



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1
<input checked="" type="checkbox"/> | 2
<input type="checkbox"/> | 3
<input type="checkbox"/> | 4
<input type="checkbox"/> | 5
<input type="checkbox"/> | 6
<input type="checkbox"/> | 7
<input type="checkbox"/> |
|--|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$I \cap aq^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$II \cap aq^8 = x+3$$

$$III \cap aq^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$a = aq^6 \cdot aq^8 \cdot aq^{14} = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot (x+3) \cdot \sqrt{(x-6)^3}}{\sqrt{25x-9}} = (x-6)^2(x+3)$$

$$\text{Тогда из II-рда: } q = \sqrt[8]{x+3} = \sqrt[8]{(x-6)^2(x+3)} = \sqrt[4]{x-6}$$

$$\text{Подставим в I: } (x-6)^2(x+3) \cdot \frac{1}{(x-6)^2} = \sqrt{25x-9}(x-6)^{\frac{1}{2}} \quad | \text{ (x-6) } \text{ не } 0, -\text{чл}$$

$$(x+3) = \sqrt{25x-9}^7 / 12 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 25x - 9 \Rightarrow x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=18 \end{cases} \quad \text{При } x=1: (25x-9)(x-6) < 0 - \text{Подходящее вкл.} \Rightarrow \text{не } \text{чл.} \quad \text{При } x=18: \text{не } \text{чл.}$$

Ответ: $x=18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Любопытные замечания:

$$|z| \leq 9$$

$$x \geq -5$$

$$4z + x \leq 1$$

$$x + 4x + 4z + x + z \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq y + z + 4$$

Макс

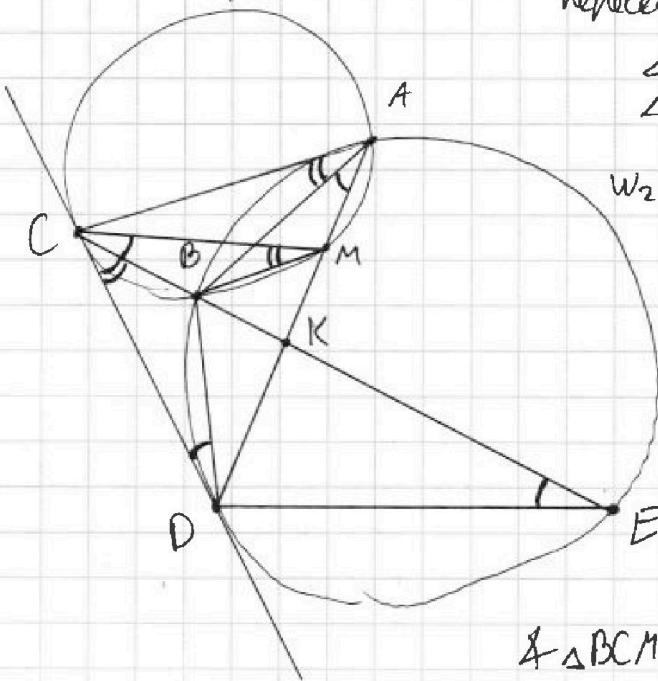
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано: $\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5}$ Ищем: $\frac{ED}{CD}$



Решение: ① Отметим вторую точку пересечения AD с w_1 : M

$$\angle BAM = \angle BCM \quad (\text{он. на } \vee BM \text{ в } w_1) \Rightarrow$$

$$\angle BAM = \angle BED \quad (\text{он. на } \vee BD \text{ в } w_2) \Rightarrow$$

$$w_2 \Rightarrow \angle BCM = \angle BED - \text{нар. лев. прям.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM \parallel DE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CKM \sim \triangle KDE, k = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = \frac{5}{2} CM$$

② CD -точ. $\Rightarrow \angle CAB = \angle BCD = \angle BMC;$
 $\angle CEO = \angle COB \Rightarrow \angle COB = \angle BCM$
 (но COB -я)

$\triangle BCM \sim \triangle CBD: \angle CBM = \angle CBD; \Rightarrow \triangle BCM \sim \triangle CBD \Rightarrow$
 $\angle BCM = \angle CBD \Rightarrow \angle CBM = \angle BCD$

$$\Rightarrow \frac{CB}{BD} = \frac{BM}{CB} \Rightarrow CB^2 = BM \cdot BD$$

③ $\angle MBK = \angle DBK$ как ^{смежные} к равным углам $\angle CBM \sim \angle CBD$ соответ \Rightarrow
 $\Rightarrow BK$ -д succ.-ca $\triangle DBM \Rightarrow$ но CBM д succ.: $\frac{BD}{DK} = \frac{BM}{KM} \Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{DK}{KM}$
 Но п. ① $\frac{DK}{KM} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{5}{2}$. $\mid BD = 5x$, тогда $BM = 2x$, тогда

но п. ④: $CB^2 = 5x \cdot 2x \Rightarrow CB = \sqrt{10} \cdot x \Rightarrow \triangle CBM \sim \triangle CBD$ с 100%-om =
 $= \frac{BM}{CB} = \frac{2x}{\sqrt{10}x} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{10} \cdot CD}{5}$

Уз п. ④: $ED = \frac{5}{2} CM = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot CD \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что симметрия отн. центра преобразует любые композитные симметрии симметрий сначала отн. одной стороны, затем другой. Из этого следует, что раскраска моб обладает только одной из трех симметрий, моб всеми тремя сразу.

Разобьем треугольник на 4 равных 100×100 с общим вершиной в центре исходного квадрата. Утверждается, что заполнив один треугольник, а затем выбрав вид симметрии, можно получить все возможные раскраски.

Всего 4 способа выбрать вид симметрии: ~~Все три фигуры зеркал. отн. к любой из ср. линий и центру по отдельности и один способ с симметрией по всем сразу.~~ № 1

В первых двух мы красим 4 клетки, т.к. после симметрии это всё удвоится. В последнем же красим только 2, т.к. симметрия умножает всё на 2 клетки.

2 4

~~Получим образом, ответ: $C_{1000}^2 + 3C_{1000}$, в котором всегда~~

осталось в первых трех случаях исследовать выбор другого пазухи-ца за стартовый. Умножение 4 и поделили 2

пазухи избавится от повтор. - ся случаев. (поскольку каждая симметрия зеркальная. 2 пазухи-ца)

$$\text{Ответ: } C_{1000}^2 + 6C_{1000}^4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 N_1 & aq^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Rightarrow aq^{14} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot (x+3) \Rightarrow \\
 & aq^8 = x+3 \\
 & aq^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \Rightarrow a = \frac{aq^{14}}{aq^8} = \sqrt{\frac{(25x-9)(x-6)}{(25x-9)}}(x+3) = \\
 & = (x-6)^2(x+3), \quad a = (x-6)^2(x+3), \quad x \neq \frac{9}{25} \\
 & (x-6)^2(x+3) \cdot q^8 = (x+3) \Rightarrow q^8 = \frac{(x+3)}{(x+3)(x-6)^2} \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}, \quad x \neq -3, \quad x \neq 6 \\
 & \text{N}_2 \quad (x-6)^2(x+3) \cdot \frac{1}{(x-6)} \cdot \sqrt{x-6} = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (x-6)(x+3) = \sqrt{25x-9}(x-6) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 25x - 9 \\
 & x^2 - 19x + 18 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 18 \end{matrix} \\
 N_2 & \int_{y=9}^{\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4} = 2\sqrt{y-4x-x^2+z^2} \\
 & |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \quad \begin{matrix} - & + & + & + \\ -4 & & 5 & \end{matrix} \rightarrow y \\
 00 & \begin{cases} z < 9; 4z + x \leq 1 \\ x > -5; (x+2)^2 \leq y+2+z \end{cases} \quad (y+4)^2 + 16(y-5)^2 + 8|y+4||y-5| = 81 - z^2 \\
 & 1 - x - 4z \geq 0 \Leftrightarrow 4z + x \leq 1 \\
 & y - 4x - x^2 + z^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leq y + z + 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq y + z + 4 \\
 \textcircled{1} & \cancel{x \leq 4}: \cancel{-y - 4 - 4y + 20 = \sqrt{81 - z^2}} \Rightarrow \cancel{-5y + 16 = \sqrt{81 - z^2}}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \quad |31| \quad \begin{matrix} 7/31 \\ 31 \end{matrix}$$

$$3 \ 4 \ \cancel{5} \ 5 \ 4 \ 4 \ 6 = 31$$

V

$$p \cos 3x + 3p \cos x + 12 \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p \cos 3x + 3p \cos x + 12 \cos x - 6 \cos 2x = 10$$

$$p \cos 3x - 6 \cos 2x + (3p+12) \cos x = 10$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

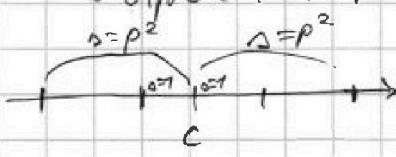
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad a \neq b \Rightarrow a-c \neq b-c \Rightarrow p^2 \text{ на мн. } (a-c)(b-c) \text{ можно разложить только так: } (\pm 1)(\pm p^2); (\pm p^2)(\pm 1).$$

Знаки у мн. должны быть одинаковыми, чтобы получалось $p^2 > 0$, значит либо $a < b < c$, либо $c < a < b$.

Рассмотрим точки на расстояниях ± 1 и $\pm p^2$ от т.с на числовой оси:



Тогда под условие подходят только два варианта:

$$\textcircled{I} \quad \begin{array}{ccc} ca=p^2 & \cancel{ca=1} \\ a & b & c \end{array}$$

$$\textcircled{II} \quad \begin{array}{ccc} & a & b \\ c & & \end{array}$$

$$\begin{cases} c-a=p^2 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=p^2+a \\ c=1+b \end{cases} \Rightarrow p^2+a=1+b \Rightarrow b-a=p^2-1=(p-1)(p+1)$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ c=b-p^2 \end{cases} \Rightarrow a-1=b-p^2 \Rightarrow b-a=p^2-1 \quad (\text{cb. к. II})$$

По усл. $b-a \geq 3$; $a \in \{p-1; p; p+1\}$ - три последовательных числа \Rightarrow одни из них: 3 значит $p \geq 3 \Rightarrow p$, число $\Rightarrow p=3$. $\begin{cases} (a-c)(b-c)=9 \\ b-a=8 \end{cases}$

$$b-a=8 \Rightarrow a^2+a+8=710$$

$$a^2+a-702=0$$

$$\text{По теореме Виета: } \begin{cases} a_1=-27 \\ a_2=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=-19 \\ b_2=34 \end{cases}; \begin{cases} c_{11}=-18 \\ c_{21}=35 \end{cases}; \begin{cases} c_{12}=-28 \\ c_{22}=25 \end{cases}$$

Усл. двух сл. в диапазоне C обеспечивает 2 решения

Ответы: $\{(a; b; c) \mid \begin{cases} a=-27; b=-19; c=-18 \\ a=26; b=34; c=35 \end{cases}\}; \{(a; b; c) \mid \begin{cases} a=-27; b=-19; c=-28 \\ a=26; b=34; c=25 \end{cases}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

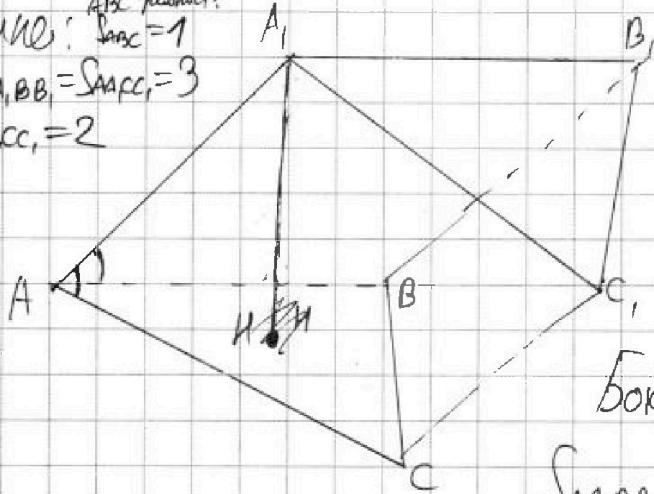
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано: $\triangle ABC$ равнобедленный:
 $S_{ABC} = 1$

$$S_{AA_1BB_1} = S_{AA_1CC_1} = 3$$

$$S_{BB_1CC_1} = 2$$



Найти: $V_{\text{призмы}}$

Решение: $\triangle ABC$ равнобедленный \Rightarrow

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Боковые грани \rightarrow параллелограммы:

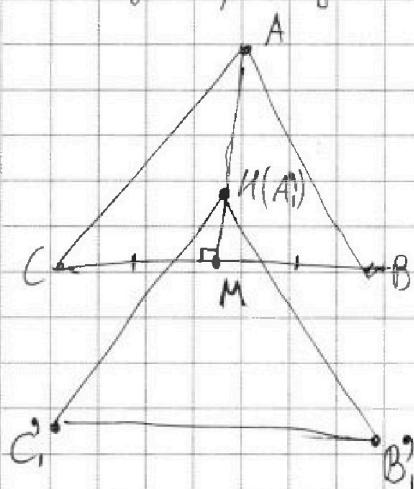
$$S_{AA_1BB_1} = AA_1 \cdot AB \cdot |\cos \angle A_1AB|$$

$$S_{AA_1CC_1} = AA_1 \cdot AC \cdot |\cos \angle A_1AC|$$

Из $S_{AA_1BB_1} = S_{AA_1CC_1}$ следует $|\cos \angle A_1AB| = |\cos \angle A_1AC|$

Проведём A_1M -высоту призмы ($A_1M \perp (ABC)$). Геометрический путь не трудно догадаться, что призма наклонена в сторону ребра BC . (Это следует из неравенства $S_{AA_1BB_1} = S_{AA_1CC_1} > S_{BB_1CC_1}$)

Тогда проекция всех точек на (ABC) выглядит так:



M попадает на симметр. к BC : $HM \perp BC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x$

$CK : KE = 2 : 5 \quad CD^2 = DM \cdot DA$

$w_1 \quad w_2 \quad KAKC = KM \cdot KA$

$\frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$

$\frac{CM}{DE} = \frac{2}{5}$

$CM \parallel DE$

$MK = 3$
 $KD = 5$

$BK \cdot KE =$
 $MD \cdot DK \cdot KA$

$CM \parallel DE$

$CD^2 = DM \cdot DA$

$\frac{CD}{DE} = \frac{BC}{BD}$

$\frac{ED}{CM} = \frac{5}{2} \quad ED = \frac{5CM}{2}$

$\frac{KD}{KM} = \frac{5}{2} \quad \frac{CM}{CD} ?$

$\frac{CM}{AC} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CM = \frac{AC \cdot CD}{AD}$

$ED = \frac{5AC \cdot CD}{2AD} \quad \frac{ED}{CD} = \frac{5}{2} \frac{AC}{AD}$

$BK \cdot KE = DK \cdot KA$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



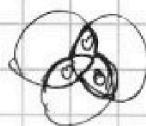
$$2 \Rightarrow 3 \quad \frac{100 \cdot 400}{4} = 10^4$$

$$P^3 = 8$$

$$6-a = 0$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$B-a(p+1)(p+1)$$



1111

8km

$$C_{1000}^2 + 3C_{1000}^4 =$$

$$(a, b, c) : a < b$$

$$\begin{cases} b-a \leq 3 \Leftrightarrow b \neq a \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 710 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{Z} \\ C_{a-c}^{a-c} \\ a < b < c \\ a^2 + a^2 \geq a : 3 \end{cases}$$

$$b-a = p^2-1$$

$$a-b = 1-p^2$$

$$710 \mid 2$$

$$\begin{array}{r} 355 \\ 71 \end{array} \mid \begin{array}{r} 5 \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b > a \\ 710 - a^2 > a \\ a^2 + a - 710 < 0 \end{array}$$

$$710 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$ab - ac - bc + c^2 = p^2$$

$$ab - c(a+b) + c^2 = p^2$$

$$\overline{\alpha \beta \gamma \delta}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad \frac{19}{361}$$

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & & & & \\ \vee & & & & \\ \bullet & & & & \\ \bullet & & & & \\ \oplus & & & & \end{array}$$

$$a^2 + b = 710$$

$$(c \pm 1)^2 + p^2 = 710 \quad \frac{17}{389} \quad \frac{19}{361}$$

$$(I) \quad c^2 + 2c + 1 + c + p^2 = 710$$

$$23571113$$

$$99254971169$$

$$\frac{17}{389}$$

$$\frac{19}{361}$$

$$\frac{361}{361}$$

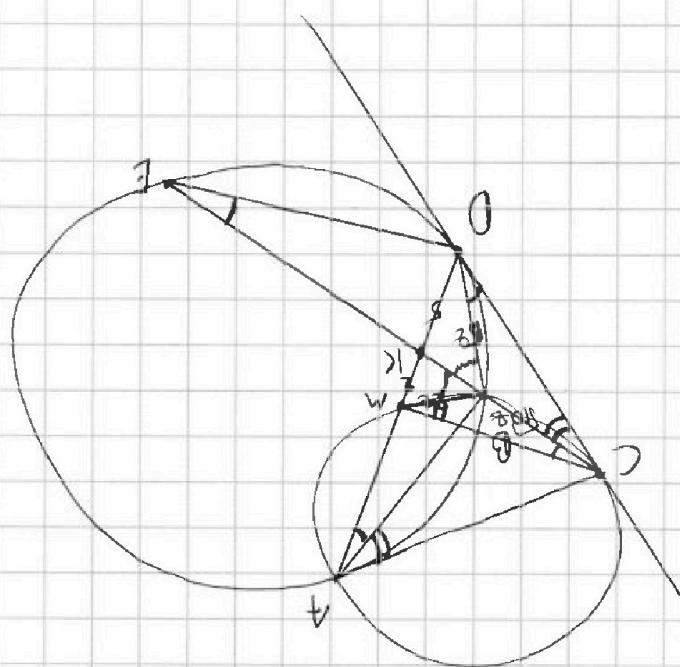
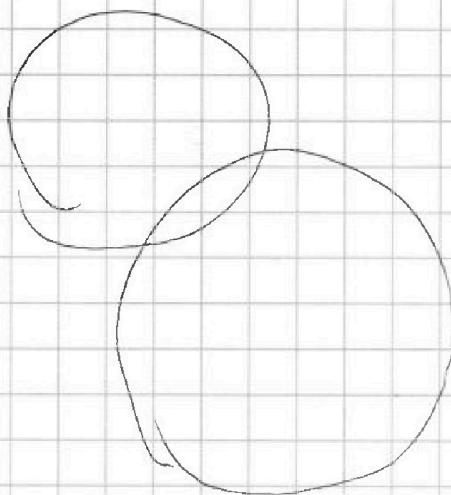


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{5} = \frac{z}{2}$$

$$\frac{CD}{2} = \frac{BM}{BD} = \frac{CB}{2}$$

$$CB = \sqrt{10^2 - z^2}$$

$$\frac{BD}{BM} = \frac{CB}{BM} = CB = BO \cdot BM = 10 \cdot z^2$$

$$CM = ?$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По усл. $b-a \not\equiv 0 \Rightarrow b \not\equiv a$. $\nmid a^2+b=710 \Rightarrow b=710-a^2$

$710 \equiv 2$; $a \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad a^2 \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ Если $a^2 \equiv 1$, то $710-a^2 \equiv 1 \Rightarrow b \equiv a \Rightarrow$
аб-разнчны \Rightarrow противоречие. $\Rightarrow a \not\equiv 0 \Rightarrow b \not\equiv 3$.

$a-c \not\equiv b-c \Rightarrow (a-c)(b-c) \not\equiv 3^2$, тогда $b \not\equiv c \not\equiv a \not\equiv b$

$(a-c)(b-c)=ab-c(a+b)+c^2=p^2$ Если $c \equiv 2$, то $b \equiv 1 \Rightarrow -c(a+b)+c^2 \equiv 0 \Rightarrow$
~~ab-acb+c^2:3~~ $ab-acb+c^2:3$ -Против. $\Rightarrow c \equiv 1; b \equiv 2$ (следует ещё из $710-a^2=b$)
разнч. чисел

Если пр-е двух чисел является кв-ом простого числа, то одно из них должно равняться единице по модулю, а второе самому квадрату:

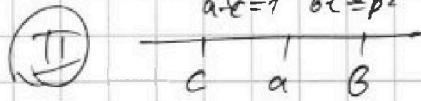
$\begin{cases} |a-c|=1 \\ |b-c|=p^2 \end{cases}$ Так же, при раскрытии, мы получим либо остаток единицы по модулю, либо квадрат единицы по модулю.

$\begin{cases} |a-c|=p^2 \\ |b-c|=1 \end{cases}$ Если рассмотреть окрестность точки C : 
с учётом выше перенесённых фактов

$ca=p^2$ остается только два возможных варианта:

(I) 

$$\begin{cases} C-a=p \\ C-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=a \\ C=b+1 \end{cases}$$

(II) 

$$\begin{cases} a-C=1 \\ b-C=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-C=1 \\ b-C=351 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 702 \quad 2 \\ 351 \quad 9 \\ 39 \quad 3 \\ \hline 13 \quad 13 \end{array}$$

$$b-a=8 \Rightarrow b=8+a$$

$$\begin{aligned} a^2+a+8 &= 710 \\ a^2+a-702 &= 0 \end{aligned}$$

