



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB перескает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_4 = \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}$ $(75x-9)(x-6) \geq 0$ $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 $a_{15} = \sqrt{\frac{20x-9}{x-6}}$ $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 Таким образом: $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$.
 Рассмотрим $x = \frac{9}{25}$: $a_4 = 0$; $a_{15} = 0$; $a_9 = \frac{9}{25} + 3 = 0$. Тогда
 быть не может. $x \neq \frac{9}{25}$ (или все равно в том случае, или никто не равен нулю).
 $x \in (-\infty; \frac{3}{25}] \cup (6; +\infty)$
 Пусть $a_2 = 6q^{2-1}$, где 6 - первый член прогрессии, q - знаменатель
 тогда $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9}\sqrt{x-6}}$ $x \geq 3 = 9^2 \sqrt{25x-9}\sqrt{x-6} \geq 0$; $x \geq -3$.
 $\frac{a_{15}}{a_7} = q = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^2}} = \frac{1}{|x-6|}$
 $q^4 = \frac{1}{|x-6|}$; но $q^4 > 0$; поэтому $q^4 = \frac{1}{x-6}$; $q = \pm \sqrt[4]{x-6}$.
 $\frac{a_9}{a_4} = q^2 = \frac{x-3}{\sqrt{25x-9}\sqrt{x-6}}$; $q^4 = \frac{1}{x-6}$.
 Рассмотрим случаи: $x > 6$ и $x \leq 6$.
 $x > 6$:
 $(x+3)^2 = 25x-9$; $x^2 - 19x + 18 = 0$ $\begin{cases} x=18 \\ x=1 \end{cases}$ н.к. $x \geq 6$, но перед тем как $x=18$.
 $x \leq 6$:
 $(x+3)^2 = -(25x-9)$; $x^2 + 31x = 0$ $\begin{cases} x=-31 \\ x=0 \end{cases}$ н.к. $x \geq -3$, но перед тем как $x=0$.
 Значит, $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$, только эти значения могут быть. Проверим на $x=18$:
 $a_4 = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$
 $a_9 = 21$
 $a_{15} = \frac{21}{24\sqrt{3}}$ Значу увеличим $q = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{42}}$ и $b = \frac{a_4}{q^6}$.
 $x=0$:
 $a_4 = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$ Значу увеличим $q = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$ и $b = \frac{a_4}{q^6}$.
 $a_9 = 3$
 $a_{15} = \sqrt{\frac{9}{6^3}} = \frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.
 Ответ: $\begin{cases} x=18 \\ x=0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{y-4x^2+2} \\ 4y+4 + 4|y-5| = \sqrt{81-2^2} \end{cases}$$

Найдём минимальное значение
 $4y+4 + 4|y-5|$.

Рассмотрим 3 промежутка: $y \in (-\infty; -4]$; $y \in [-4; 5]$; $y \in [5; +\infty)$

$y \in (-\infty; -4]$:
 $4y+4 + 4|y-5| = -4-4-4y+20 = 16-5y$. При y с ростом y значение убывает, поэтому минимум в крайней точке $y = -4$; $\min = 16 - 5(-4) = 36$.

$y \in [-4; 5]$:
 $4y+4 + 4|y-5| = 4y+4-4y+20 = 24-3y$. С ростом y значение убывает, поэтому $y = 5$; $\min = 24 - 3 \cdot 5 = 9$.

$y \in [5; +\infty)$:
 $4y+4 + 4|y-5| = 4y+4+4y-20 = 8y-16$. С ростом y значение возрастает, поэтому $y = 5$; $\min = 5 \cdot 5 - 16 = 9$.

Получим образом: $4y+4 + 4|y-5| \geq 9$, и минимальное значение в $y=5$.

С другой стороны $\sqrt{81-2^2} \leq 9$ т.к. $2^2 > 0$, и максимальное значение в $z=0$. Можно подставить и найти равенство. Значит, $y=5$; $z=0$. Подставим эти значения в первое уравнение:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x^2+2} = 2\sqrt{(1-x)(x+5)} \quad x+5 \geq 0 \quad x \in [-5; 1]$$

Пусть $\sqrt{x+5} = A$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, $1-x \geq 0$
 $\sqrt{1-x} = B$, тогда $A-B+4 = 2AB$ и $A^2+B^2 = 6$

$$\begin{cases} A-B+4 = 2AB \\ A^2+B^2 = 6 \end{cases} \quad A^2+B^2-2AB = 6 - (A-B+4) \quad (A-B)^2 = 6 - (A-B) - 4$$

$$(A-B)^2 + (A-B) - 2 = 0$$

$$\text{Отсюда } A-B = 1$$

$$A-B = -2$$

подставим эти значения в первое уравнение:

$$\begin{cases} A = B+1 \\ 1+4 = 2B(B+1) \end{cases} \quad \begin{cases} A = B+1 \\ 2B^2+2B-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = B+1 \\ B = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = B-2 \\ -2+4 = 2B(B-2) \end{cases} \quad \begin{cases} A = B-2 \\ 2B^2-4B+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = B-2 \\ B = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$$x = A^2 - 5 = \left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1+1+\sqrt{33}}{4} - 5 = \frac{\sqrt{33}+2}{4} - 5 = \frac{\sqrt{33}-18}{4}$$

$$x = (1-\sqrt{2})^2 - 5 = 3 - 2\sqrt{2} - 5 = -2 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{33}}{4} - 2, y = 5, z = 0 \\ x = -2 - 2\sqrt{2}, y = 5, z = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3(p+4) \cos x = 12 \cos^2 x - 6 + 10$$

$$p \cos^3 x - 12 \cos^2 x + (2p+6) \cos x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

~~Разделим на cos x~~

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

$$(1-p) \cos^3 x = (\cos x - 1)^3$$

$$(1-p) \sqrt[3]{\frac{\cos x - 1}{\cos x}}$$

$$1 - \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \quad \text{н.е.} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

~~Сделаем замену~~ Сделаем замену $t = \sqrt[3]{1-p}$ и выразим t

$$\begin{cases} \frac{1}{1-t} \geq -1, & \begin{cases} 1+t-t > 0, & \frac{2-t}{1+t} > 0 \end{cases} \\ \frac{1}{1-t} \leq 1, & \begin{cases} 1-1+t \leq 0, & \frac{t}{1-t} \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Максимально $t = 0$,
 $t \geq 2$

Трансформации обратной замены:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{1-p} = 0 & \begin{cases} p = 1 \\ p \leq -7 \end{cases} \\ \sqrt[3]{1-p} \geq 2 & \begin{cases} 1-p \geq 8 \end{cases} \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}, \quad x = \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right)$$

Ответ: $\begin{cases} p = 1 \\ p \leq -7 \end{cases}; \quad x = \arccos\left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим точку пересечения AD и u_2 за T . Тогда по лемме Гюсса $CT \parallel DE$ (C и T через P и A соответственно принадлежат прямой u_2 , B и D соответственно).

$\angle CAT = \angle TCD$ (углы между касательной и хордой равны по лемме Гюсса, стягиваемой этой хордой, как и в окружности).

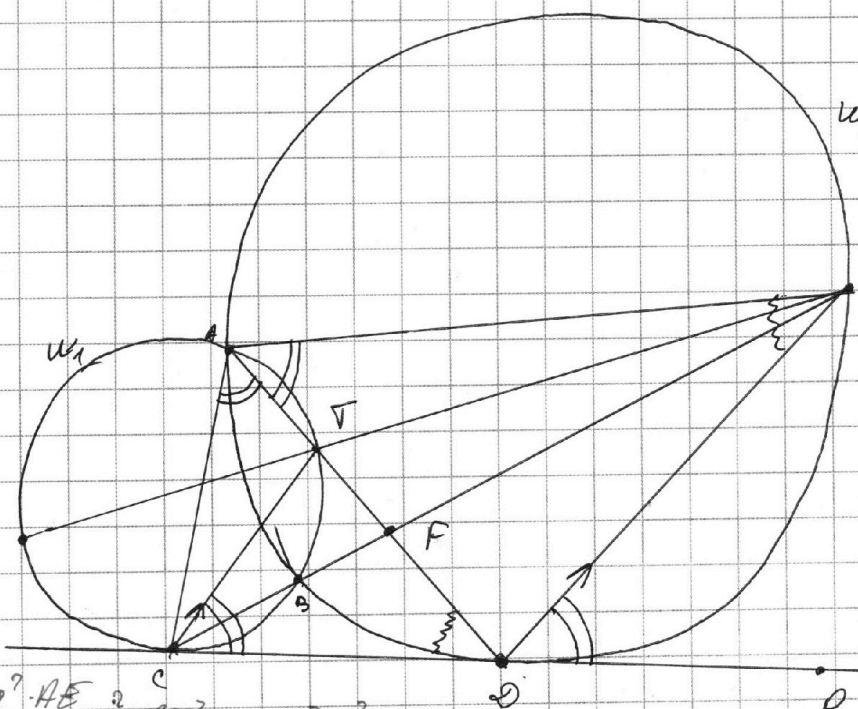
$\angle TCD = \angle EDP$ (как соответственные при параллельных $CT \parallel DE$ и секущей CD через D).

$\angle EAD = \angle EDP$ (углы между касательной и хордой равны по лемме Гюсса, стягиваемой этой хордой, как и в окружности).

Тогда мы имеем $\angle CAT = \angle EAD \Rightarrow AT \parallel BE$ (как соответственные).

Обозначим за F т. пересечения CE и AD . Тогда по лемме Гюсса

$$\frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$



$\angle AED = \angle ADC$
(углы между касательной и хордой).

$\triangle ACD \sim \triangle ABE$
по 2 углам
 $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE}$
 $AC \cdot AE = AD^2$
 $\frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$ (по лемме Гюсса)
2 угла равны.

$$\frac{AC \cdot AE}{AB} = \frac{2}{5} AD^2; \quad AC^2 = \frac{2}{5} AD^2$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \text{по теореме} \quad \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad \text{Ответ: } \sqrt{\frac{2}{5}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

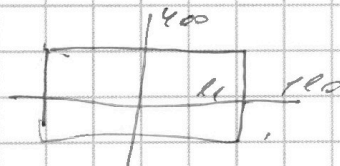
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти количество способов расстановки с сумметрией относительно первой и второй линии и взаимно перпендикулярно относительно каждой из них.

- 1) Симметрия относительно l_1 - первой горизонтальной линии
- 2) Симметрия относительно l_2 - второй горизонтальной линии
- 3) Пересекающаяся, перпендикулярные диаметры - симметрия относительно l_1 и l_2 .

Симметрия относительно l_1 и l_2 одновременно - это симметрия относительно их точки пересечения, то есть относительно центра. Значит, искомым числом будет сумма всех способов с симметрией относительно l_1 , способов с симметрией относительно l_2 , и вместе способов с симметрией относительно центра (т.е. это внутреннее кольцо).

Пусть l_1 параллельна стороне 400, l_2 параллельна стороне 100.



Количество способов расстановки с симметрией относительно l_1 - это число точек на отрезке l_1 и точек на отрезке l_2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

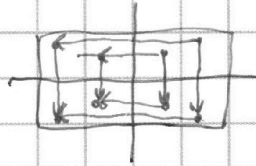
прямоугольника (т.е. стороны и верши по линии горизонтально заданы). Относительно l_2 равно симметрично же.

и оно равно C_{20000}^4



Количество способов выбрать точки с симметрией относительно центра равно числу выборов 2 точек на четверти прямоугольника (оставшие 3 четверти будут зеркально заданы)

и оно равно C_{10000}^2



Площадь симметрично неслучайно заданных точек равно

$$2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$$

Ответ: $2 \cdot C_{20000}^4 - C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$b - a \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

из равенства $(a - c)(b - c) = p^2$ следует лишь следующие возможности (н.с. p - простое).

$a - c = p^2$	$a - c = -p^2$	$a - c = p$	$a - c = -p$	$a - c = 1$	$a - c = -1$
$b - c = 1$	$b - c = -1$	$b - c = p$	$b - c = -p$	$b - c = p^2$	$b - c = -p^2$

$b - a = 1 - p^2 < 0$	$b - a = p^2 - 1$	$b - a = 0$	$b - a = 0$	$b - a = p^2 - 1$	$b - a = 1 - p^2 < 0$
не подходит	$= (p - 1)(p + 1)$	\emptyset	\emptyset	не подходит	не подходит
		не подходит н.с. $b > 0$			

Получаем $b - a = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Если $b - a \neq 3$, то $p - 1 \neq 3$ и $p + 1 \neq 3$. Значит, $p \not\equiv 1 \pmod{3}$
 $p \not\equiv 2 \pmod{3}$.

Значит, $b - a = 3^2 - 1 = 8$.

и для этой пары a, b $a - c = -1$ два случая.

либо $p \equiv 0 \pmod{3}$, $p = 3$,
либо $p = 3$ (единственное простое, делящееся на 3, $\pmod{3}$).

решивши $a = b - 8$ в равенстве $a^2 + b = 710$.

$$(b - 8)^2 + b - 710 = 0; \quad b^2 - 15b - 646 = 0; \quad (b - 34)(b + 18) = 0.$$

$$\begin{cases} b = 34 \\ b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -18 \\ a = -18 - 8 = -27 \\ \begin{cases} c = a - 1 = -28 \\ c = b + 1 = -18 \end{cases} \\ b = 34 \\ a = 34 - 8 = 26 \\ \begin{cases} c = a - 1 = 25 \\ c = b + 1 = 35 \end{cases} \end{cases}$$

найдем и проверим ответ.

Ответ: $a = -27; b = -18; c = -28$
 $a = -27; b = -18; c = -18$
 $a = 26; b = 34; c = 25$
 $a = 26; b = 34; c = 35$.

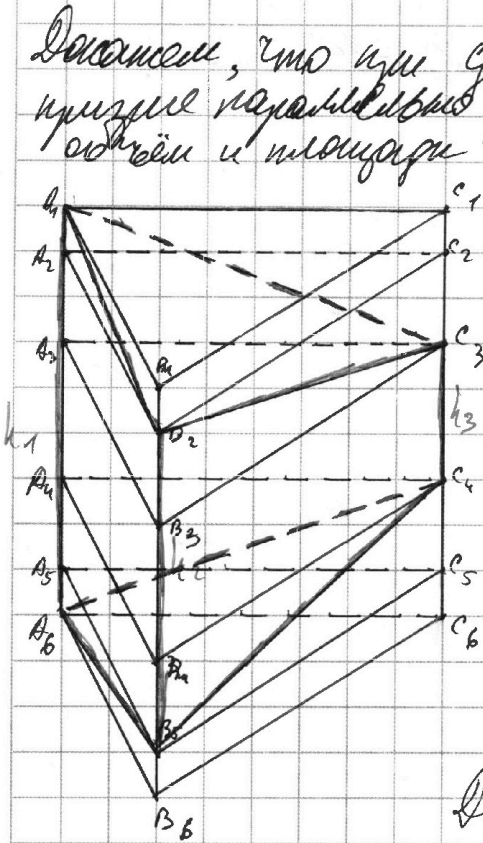


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Докажем, что при срезе любой плоскостью в призме параллельные грани делятся отрезками, имеющими одинаковую длину и площадь. То есть в каждой грани призмы $A_1B_1C_1$ и $A_6B_6C_6$ отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и A_6A_5, B_6B_5, C_6C_5 имеют одинаковую длину и площадь. То же самое верно и для остальных срезанных граней.

А в уровнях A_1, B_1, C_1 и A_6, B_6, C_6 площади не изменяются н.д.

$$S = \frac{A_1A_6 + A_2A_5}{2} \cdot h, \text{ где } h \text{ — высота, и}$$

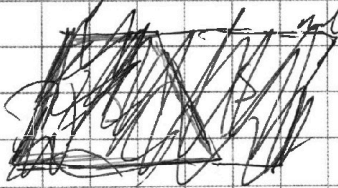
длины ребер не меняются.

Докажем непрерывность сечения.

~~Сечение призмы плоскостью, параллельной основанию, делит ее на две части: меньшую призму и большую усеченную призму.~~

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{основания}} \cdot h$. Длина боковой грани не меняется, поэтому V не меняется.

Значит, при срезе призмы ребра параллельно друг другу S и V не меняются. Главная задача — показать, что площадь сечения не меняется, но равной S сечения в срезанную призму отнесем только часть сечения. Это можно сделать по формуле: каждая грань имеет одинаковую длину ребер, следовательно, сечение имеет одинаковую площадь и объем.



При срезе параллельно ребрам сечения, каждая грань имеет...



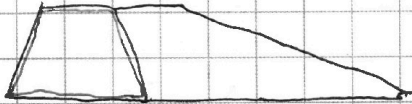
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Площадь среза для 2 граней с высотой 3, а
высотой "уходим" без сдвига.



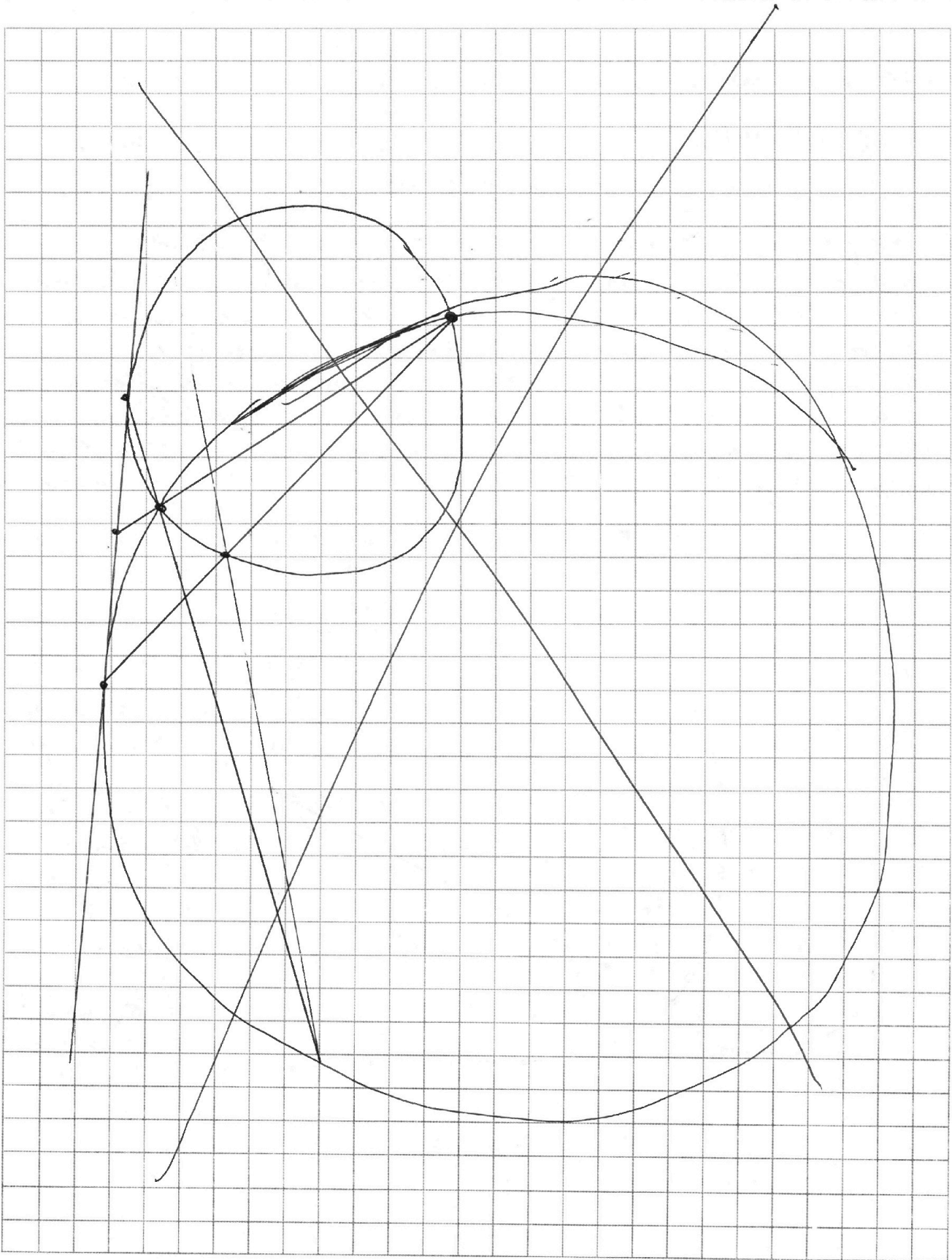


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



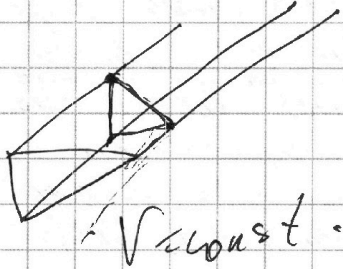


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

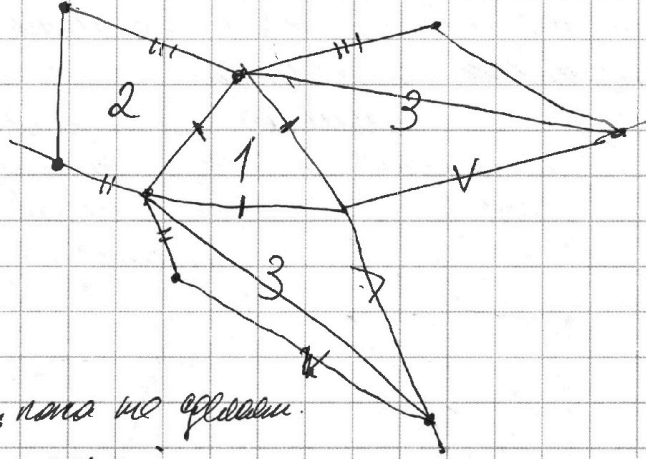
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



V_{const} .

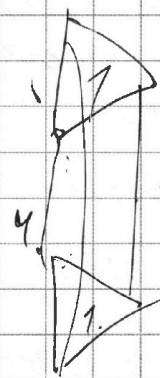
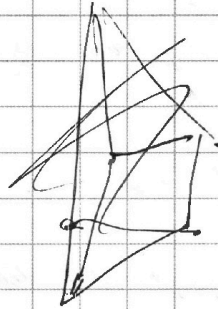
S_{const} .

*Значения, пока не определены
у прямоугольника.*



3 3 2
3 3 2
6 6 4

3 3 2
3 2 3
6 5 5





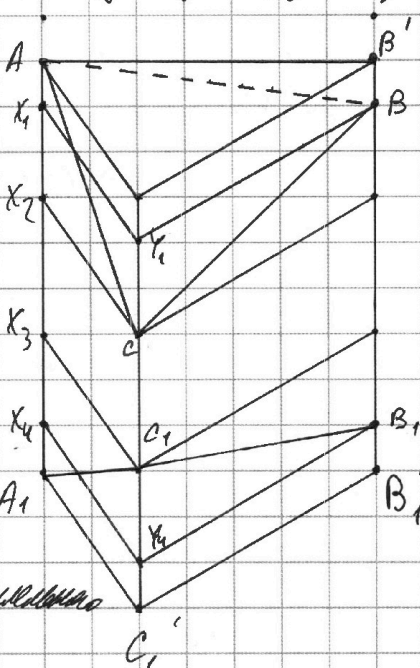
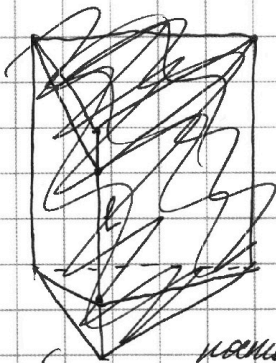
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
1 из ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что мы можем сдвинуть свободную грань кристалла ^{дольше} параллельно другим двум ^{или одной или двум из остальных} параллельным друг другу граням, не изменяя объема. Пусть V_0 - объем описанной для параллельной призмы с длиной l и площадью S грани ABC .



Пусть сдвигать призму вдоль AB, C, C_1 , а описанной призматической $A'B'C'A_1B_1C_1$.

мощь $S_{A_1B_1C_1}$ ^{наклонная} или грани $(ABC, A_1B_1C_1)$ не меняется, S_{ABC} ^{наклонная} и не меняется ^{из-за параллельности} AB, A_1B_1 , BC, B_1C_1 .

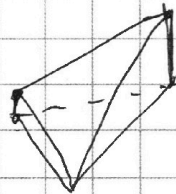
$$a) S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} l (AA_1 + CC_1)$$

Аналогично $S_{B_1C_1A_1}$ не меняется.

$S_{h_{mix}}$

Докажем сохранение объема

$$V_{ABC A_1 B_1 C_1} = V_0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on graph paper for a geometry problem involving a circle and a cube. The diagram shows a circle with diameter AC, points B, D, E, F on the circumference, and lines connecting them. A cube is sketched in the bottom left corner with side length $a = 2\sqrt{3}$. The solution includes various mathematical derivations and formulas:

$$a = 2\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{4 \cdot 3}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{27}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$1 + \frac{a}{\sqrt{3}} = 3 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$a = 2\sqrt{3}$$

Other notes and calculations include:

- $BD = 2R \cdot \sin(\angle C)$
- $\frac{BD}{\sin(\angle C)}$
- $\frac{AN}{AM}$
- $\frac{BN}{AM} = \frac{1}{2}$
- $\frac{AN}{AM} = \frac{1}{2}$
- $\frac{AN}{AM} = \frac{1}{2}$
- $\frac{AN}{AM} = \frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

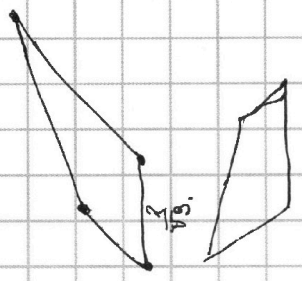
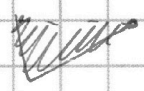
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

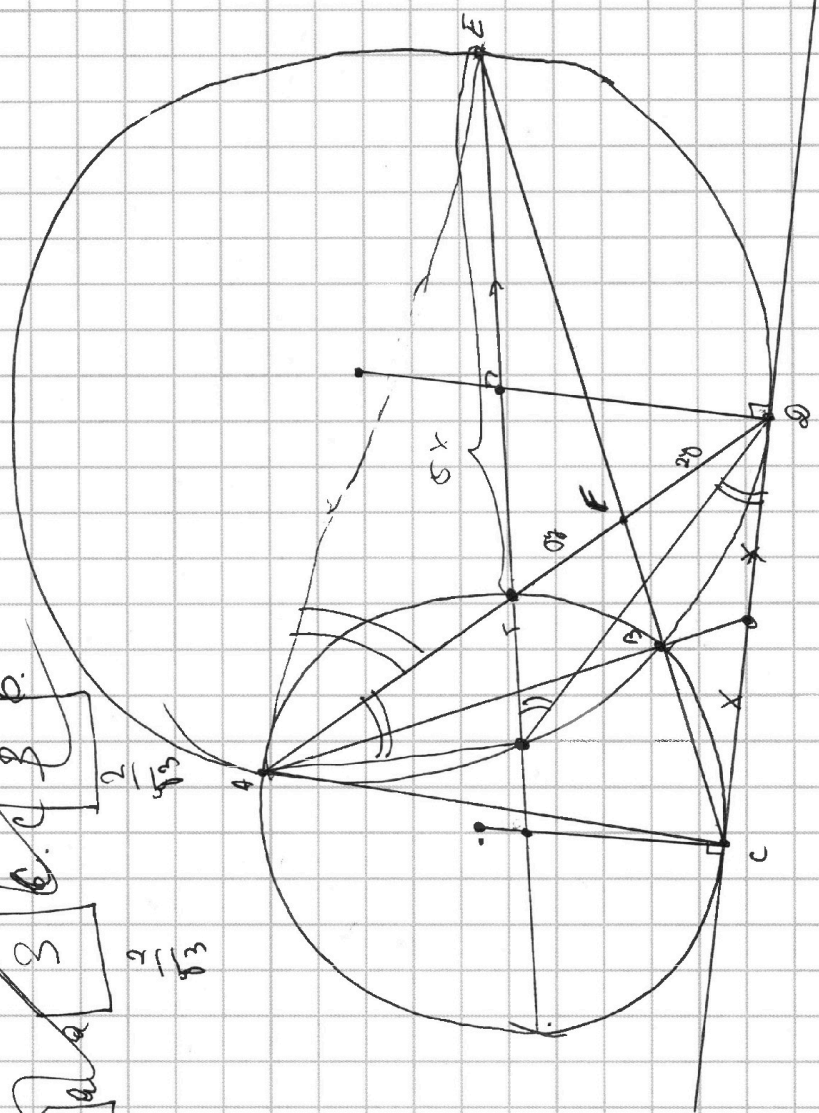
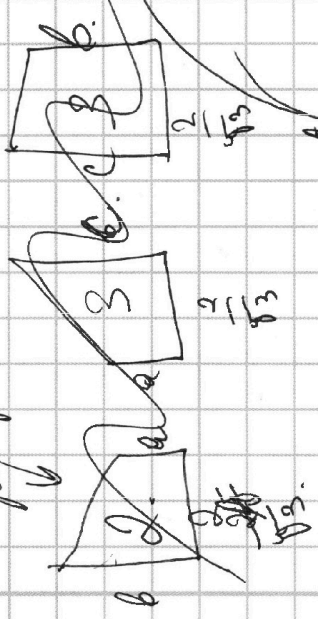
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

100 100 100 100 100

$CF = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $FE = \frac{2}{\sqrt{3}}$



$a = b$



$a \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2, \quad a = \sqrt{3}$
 $\frac{a+c}{\sqrt{3}} = 2, \quad \frac{a+c}{\sqrt{3}} = 2, \quad \frac{2}{\sqrt{3}} = 2, \quad c = 2\sqrt{3}$
 $\frac{c}{\sqrt{3}} = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x+4z} + 4 = 2\sqrt{y+z-4x-x^2}$$

$$14 + 4 + 1 + 4 + 4 - 5 = \sqrt{81 - 2z^2}$$

$$p(\cos^3 x + 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 6\cos^3 x + 10$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 2(12\cos^3 x - 6 + 10)$$

$$x \in [-5, 1-x \in [2, 6+4z]$$

$$1-x \in [8, 6+4z \geq 0] \Rightarrow z \geq \frac{3}{2}$$

$$\cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 3(p+4)\cos x - 12\cos^3 x - 4 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 12\cos^3 x + (2\cos x - 4) = 0$$

$$p \cos^3 x - 3\cos^3 x + 3\cos x - 4 = 0$$

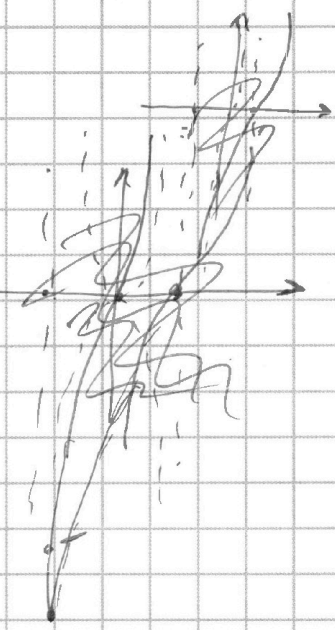
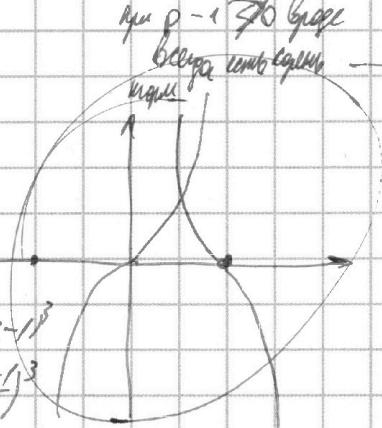
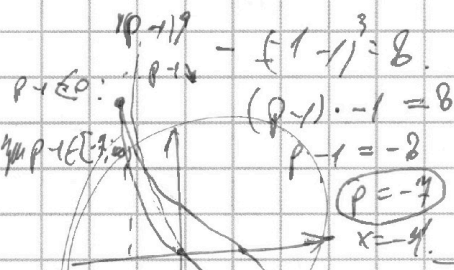
$$px^3 - 3x^3 + 3x - 4 = 0$$

$$x \in (-1, 1)$$

$p = 120$ possible

$$(p-1)x^3 + (x-1)^3 = 0$$

$$(p-1)x^3 = -(x-1)^3$$



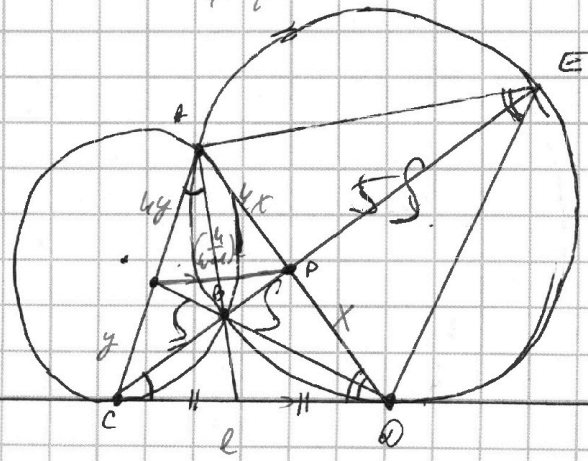
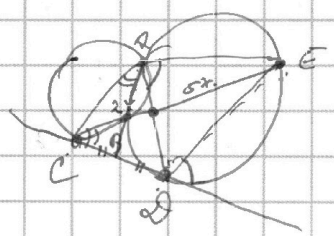
$$1 - \frac{1}{x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}}$$

$$-1 \leq \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \leq 1$$

$$\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-p}} \leq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{1-p} = t$$

$$-1 \leq \frac{1}{1-t} \leq 1$$





1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$ $b-a$ p^2

$(a-c)(b-c) = p^2$

$a^2 + b^2 = 710$

$b \cdot 9^6$

$Q_7 = \sqrt{25x-9} \cdot (x-6)$

$Q_8 = b \cdot 9^8 = x \cdot 3$

$Q_{15} = b \cdot 9^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} \cdot 3$

$Q_{15} = 2$

$Q_2 = 9 = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} = \frac{1}{(x-6)^2}$

$9^4 = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}$

$9^4 = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}$

$9^2 = \frac{x+3}{\sqrt{25x-9} \cdot (x-6)} = \sqrt{x-6} = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$

$(x+3)^2 = 25x-9$

$x-6 > 0$

$(x+3)^2 = -(25x-9)$

$(x-6) < 0$

$x=18: Q_7 = \sqrt{450 \cdot 12} = 21 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{150 \cdot 3} = 18 \sqrt{50} = 90 \sqrt{2}$

$Q_8 = 21$

$Q_{15} = \sqrt{\frac{450}{12^3}} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{450}{72}} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{150}{4}} = \frac{1}{24} \sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{24}$

$Q_3 = 42 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}$

$Q_1 = 42 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 42 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 42 \cdot 18 \sqrt{2}$

$4 + 40 = 44$

$2 \pm 2\sqrt{11} =$

$\sqrt{81-2^2} = 9$

$z=0$

$y=5$

$16+16=32$

$4 \pm 4\sqrt{2} =$

$\frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \sqrt{2}$

20

$\times 18$

200

25

450

441

18

$\frac{21}{\sqrt{12^3}} =$

$\frac{21}{12 \cdot 2\sqrt{3}} =$

$\frac{21}{24\sqrt{3}}$

$A-B=4=2AB$

$A^2B = 6$

$A, B \neq 0$