии и серединам;



Если раскр. симметр. отн. 2-м линиям, то

1-й четверть равна 2-й четверти и равна 4-й  
четверти, а отн. левой четверти, равна 3-й;

Тогда 1-й четверть равна 3-й, а значит  
все симметрично и отн. угла, (под "равностью четвертей"

подразумевается симметричность, 1-й и 3-й симметр. отн.  
угла, так 3-й поверн. на 1-й углом симметрично отн. перпен.  
прямой, провед. через угол.)

Аналогично 2-й и 4-й. Тогда все 4 четверти равны,

Если все симметр. отн. угла и линии, то здесь эта линия будет  
вертикальной, тогда 1 симметр. 2-й и симметр. 3-й, 3-й симметр.

4-й от прямой, поверн. 1-й на угол 2, 2-й поверн. в 4, через  
угол симметр., тогда раскрыв. в.к. симметр. отн. угла

Относительно композиции симметрично отн. 2-м линиям, то, если  
вот так симметрично отн. угла и 1-й линии, то вот так, симм. и отн.  
горизонт. Тогда если совпадет. линии то 2 симм., то совпадают все

?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, раскрыв 1-ю четверть, мы сразу знаем 2-ю, 3-ю и 4-ю (через симметрию). В 1-й четверти кон в клетках, равно кон-бу клеткам во 2-й, 3-й и 4-й.

Всего в 1-й четверти 2 клетки;

вариантов сумм раскрыв 1-й четверти;

$C_{750}^2$ . Также раскрыв мы считали трижды

(год каждой из симметрий), а потому внесем их выделенными:

$$3 \cdot \left( \frac{2 \cdot 750!}{7496! \cdot 4!} + \frac{2 \cdot 750 \cdot 750!}{7497! \cdot 3!} + \frac{750!^2}{7498! \cdot 2!^2} \right) = \frac{2 \cdot 750!}{7498! \cdot 2!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \left( \frac{6 \cdot 750!}{7496! \cdot 4!} + \frac{6 \cdot 750 \cdot 750!}{7497! \cdot 3!} + \frac{3 \cdot 750!^2}{7498! \cdot 2!^2} \right) = \frac{750!}{7498!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \left( \frac{750!}{7496! \cdot 4} + \frac{750 \cdot 750!}{7497!} + \frac{3 \cdot 750!^2}{7498! \cdot 2!^2} \right) = \frac{750!}{7498!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \frac{750 \cdot 749 \cdot 749 \cdot 749 \cdot 749}{4} + \frac{750 \cdot 750 \cdot 749 \cdot 749 \cdot 749}{4} + \frac{3 \cdot 750 \cdot 749 \cdot 750 \cdot 749}{4}$$

$$= 750 \cdot 749 \cdot 2 \cdot 750 \cdot 749 = 3 \cdot \left( C_{750}^4 \cdot 2 + 2 C_{750}^3 \cdot C_{750}^1 + C_{750}^2 \right) =$$

$$= 2 C_{750}^4 + 6 C_{750}^3 + 6 C_{750}^3 \cdot C_{750}^1 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2) =$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot C_{750}^4 + 45000 C_{750}^3 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2)$$

$$\text{Ответ: } 6 \cdot C_{750}^4 + 45000 \cdot C_{750}^3 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26

$$(a-c)(b-c) = p^2. \text{ Если } p \neq 3, \text{ то } p \nmid 3, \text{ т.е. } p - \text{нечетное.}$$

$$\text{Если } p \nmid 3, \text{ то } p^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

$$(a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod 3.$$

$$\text{т.к. } a, b \nmid 3, \text{ то } a \not\equiv b \pmod 3.$$

$$\text{Если } a - c \equiv b - c \pmod 3, \text{ то } a - b \equiv c - c \equiv 0 \pmod 3. \text{ Противоречие.}$$

$$\text{Тогда } a, \text{ т.е. } a - c \equiv 0 \pmod 3, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 !!!$$

$$\text{Если } a - c \equiv 1 \pmod 3, \text{ то } b - c \equiv 0 \text{ или } 2, \text{ тогда } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3.$$

Не подходит.

$$\text{Если } a - c \equiv 2 \pmod 3, \text{ то } b - c \equiv 0 \text{ или } 1. \text{ Если } b - c \equiv 0, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3,$$

$$\text{а если } b - c \equiv 1, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3.$$

Тогда нет такого  $p \nmid 3$ .

Значит  $p = 3$ .

$$(a-c)(b-c) = 9.$$

т.к.  $a-c$  и  $b-c$  — чётные числа,  $a-b > 0, a-b = (a-c) - (b-c)$ ,

т.е.  $a-c > b-c$ , то есть варианты:

$$\begin{cases} a-c=9, \\ b-c=1; \\ a-c=3, \\ b-c=3; \end{cases} \begin{cases} a=3c+9, \\ b=c+1; \\ a=c+3, \\ b=c-3; \end{cases} \begin{cases} b=2c+9, \\ a=3c+9, \\ a=2c+9, \\ b=c-9; \end{cases} \quad a \geq b$$

$$a+b^2 \geq 20, \quad b^2 + b + 312 \geq 20$$

$$b^2 + b + 312 \geq 20$$

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(312 - 20)}}{2}$$

$$\begin{cases} b=28, \\ b=29; \end{cases} \begin{cases} a=36, \\ a=21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=c+9, \\ a=3c+9, \\ b=28; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=27, \\ a=36, \\ b=28. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=c-9, \\ a=2c+9, \\ b=29; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=20, \\ a=21, \\ b=29. \end{cases}$$

Ответ:  $a=36, b=28, c=27;$   
 $a=21, b=29, c=20.$

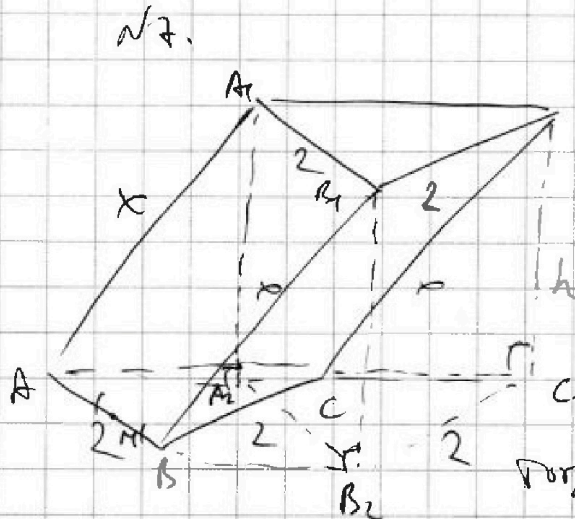
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Г.к.  $ABCA_1B_1C_1$  - призма, то

плоск.  $ABC \parallel$  плоск.  $A_1B_1C_1$ .

Пусть  $A_2, B_2, C_2$  - проекции

$A_1, B_1, C_1$  на плоск.  $ABC$ .

Тогда  $A_2B_2 \parallel B_2C_2 \parallel C_2A_2 \parallel$

~~плоск.  $ABC$~~  Г.к.  $C_1C_2, A_1A_2, B_1B_2$  - перпендику. плоск.  $ABC$ , то

$$\angle B_2C_2C_1 = \angle B_2C_2A_1 = \angle A_1A_2B_2 = \angle A_2B_2B_1 =$$

$$\angle A_1A_2C_2 = \angle A_2C_2C_1$$

Тогда  $S_{A_1C_1C_2} = 2 \cdot h = S_{A_1B_1B_2} = S_{B_1C_1C_2}$ .

Пусть, считаеме единичными,  $S_{A_1B_1A_2} = 1$  и площадь ост. -  $S$

Г.к.  $A_1C_1C_2$  - проекция  $A_1C_1C_1$  на плоск.  $A_1C_1C_2$ , то  $S_{A_1C_1C_2} =$

$$S_{A_1C_1C_2} = S_{A_1C_1A_2} \cdot \sin \alpha_1, \text{ где } \alpha_1 - \text{уг. при верш. } A_1, \text{ между}$$

плоск.  $A_1C_1A_2$  и плоск.  $A_1C_1C_2$ .

$$S_{A_1B_1B_2} = S_{B_1C_1B_2} \cdot \sin \alpha_2, \text{ где } \alpha_2 - \text{уг. при верш. } B_1, \text{ между}$$

плоск.  $B_1C_1B_2$  и плоск.  $B_1C_1B_2$ .

$$\text{Г.к. } S_{A_1B_1B_2} = S_{A_1C_1A_2} = S, \text{ то } \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2, \text{ Г.к.}$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2, \text{ то } S_{A_1C_1C_2} = S_{A_1C_1A_2} = 2 \cdot h, \text{ Тогда } S_{A_1C_1C_2} = 2 \cdot h,$$

иначе  $S_{A_1C_1C_2} < 2 \cdot h$ , но тогда плоск.  $A_1C_1A_2$  и плоск.  $B_1C_1B_2$ ,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

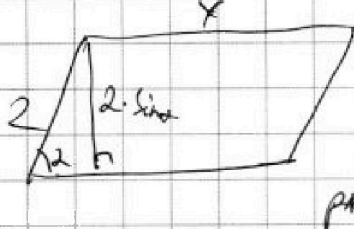
Что известно по условию, что это грани треугольного призма,

Значит  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ,  $AA_1 = BB_1$ , так это 2 противоположн.

Стор. параллелограмм.  $AA_1B_1B_1$   $AA_1C_1C_1$   $BB_1C_1C_1$ , так  $BB_1$  и  $CC_1$

это 2 противоположн. стороны параллел.  $BB_1C_1C_1$ .

Параллелограмм  $AA_1C_1C_1$  и  $BB_1C_1C_1$  равны, так:



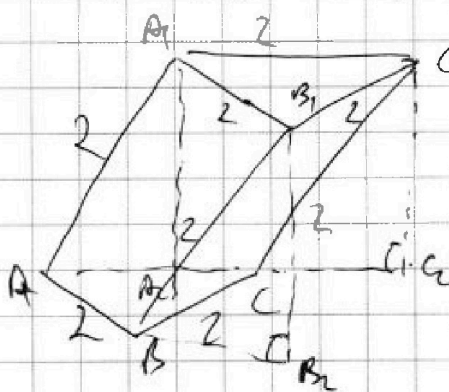
$S = 2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$ . Г.к.  $\alpha$  и  $2$  одинаков.  
равны,  $\alpha$  и  $2$  равны, а значит и площадь равны.

Потому  $AA_1C_1C_1$  симметр.  $BB_1C_1C_1$  относительно  $CC_1$ , проходя через

$C_1, C$  и середину  $AB$ . Потому  $AA_1B_1B_1$  симметр. относительно  $AA_1$ , проходя через  $A_1, A$  и  $B_1, B$ , г.к.  $B_1, B$  симметр.  $A_1$  относительно  $CC_1, C_1, C$  и

$A$  симметр.  $B$  относительно  $CC_1, C_1, C$ . Потому  $AB \perp CC_1, C_1, C$  и  $A_1B_1 \perp CC_1, C_1, C$ .

Потому  $AA_1B_1B_1 \perp CC_1, C_1, C \Rightarrow AA_1B_1B_1$  - симметр. относительно  $CC_1, C_1, C$ , потому, г.к.  $AA_1, B_1B_1$  - это параллелограмм, то это прямоугол. (г.к.  $AB$  симметр. относительно  $CC_1, C_1, C$ )  $\Rightarrow S_{AA_1B_1B_1} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ .



указано в условии  $AA_1B_1B_1$   $AA_1C_1C_1$   $BB_1C_1C_1$   
требуется, что  $AA_1B_1B_1$  и  $AA_1C_1C_1$

Ответ: 8

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos x = 23 \cos 2x + P$$

$$\cos 3x = 2 \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 \sin^2 x)$$

$$2 \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)) = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 + 2 \cos^2 x) = 2 \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$\cos 3x + 3 \cos x = 23 \cos x$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 23t \Rightarrow 4t^3 - 3t + 6t - 23t = 0 \Rightarrow 4t^3 - 16t = 0$$

$$4t^3 - 16t = 0 \Rightarrow 4t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2, t = -2$$

$t = 2$

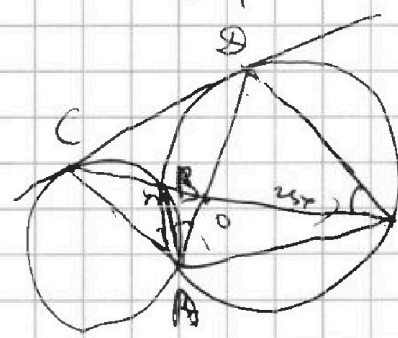
$12t^2 - 12t + 3 = 0$



мин. функция:  $t = 1, -4, -6, -3, 3$

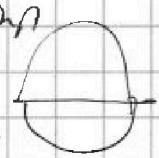
макс. функция:  $t = 1, 4, 6, 3, -3$

$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \quad P = 4, 6 \quad P \in (-6, 4)$



$R = \frac{7500 \cdot \sin \alpha}{4} + 7500 \cdot \cos \alpha$

$R = \frac{7500 \cdot \sin \alpha}{4} - 1$



$ca \times \frac{1}{2}$

$\sin \alpha = \frac{4}{5}$

$\frac{2 \cdot 25 \cdot \sin \alpha}{2}$

$4 \cdot \frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 7$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 1 \frac{3}{2}$

$= 3(2t+1)^2$

$t^2 - 4t + 1 = 0$

$7500 - 7500 \cdot 4 = 7$

$\sim 4(1875 - 7500 \cdot 1)$

$\frac{7500}{4}$

$\frac{7500 \cdot \sin \alpha}{4} + 7500 \cdot \cos \alpha$

$\frac{7500 \cdot \sin \alpha}{4} + 7500 \cdot \cos \alpha$

$R = \frac{7500 \cdot \sin \alpha}{4} - 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper. The page contains several diagrams and extensive calculations.

**Diagrams:**

- Top left: A small rectangle with dimensions  $2x$  and  $2y$ .
- Top center: A circle with points  $A, B, C, D, E, F$  on its circumference. Lines connect these points, forming various triangles. A point  $K$  is marked inside the circle.
- Bottom center: A 3D diagram of a rectangular prism with vertices  $A, B, C, D, E, F, G, H$ . Diagonals and other lines are drawn to illustrate a geometric property.
- Right side: A vertical list of numbers  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ .
- Bottom right: A diagram of a triangle with height  $h$  and base  $2x$ .

**Calculations and Text:**

- Initial equations:  $a-c=3, b-c=1$ , leading to  $a=3+c, b=c+1$ .
- Similar triangles:  $\triangle CAB \sim \triangle DAB$ ,  $\triangle CDB \sim \triangle DAB$ ,  $\triangle CDB \sim \triangle DAB$ .
- Proportions:  $\frac{OC}{OB} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{OE}{BE} = \frac{2}{5}$ .
- Area calculations:  $(a-c)(b-c) = 2p^2$ ,  $(a-c)(b-c) = 2$ .
- Final results:  $b=28, c=20, a=30$  and  $b=24, a=21, c=20$ .
- Arithmetic:  $57^2 = 3249$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$x_4 = x+7$$

$$x_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{15x^2 + 9x - 18}$$

$$x_4 = \sqrt{15x+6}$$

$$x_2 = \sqrt{15x+6}$$

$$x_4 = \sqrt{15x+6}$$

$$x_{12} = x_4 \cdot \sqrt{15x+6} = (x+7) \cdot \sqrt{15x+6}$$

$$\sqrt{x-3} \cdot (x+7 - \sqrt{15x+6}) = 0$$

$$x_4 = \sqrt{15x+6}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ 15x+6 \geq 0 \\ x^2 + 8x+6 = (15x+6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 + 8x+6 = 0 \end{cases}$$

2)  $x < 3$ :

$$\sqrt{15x+6} \geq 0 \Rightarrow 15x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

$$x_2 = (x+7) \cdot \sqrt{3-x} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$(x^2 + 8x+6)(3-x) = (15x+6)(x-3)$$

$$(3-x)(6^2 + 8x+6) = 0$$

$$x_2 = -1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{235-2x+x^2}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2x}$$

$$\sqrt{y-20+2y} = \sqrt{y^2+10y+12}$$

$$5-x \leq 12$$

$$32 > 12$$

$$\sqrt{225-2x} \leq 15$$

$$|y-20| + 2|y-35| \leq 15$$

$$15 \leq |y-20| + |y-35| \leq 15$$

$$y \geq 35$$

$$y-20+2y-35+2y-35 \geq 15$$

$$y \geq 20$$

$$20-y+35-2y-35-2y \geq 15$$

$$z \geq 0$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{235-2x+x^2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$x+7-5+x = 4(x+7)(5-x) + 36 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$2x+2 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 140 - 20x - 36 - 24\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$-15 \leq z \leq 15$$

$$x \geq -7$$

$$5-x \leq 12$$

$$-32 \rightarrow +2$$

$$\sqrt{12+8}$$

$$-32 \geq -12$$

$$12 \leq 12$$

$$(254)$$

$$5 \geq 20 \rightarrow -7$$

$$20 \leq y \leq 35$$

$$y-20-y+35$$

$$15 \geq 15$$

$$|y-20| + |y-35| = 15$$

$$|y-35| = 20$$

$$y \geq 35$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 174 - 10x - 4x^2$$

$$4x^2 + 10x - 174 \leq 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6$$

$$2x^2 + 5x - 8 \leq 0$$

$$2x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$2\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$2x^2 + 7x - 21$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{(x+2)(5-x)} = (5-x)(7+x) + 10 - 2x\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$12 - 2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 140 - 8x - 4x^2 - 32 - 2x\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$\sqrt{12+6} - \sqrt{12+6} = 164 - 8x - 4x^2$$

$\geq 0$

$$4x^2 + 8x - 164 \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 41 \leq 0$$

$$484(35 - 2x - x^2) = (64 - 2x - 4x^2) \cdot (4 + 164 + 168 + (2\sqrt{4})^2)$$

$$484 \cdot 35 - 484 \cdot 2x - 484x^2 = 4 + 164 + 168 + (2\sqrt{4})^2$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} - 2\sqrt{35-2x-x^2} = -6$$

$$x=1$$

$-12$

$$35 - 2x - x^2$$

$$110x - 2x - 2$$

$$35 + 2 - 12 = 25$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + \frac{7+x}{4} + \frac{5-x}{4}$$

$$\left(\frac{5-x}{2} - 1\right) + \left(\frac{7+x}{2} - 1\right) = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + \frac{5-x+7+x}{2} = \left(\sqrt{5-x} + \sqrt{7+x}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$a=b$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 6$$

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} + \frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{x+7} - 2\sqrt{5-x} + 10 = 4\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{12-t} + 6 = 2\sqrt{t(12-t)}$$

$$t - 2\sqrt{12t-t^2} + 12-t = 4\sqrt{t(12-t)} - 24\sqrt{t(12-t)} + 36$$

$$12 - 2\sqrt{12t-t^2} = 48t - 4t^2 - 24\sqrt{t(12-t)} + 36$$

$$24 - 22\sqrt{t(12-t)} + 48t - 4t^2 = 0$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$