



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

b_n - геом. прогрессия

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b_1 \cdot q^6$$

$$b_{13} = 5-x = b_1 \cdot q^{12}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \\ \frac{13x-35}{(x+1)^3} \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8 = b_7 \cdot q^8$$

тогда: $b_{15} = b_7 \cdot q^8$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$(13x-35)(x+1) = \frac{(13x-35)}{(x+1)^3} \cdot q^{16}$$

1) если $x = \frac{35}{13}$, тогда: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$.

такого не бывает, т.к. $b_{13} = b_7 \cdot q^6$
 $5 = 0 \cdot q^6$

2) если $x \neq \frac{35}{13}$, тогда: $(x+1) = \frac{q^{16}}{(x+1)^3} \cdot (x+1)^3 \neq 0$

$$(x+1)^4 = q^{16}$$

$$q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

если $x < -1$, тогда q^2 равно отрицательному числу. такого не бывает.

~~$q^2 = \sqrt{x+1}$~~
 ~~$q^2 = \sqrt{x+1}$~~

~~тогда~~

тогда, $b_{15} = b_{13} \cdot q^2$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x)\sqrt{|x+1|}$$

если $x+1 > 0$, тогда $13x-35 > 0$

$$x > 1$$

$$x > \frac{35}{13}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x > \frac{35}{13} \\ -x < -\frac{35}{13} \\ 0 < 5-x < 5-\frac{35}{13} \end{array}$$

$$(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(x+1)$$

$$13x-35 = x^2-10x+25$$

$$x^2-23x+60=0.$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{23+17}{2} = 20 > \frac{35}{13} & \text{Ⓢ} \\ x = \frac{23-17}{2} = 3 > \frac{35}{13} & \text{Ⓢ} \end{cases}$$

если $x+1 < 0$, то $13x-35 < 0$
 $x < -1$ $x < \frac{35}{13}$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &x < -1 \\ &-x > 1 \\ &5-x > 6 \end{aligned}$$

тогда, $(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(-x+1) \quad | :(-x+1) \neq 0$

$$-13x+35 = 25 - 10x + x^2$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3+7}{2} = 2 > -1 & \text{не удовл. условию} \\ x = \frac{-3-7}{2} = -5 < -1 & \text{Ⓢ} \end{cases}$$

итак, $x = 3, x = 20, x = -5$.

Ответ: $x = -5; x = 3; x = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2)$$

рассмотрим (2): $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$
 раскроем модули: $\begin{matrix} - & + & + \\ -1 & -12 & + \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 \text{ модуль} \\ y \text{ 2 модуль} \end{matrix}$

1 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$

тогда, $y+1 + 3y-36 = \sqrt{169-z^2}$ ОДЗ:
 $4y-35 = \sqrt{169-z^2}$ $169-z^2 \geq 0$

так как $z^2 \geq 0$
 $-z^2 \leq 0$
 $0 \leq 169-z^2 \leq 169$
 $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$

и, $y \geq 12$
 $4y \geq 48$
 $4y-35 \geq 13$

поучаем, что левая часть больше или равна 13, а правая — меньше или равна 13. \Rightarrow равенство достигается только при:

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ 4y-35 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases}$$

2 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq y \leq 12$

тогда, $y+1 - 3y+36 = \sqrt{169-z^2}$
 $-2y+37 = \sqrt{169-z^2}$

т.к. $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (ранее доказано)

а $-1 \leq y \leq 12$
 $-12 \leq -y \leq 1$
 $-24 \leq -2y \leq 2$
 $13 \leq -2y+37 \leq 39$

поучаем, что левая часть ≥ 13 , а правая ≤ 13 \Rightarrow равенство достигается только при:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ -2y+37 = 13 \end{cases} \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases} \text{ (также получим в 1 случае)}$$

$$\text{3 случай: } \begin{cases} y+1 \leq 0 \\ y+12 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -1 \\ y \leq -12 \end{cases} \Rightarrow y \leq -1.$$

тогда, $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (равен

$$\text{тогда, } -y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2} \\ -4y+35 = \sqrt{169-z^2}$$

т.к. $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (равен доказано)

$$\begin{aligned} \text{а} \quad & y \leq -1 \\ & -4y > 4 \\ & -4y+35 > 39 \end{aligned}$$

получается, что левая часть больше или равна 39, а правая часть меньше или равна 13. тогда, решений нет.

Итак, единственное решение (2) - $z=0, y=12$.

подставим его в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$$

пусть ~~$\cos x = t$ ($t \in [-1; 1]$)~~, тогда:

$$2(2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2 \cdot \cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$$

пусть $\cos x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

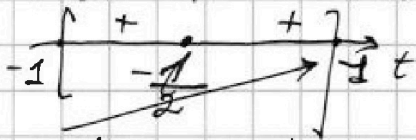
$$2(2t^2 - 1) \cdot t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

рассмотрим функцию $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) = 12\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$



$$f_{\max}(-1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$f_{\min}(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3,5$$

$$\text{итак, } -4 \leq 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \leq 10$$

$$-4 \leq p \leq 10$$

примем, при любом значении $p \in [-4; 10]$ t будет иметь ровно один корень (т.к. $f(t)$ — монотонно возрастающая функция)

$$\text{при } p = -3: 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = -3$$

$$t(4t^2 + 6t + 3) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{или} \quad 4t^2 + 6t + 3 = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$D = 36 - 3 \cdot 4 \cdot 4 < 0.$$

решений нет.

$$\text{при } p = -4: 4t^3 + 6t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t = -1 \quad \text{или}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = -3,5: 4t^3 + 6t^2 + 3t + 0,5 = 0.$$

$$\text{или } t = -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

т.к. p принимает значения от -4 до

10 , ~~$\cos x = (p-3)$~~ \Rightarrow функция

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

~~мысли~~

$$2(2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

мысли $\cos^2 x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

рассмотрим $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12 \left(t^2 + t + \frac{1}{4} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

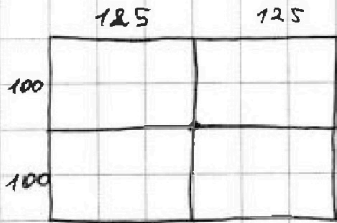


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



дан прямоугольник \Rightarrow центр \Rightarrow совпадает с точкой пересечения его "средних линий"

заметим, что изображение, полученное с помощью центральной симметрии получено как двойное отражение (т.к. расстояние от начальной картинке до центра должно равняться расстоянию от центра до картинке, симметричной центру)

т.к. симметричным должно быть множество, а всего должно быть закрашено 8 клеток \Rightarrow нужно найти варианты расположения 4 точек, т.к. остальные 4 определяются однозначно исходя из симметрии

и т.к. "средние линии" проходят по линиям клеток \Rightarrow ~~они~~ (т.к. $250 : 2$ и $200 : 2$) \Rightarrow клетки, между которыми проходит бы одна из средних линий и может быть.

итак, способов задать множество, симметричное центра: $C_{250 \cdot 100}^4 = C_{25000}^4$

способов задать множество, симметричное вертикальной средней линии: $C_{100 \cdot 125}^4 = C_{25000}^4$

способов задать множество, симметричное горизонтальной средней линии: C_{25000}^4

и т.к. центральная симметрия — есть симметричное относительно обоим средним линиям \Rightarrow

\Rightarrow если намлись варианты, которое симметрична по 2 критериям, то они симметрична и

относительно 3. т.к. точек 8, а точек симметрично относительно всех 3 симметрий \Rightarrow

\Rightarrow это равносильно способам задать 2 точки из



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

образованных средними линиями прямоугольников \Rightarrow таких множеств: $C_{100}^2 \cdot 125 = C_{12500}^2$
т.к. "известные" симметрии симметрично сразу 3 симметрии \Rightarrow также сразу 3 симметрии посчитано $\frac{3}{2}$ трижды
итак, способов закрасить 8 клеток так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы 1-й из ~~двух~~ симметрий:

$$3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 = \frac{3 \cdot 25000!}{4! \cdot 24996!} - \frac{2 \cdot 12500!}{4! \cdot 12496!}$$

Ответ: $\frac{3 \cdot 25000!}{4! \cdot 24996!} - \frac{2 \cdot 12500!}{4! \cdot 12496!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a > b & (1) \\ a - b \neq 3 & (2) \\ (a - c)(b - c) = p^2, p - \text{простое} & (3) \\ a + b^2 = 560 & (4) \end{cases}$$

рассмотрим (3): $(a - c)(b - c) = p^2$, где p - простое

замечим, что раз p - простое и p^2 представлено в виде произведения двух чисел, то:

1 случай: $\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p + c \\ b = p + c \end{cases}$, но $a > b$. ~~или~~ противоречие

2 случай: $\begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -p + c \\ b = -p + c \end{cases}$, но $a > b$ противоречие

3 случай: $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + c \\ b = p^2 + c \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow b > a$ противоречие

4 случай: $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow a > b$

тогда, $a - b = p^2 + c - 1 - c = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ следовательно:

$$p + 1 \neq 3$$

$$p - 1 \neq 3 \Rightarrow p : 3 \Rightarrow p = 3 \text{ (т.к. } p \text{ - простое)}$$

тогда, $a = 9 + c$; $b = 1 + c$

(4): $9 + c + 1 + 2c + c^2 = 560$

$$c^2 + 3c + 10 - 560 = 0$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0.$$

$$D = 9 + 4 \cdot 550 = 2209 = 47^2$$

$$\begin{cases} c = \frac{-3 + 47}{2} = 22 \Rightarrow a = 31; b = 23 \\ c = \frac{-3 - 47}{2} = -25 \Rightarrow a = -16; b = -24 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 случай:
$$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } p^2 > 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a > b \end{array}$$

тогда, (2): $a - b = c - 1 - c + p^2 = p^2 - 1 =$

$$= (p+1)(p-1)$$

$\begin{matrix} p+1 \nmid 3 \\ p-1 \nmid 3 \end{matrix} \Rightarrow p:3 \Rightarrow p=3$ (т.к. p - простое)

тогда, $\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \end{cases}$

(4): $c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560$

$$c^2 - 17c + 80 - 560 = 0$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

$$D = 17^2 + 480 \cdot 4 = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$$

$$\begin{cases} c = \frac{17+47}{2} = 32 \Rightarrow a = 31; b = 23 \\ c = \frac{17-47}{2} = -15 \Rightarrow a = -16; b = -24 \end{cases}$$

Ответ: $(a, b, c) = (31; 23; 22);$

$(a, b, c) = (-16; -24; -25);$

$(a, b, c) = (31; 23; 32);$

$(a, b, c) = (-16; -24; -15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

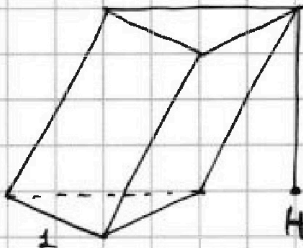
СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

1 2 3 4 5 6 7

Срок = 4; 4; 3



МНОЖ:

1 2 3 4 5 6 7

$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 155 \\ 1205 \\ \hline \end{array}$

$3 > \frac{35}{13}$
 $39 > 35$

$\begin{array}{r} \times 13 \\ 39 \\ \hline 39 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2550 \\ \times 4 \\ \hline 2200 \\ 2209 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 23 \\ + 17 \\ \hline 40 \cdot 10 \\ 23 \\ - 17 \\ \hline 6 \end{array}$

№ 1

$\begin{array}{r} 31 \\ \times 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}$

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^6 = b_7 \cdot q^6$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6$$

$$b_{13} = 5-x$$

$$b_{15} - b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$(13x-35)(x+1) = \frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot q^{48}$$

$$q^{48} = \frac{(13x-35)(x+1)(x+1)^3}{(13x-35)} = (x+1)^8$$

$\begin{array}{r} 10 \\ - 529 \\ 240 \\ \hline 289 \\ + 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ + 119 \\ \hline 238 \end{array}$
 $\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ + 69 \\ \hline 46 \\ \hline 529 \end{array}$

найдем если $x = \frac{35}{13}$: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$
 и добавим.

$$q^4 = x+1 \Rightarrow q^2 = \sqrt{x+1} \quad (1. \text{ к } -\sqrt{x+1} < 0)$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35 \cdot (x+1)^2(x+1)}{(x+1)^3}}$$

$\begin{array}{r} \times 40 \\ 60 \\ \hline 240 \end{array}$
 $\begin{array}{r} \times 23 \\ 46 \\ + 69 \\ \hline 115 \\ - 539 \\ \hline 240 \\ \hline 299 \end{array}$

$$5-x = \sqrt{13x-35}$$

$$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 299$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos x + 3 \cos 2x + 3 \cos x = p$$

$$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 3 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \cos x = p$$

$$2 \cdot \cos x (\cos^2 x - 1 + 1) + 3(\cos^2 x - 1) + 3 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x - 3 + 3 \cos x - p = 0$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x - (p + 3) = 0$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

~~cos~~

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$x = \frac{x+y + x-y}{2}$$

$$y = \frac{x+y - x-y}{2}$$

№6 a, b, c ∈ Z

$$a > b$$

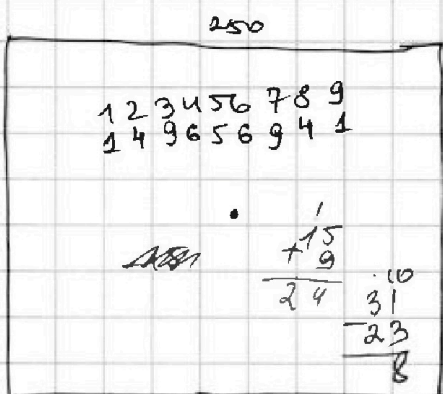
$$a - b \mid 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\begin{array}{r} 1920 \\ \times 289 \\ \hline 2209 \end{array}$$

200



$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 36 \\ \hline 54 \\ 162 \\ \hline 324 \\ 252 \\ \hline 198 \\ 108 \\ \hline 324 \\ 252 \\ \hline 198 \\ 108 \\ \hline 702 \\ 360 \\ \hline 252 \\ 108 \\ \hline 360 \\ 198 \\ \hline 198 \\ 108 \\ \hline 306 \\ 198 \\ \hline 504 \\ 198 \\ \hline 702 \\ 360 \\ \hline 1062 \end{array}$$

$$\frac{200}{250} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 560 \\ \hline 560 \\ 380 \\ \hline 1920 \end{array}$$

100

1000

$$-135 - 35 < 0$$

$$-5 + 1 = -4$$



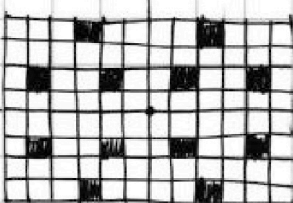
1) мощностью сетки.

$$\begin{array}{r} 47 \\ -17 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ +47 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -25 \\ \hline 16 \end{array}$$

32



$$\begin{array}{r} 22 \\ +22 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ +33 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 168 \\ \hline 2209 \end{array}$$

-16

$$\begin{array}{r} 47 \\ -3 \\ \hline 44 \end{array}$$

-16



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№65

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p.$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2(2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

$$\cos x = t \quad (t \in [-1; 1]) \Rightarrow$$

$$2(2t^2 - 1)t + 3(2t^2 - 1) + 5t = p$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p.$$

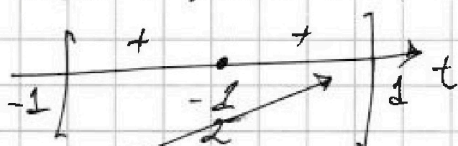
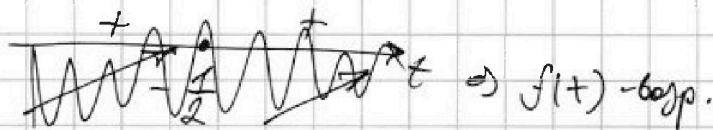
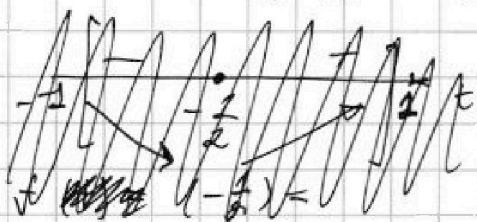
$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$D = 144 - 3 \cdot 12 \cdot 4 = 12^2 - 12^2 = 0.$$

$$t = \frac{-12}{2 \cdot 12} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 12\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 &= \\ &= 12\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) = \\ &= 12t^2 + 12t + 3 \end{aligned}$$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3,5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4.$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10. \Rightarrow p \in [-4; 10].$$

~~cos 3x~~

~~cos 2x~~

$$p = 3 : t(4t^2 + 6t + 3)$$

$$36 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0.$$

$$\cos x = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{x+3}{a}} - \sqrt{\frac{4-x}{b}} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$4-x=a$$

$$x=a+4$$

$$x+3=a+4+3=a+7$$

$$\sqrt{a+7} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{a+7}$$

$$\sqrt{a+7} + 5 = 2\sqrt{a+7} + \sqrt{4-x}$$

$$a+7+10\sqrt{a+7}+25 = 4\sqrt{a+7} + \sqrt{4-x} + 5$$

$$\sqrt{a+7} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{a+7}$$

$$\sqrt{a+7} + 5 = 2\sqrt{a+7} + \sqrt{4-x}$$

$$a+7+10\sqrt{a+7}+25 = 4(a+7) + a + 4 \cdot a \cdot \sqrt{a+7}$$

$$a+32+10\sqrt{a+7} = 4a^2+28a+a+4a\sqrt{a+7}$$

$$(10-4a)\sqrt{a+7} = 4a^2+28a-12$$

$$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2a^2+14a-16$$

$$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2(a^2+7a-8)$$

$$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2(a-1)(a+8)$$

$$(7-2a)^2(a+7) = 4(a-1)^2(a+8)^2$$

$$f(a) = (7-2a)^2 \cdot (a+7)$$

$$f'(a) = 2(7-2a) \cdot (-2) \cdot (a+7) + (7-2a)^2 =$$

$$= -2(7-2a)(a+7) + (7-2a)^2 = (7-2a)(7-2a-4a-28) =$$

$$= (7-2a)(-6a-21) = (7-2a)(7-2a-4(a+7)) =$$

$$= (7-2a)(-6a-21) = (7-2a) \cdot (-3) \cdot (2a+7)$$

a =



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \neq 0$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$~~a - b - 2ab = 5~~$$

$$~~2a - 2b + 10 = 4ab~~$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq \sqrt{4ab} \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ (a+b)^2 &\geq 4ab \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ a^2 + b^2 &\geq a - b + 5 \end{aligned}$$

$$x+3 = a$$

$$x = a - 3$$

$$4 - x = 4 - a + 3 = 7 - a$$

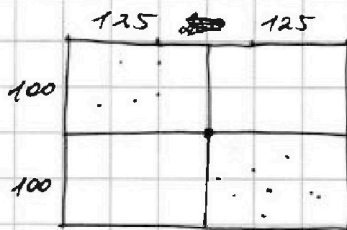
$$\begin{array}{r|l} x+3 & 4-x \\ a & \end{array}$$

$$a - x + 3 = 4 - x - a$$

$$2a = 1$$

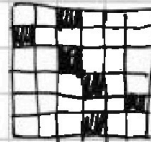
$$a = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{4-a} + 5 \in 2\sqrt{a(7-a)}$$



Для центральной симметрии:
выбираются 4 ~~клетки~~ из $250 \cdot 100$,
остальное и выбирается
однозначно.

Для верт. симметрии: 4 клетки из $125 \cdot 200 = 250 \cdot 100$



остальное - однозначно

Для гориз. симметрии:

заметим, что если существуют совместно любые 2 из симметрий, то какие существуют будет 4, 3 \Rightarrow общие симметрии посчитаем 3 раза: для всех симметрий:
итог: $C_{25000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 = 2 \cdot 2$ клетки из $125 \cdot 100$
остальное - однозначно.

$$\text{итог: } 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

$$\frac{25000!}{4! \cdot (25000-4)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

~~3~~ (2): $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$
 раскроем модули:

1 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$

тогда, $y+1 + 3y - 36 = \sqrt{169-z^2}$
 $4y - 35 = \sqrt{169-z^2}$ ОДЗ: $169-z^2 \geq 0$

так как $z^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 169-z^2 \leq 169$
 $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$

а $y \geq 12$
 $4y \geq 48$
 $4y - 35 \geq 13 \Rightarrow$ правая часть уравнения

~~меньше 13, а левая - не боль~~

меньше или равна 13, а левая - больше или равна

13 \Rightarrow равенство достигнётся только при

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ 4y - 35 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 12 \end{cases}$$

подставим полученные значения в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 12+x-x^2 \geq 0 \end{cases}$



$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

$$x+3 + 10\sqrt{x+3} + 25 = 2(12+x-x^2) + 4-x + 4\sqrt{(4-x)(12+x-x^2)}$$

$$(x+3)(4-x) = 4x - x^2 + 12 - 3x = -x^2 + x + 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

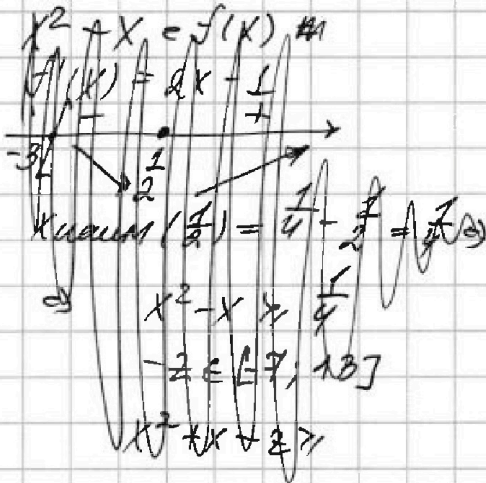
№ 2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-z \geq 0 \\ y+x-x^2+z \geq 0 \\ 169-z^2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -3 \\ 4-z \geq x-3 \Rightarrow z \leq 7 \\ z^2 \leq 169 \Rightarrow z \in [-13; 13] \\ y+x-x^2+z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z \in [-13; 7]$$



$$\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$$

$$y+1 + 3y - 36 = 4y - 35$$

$$4y \geq 48$$

$$4y - 35 \geq 13, \text{ при этом}$$

$$\sqrt{169-z^2} \leq 13$$

тогда, $4y - 35 = 13 \Rightarrow y = 12$

$$z = 0 \quad z = 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

1) $x = -3: 5 = \sqrt{4+3} + \sqrt{4-(-3)}$

$$5 = \sqrt{7}$$

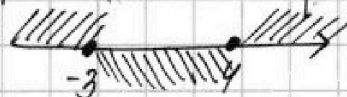
$$x = 4: \sqrt{7} + 5 = 0 + 0$$

$$\sqrt{7} + 5 \neq 0$$

решения нет.

ОДЗ:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 12 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$



$$x = 3$$

$$x = 4$$

2) $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases}$

$$y \in [-1; 12]$$

$$-1 \leq y \leq 12$$

$$-24 \leq -2y \leq 2 \Rightarrow 13 \leq -2y + 37 \leq 39$$

$$y+1 - 3y + 36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-2y + 37 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$

$$\begin{matrix} 37 \\ -24 \\ \hline 13 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -2y + 3z = 13 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 24 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ранее рассмотрено.}$$

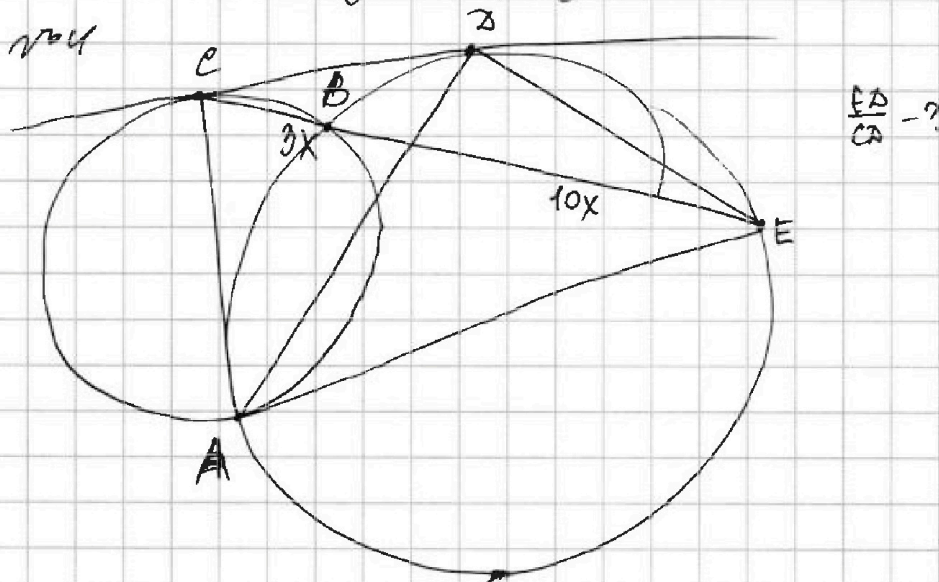
$$3) \begin{cases} y \leq -1 \\ y \leq 12 \end{cases} \Rightarrow y \leq -1.$$

$$-y - 1 - 3y + 36 = \sqrt{169 - z^2}$$

$$-4y + 35 = \sqrt{169 - z^2}$$

$$\begin{aligned} y &\leq -1 \\ -y &\geq 1 \\ -4y &\geq 4 \\ -4y + 35 &\geq 39 \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \sqrt{169 - z^2} \leq 13 \quad \text{решения нет.}$$
$$-4y + 35 \geq 39$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

